Московский Университет имени С. Ю. Витте (МИЭМП)

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 6:
Элементы математической статистики

Математическая статистика

Предметом математической статистики является изучение совокупности однородных объектов относительно некоторого количественного или качественного признака, характеризующего эти объекты по результатам наблюдений.

Математическая статистика

Наблюдения могут заключаться либо в измерении какого-нибудь параметра исследуемого объекта, либо в регистрации у него того или иного признака. В общем случае измеряемых параметров или регистрируемых признаков может быть несколько. При этом наблюдения могут производиться как над самими объектами, так и над их моделями.

Математическая статистика

К числу наиболее часто встречающихся задач математической статистики относятся:

1. Определение по результатам независимых наблюдений частоты наступления случайного события и оценка на этой основе его вероятности;
2. Оценка законов распределения случайных величин по результатам наблюдений;
3. Определение неизвестных значений числовых характеристик случайных величин, оценка их точности и надёжности;

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

4. Проверка статистических гипотез о виде закона распределения или его числовых характеристиках;

5. Оценка степени взаимосвязи между несколькими характеристиками исследуемых объектов (корреляция).

Математическая статистика

QUI NON PROFICIT, DEFICIT МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

В практике статистических наблюдений различают два вида: *сплошное*, когда изучаются все объекты и *выборочное*, когда изучается часть объектов (*выборочный метод*).

Генеральной совокупностью называют множество всех объектов над которыми необходимо произвести наблюдение.

Выборочной совокупностью (*выборкой*) называется та часть генеральной совокупности, которая отобрана *для* непосредственного изучения.

Число объектов в совокупности называется её объёмом. N – объём генеральной совокупности, n – объём выборки.

Суть выборочного метода в том, чтобы по выборке можно было бы делать выводы о тех же свойствах генеральной совокупности.

Математическая статистика

Чтобы по выборке можно было уверенно судить об изучаемой случайной величине выборка должна быть *собственно-случайной*: любой объект генеральной совокупности может быть с одинаковой вероятностью отобран в выборку.

Математическая статистика

При этом возможны два способа образования выборки: повторная и бесповторная.

Повторной называют выборку, при которой случайно отобранный и обследованный объект возвращается в генеральную совокупность и после этого снова может быть отобран в выборку.

Бесповторной называют выборку, при которой случайно отобранный и обследованный объект не возвращается в генеральную совокупность.

Математическая статистика

Накопленные в процессе исследования или эксперимента данные сначала подвергают сортировке: *ранжируют* (упорядочение в порядке возрастания или убывания), затем *группируют* (в каждой группе возможные значения случайной величины одинаковы).

Различные возможные значения случайной величины, соответствующие отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных называются *вариантами*.

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется *частотой* варианта.

Отношение частоты данного варианта к объёму совокупности называется *долей* (относительной частотой) варианта.

Математическая статистика

Частоты и доли вариантов обобщённо называются весами.

Сумма частот равна объёму совокупности, а сумма долей равна единице.

Ранжированный в порядке возрастания (или убывания) ряд вариантов с соответствующими им весами называется дискретным *вариационным рядом*.

Обычно представляется в виде таблицы.

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m	Σ
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m	n

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m	Σ
w_i	w_1	w_2	$\dots$	w_m	1

Математическая статистика

Если изучаемая случайная величина является непрерывной, то строится интервальный вариационный ряд.

Длины интервалов называются *интервальными разностями*. В нашем случае для удобства расчётов будем брать ряды с одинаковыми интервальными разностями и затем заменять интервальный ряд дискретным, в котором в качестве варианта принимается середина интервала.

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Для наглядности интервальный вариационный ряд можно изобразить в прямоугольной системе координат в виде *гистограммы*, которая представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых на оси абсцисс являются интервалы значений признака, а высоты равны соответствующим им частотам или долям (на оси ординат).

Полигоном частот или относительных частот называется ломаная линия, соединяющая точки с координатами

$$(x_i; n_i) \text{ или } (x_i; w_i).$$

Математическая статистика

Основными числовыми характеристиками вариационных рядов являются средняя арифметическая и дисперсия вариационного ряда.

Средней арифметической вариационного ряда называется сумма произведений всех вариантов ряда на соответствующие им частоты, делённая на объём.

Дисперсией вариационного ряда называется средняя арифметическая квадратов отклонений вариантов от их средней арифметической.

Математическая статистика

По определению вести расчёты средней арифметической и дисперсии вариационного ряда бывает сложно. Можно пользоваться следующими формулами:

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ
QUI NON PROFICIT, DEFICIT

$$\bar{x} = \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k} \cdot n_i + c$$

$$\sigma_x^2 = \frac{k^2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - c}{k} \right)^2 \cdot n_i - (\bar{x} - c)^2$$

σ^2 – *генеральная дисперсия*

s^2 – *выборочная дисперсия*

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Известно, что для описания случайной величины достаточно знать её числовые характеристики (параметры). Например, математическое ожидание, дисперсию, с.к.о. Поэтому встаёт задача определения этих характеристик генеральной совокупности по тем же параметрам выборки.

Поскольку объём выборки мал, по сравнению с объёмом генеральной совокупности, то по выборке можно лишь оценить значения параметров генеральной совокупности.

Выборочная числовая характеристика t, используемая в качестве приближённого значения неизвестной числовой характеристики генеральной совокупности t, называется её *точечной статистической оценкой*.

Математическая статистика

QUI NON PROFICIT, DEFICIT
МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

Средние арифметические, дисперсии, а также с.к.о. распределения признака в генеральной и выборочной совокупностях называются *генеральной средней*, *выборочной средней*, *генеральной дисперсией*, *выборочной дисперсией*, генеральным с.к.о., выборочным с.к.о.

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ
QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Выборочная средняя и выборочная доля являются точечными оценками генеральной средней и генеральной доли. Но точечных оценок не достачно, следует выяснить степень рассеивания их относительно истинных параметров, т.е. дисперсию.

Интервальной оценкой параметра t называется числовой интервал (a; b), который с заданной доверительной вероятностью γ «накрывает» неизвестное значение параметра t.

В этом случае интервал (a; b) называется *доверительным интервалом*, а вероятность γ- *доверительной вероятностью*.

Доверительной вероятностью (надёжностью) γ называется вероятность того, что оценка x отклонится от оцениваемого параметра t по абсолютной величине не более, чем на положительное число Δ.

$$P(|x-t| \leq \Delta) = \gamma$$

Наибольшее отклонение Δ выборочной числовой характеристики от соответствующей ей генеральной характеристики, которое возможно с заданной доверительной вероятностью γ называется *предельной ошибкой выборки*.

Математическая статистика

$$\gamma = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_x}\right)$$

Φ - Функция Лапласа, значения которой находятся в таблице.

x - выборочная средняя или доля,

σ_x - соответствующее ей с.к.о.

Среднее квадратическое отклонение σ_x оценки x параметра t собственно случайной выборки называется *средней квадратической ошибкой* выборки.

Из последней формулы следует, что при заданной доверительной вероятности предельная ошибка выборки равна u-кратной величине средней квадратической ошибки, т.е. $\Delta = u \cdot \overline{\sigma}_x$ (u – аргумент функции *Лапласа*).

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Формулы для средних квадратических ошибок имеют вид:

Оцениваемый параметр	Повторная выборка	Бесповторная выборка
Генеральная средняя $\bar{x}$	$\bar{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$	$\bar{\sigma}'_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$
Генеральная доля w	$\bar{\sigma}_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$	$\bar{\sigma}'_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$

Математическая статистика

При интервальном оценивании решаются следующие задачи:

1. Определение доверительного интервала при заданной доверительной вероятности и фиксированном объёме выборки;
2. Определение доверительной вероятности при заданном доверительном интервале и фиксированном объёме выборки;
3. Определение необходимого объёма выборки для достижения заданной точности и надёжности исследований.

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Формулы расчёта объёма выборки имеют вид:

Оцениваемый параметр	**Повторная выборка**	**Бесповторная выборка**
Генеральная средняя $\overline{x}$	$n = \dfrac{u^2 \cdot s^2}{\Delta^2}$	$n' = \dfrac{n \cdot N}{n + N}$
Генеральная доля w	$n' = \dfrac{u^2 \cdot w \cdot (1-w)}{\Delta^2}$	$n' = \dfrac{Nu^2 w(1-w)}{u^2 w(1-w) + N\Delta^2}$

Математическая статистика

При оценке генеральной доли в отсутствии предварительных сведений о значениях дисперсии и доли нет, то формула для объёма повторной выборки имеет следующий вид:

$$n = \frac{u^2}{4 \cdot \Delta^2} .$$

Математическая статистика

В науке и на практике часто ставится задача нахождения неизвестного закона распределения признака, являющегося случайной величиной. С этой целью производится эксперимент, в результате которого получают эмпирическое распределение случайной величины в виде вариационного ряда. Далее на основе анализа опытных данных по отношению к известным теоретическим распределениям делают предположение о том, какое распределение лучше других отражает опытное.

Математическая статистика

Т.е. выдвигается *статистическая гипотеза* (предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения). Необходимо выяснить, справедлива ли она (степень её согласованности с имеющимся эмпирическим вариационным рядом).

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Если на основании теоретических предпосылок и анализа опытных данных приходим к выводу, что изучаемый признак распределён по *нормальному закону*, то нахождение нормального закона этого признака сводится к определению средней арифметической и дисперсии опытного распределения признака.

Математическая статистика

Затем вычисляют теоретические частоты, соответствующие опытным частотам по формуле:

$$n_i^0 = \frac{n \cdot k}{s} \cdot f\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right)$$

k - интервальная разность

f - функция Гаусса (значения в таблице)

Математическая статистика

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ
QUI NON PROFICIT, DEFICIT

После этого выясняется степень согласованности данных эксперимента и статистической гипотезы. Для ответа на этот вопрос существуют критерии согласия, одним из которых является критерий Пирсона. В нём за меру расхождения эмпирического ряда с гипотезой принимают величину χ^2, которая вычисляется по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^0\right)^2}{n_i^0},$$

n_i – эмпирическая частота.

Математическая статистика

Полученное значение χ^2 сравниваем с критическим (табличным). Для критического значения определяются число степеней свободы, которое на 3 единицы меньше, чем число интервалов и уровень значимости, который в наших гипотезах принимается равным 0,05.Если полученное значение χ^2 больше критического, то гипотеза о нормальном распределении опытных данных отвергается, а если полученное меньше критического, то не отвергается.

Задача

QUI NON PROFICIT, DEFICIT
МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

Пример 1. Для исследования количества рабочих часов, выработанных одним работником на фирме в течение декады из тысячи сотрудников по схеме собственно-случайной выборки отобрано 200 человек. Получены следующие данные:

Число часов	До 51	51-54	54-57	57-60	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75	75-78	78-81	81-84	Свыше 81
Число работников	6	10	12	15	17	20	22	21	18	15	18	16	10

Задача

Найти доверительную вероятность того, что среднее количество рабочих часов всех сотрудников отклонится от выборочной средней на более, чем на полчаса.

Найти границы, в которых с вероятностью 0,9876 заключено среднее количество рабочих часов для всех сотрудников.

Определить минимальный объём выборки, по которой с вероятностью 0,9876 можно было утверждать, что среднее количество часов, полученное по выборке, отличалось от генеральной средней не более, чем на 1,725 часа.

Задача

Рассмотреть повторную и бесповторную выборки.

Проверить гипотезу о том, что количество рабочих часов, выработанных рабочим в течение декады распределено по нормальному закону.

Решение: сначала вычислим выборочную среднюю и выборочную дисперсию, для этого составим вспомогательную таблицу:

Задача

Кол. часов	до 51	51-54	54-57	57-60	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75	75-78	78-81	81-84	св. 84	Итого
Середина интервала x_i														
Кол. сотрудников n_i	6	10	12	15	17	20	22	21	18	15	18	16	10	200
$\dfrac{x_i - c}{k}$														
$\dfrac{x_i - c}{k} \cdot n_i$														$\oplus$
$\left(\dfrac{x_i - c}{k}\right)^2 \cdot n_i$														$\oplus$

Задача

Кол. часов	до 51	51-54	54-57	57-60	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75	75-78	78-81	81-84	св. 84	Итого
Середина интервала x_i	49,5	52,5	55,5	58,5	61,5	64,5	67,5	70,5	73,5	76,5	79,5	82,5	85,5	
Кол. сотрудников n_i	6	10	12	15	17	20	22	21	18	15	18	16	10	200
$\frac{x_i - c}{k}$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
$\frac{x_i - c}{k} \cdot n_i$	-36	-50	-48	-45	-34	-20	0	21	36	45	72	80	60	81
$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 \cdot n_i$	216	250	192	135	68	20	0	21	72	135	288	400	360	2157

Задача

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

$$c = 67{,}5; \quad k = 3$$

$$\bar{x} = \frac{81}{200} \cdot 3 + 67{,}5 = 68{,}715$$

$$s^2 = \frac{2157}{200} \cdot 3^2 - (68{,}715 - 67{,}5)^2 \approx 95{,}59$$

$$s \approx 9{,}78$$

Задача

Найдём средние квадратические ошибки:

$$\overline{\sigma}_{\overline{x}} = \frac{9{,}78}{\sqrt{200}} \approx 0{,}69 \quad п.в.$$

$$\overline{\sigma}'_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{95{,}59}{200} \cdot \left(1 - \frac{200}{1000}\right)} \approx 0{,}2 \quad б.п.в.$$

Задача

Подставим их в формулу доверительной вероятности:

$$P\left(\left|X-68{,}715\right|\le 0{,}5\right)\approx \Phi\left(\frac{0{,}5}{0{,}69}\right)\approx \Phi(0{,}72)\approx 0{,}5285\ \textit{п.в.}$$

$$P\left(\left|X-68{,}715\right|\le 0{,}5\right)\approx \Phi\left(\frac{0{,}5}{0{,}2}\right)=\Phi(2{,}5)\approx 0{,}9876\ \textit{б.п.в.}$$

Задача

Для нахождения доверительного интервала нужно найти предельную ошибку выборки. Используем найденные ранее значения средних квадратических ошибок.

$$\Phi(u) = 0{,}9876 \Rightarrow u = 2{,}5$$

$$\Delta_{\bar{x}} = 2{,}5 \cdot 0{,}69 = 1{,}725$$

$$\Delta'_{\bar{x}} = 2{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}5$$

$$68{,}715 \pm 1{,}725 \Rightarrow (66{,}99;\ 70{,}44) \quad \textit{п.в.}$$

$$68{,}715 \pm 0{,}5 \Rightarrow (68{,}215;\ 69{,}215) \quad \textit{б.п.в.}$$

Задача

Найдём минимальный объём выборки.

$$\Phi(u) = 0{,}9876 \Rightarrow u = 2{,}5 \quad (\textit{табл.})$$

$$n = \left(\frac{2{,}5}{1{,}725}\right)^2 \cdot 95{,}59 \approx 200 \quad \textit{п.в.}$$

$$n' = \frac{200 \cdot 1000}{200 + 1000} = \frac{1000}{1 + 5} \approx 167 \quad \textit{б.п.в.}$$

Задача

Для нахождения теоретических частот составим вспомогательную таблицу

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Задача

x_i	49,5	52,5	55,5	58,5	61,5	64,5	67,5	70,5	73,5	76,5	79,5	82,5	85,5	Итого
n_i	6	10	12	15	17	20	22	21	18	15	18	16	10	200
$x_i - \bar{x}$														
$\frac{x_i - \bar{x}}{s}$														
$f\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)$														
n_i^{o}														$\otimes$

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Задача

x_i	49,5	52,5	55,5	58,5	61,5	64,5	67,5	70,5	73,5	76,5	79,5	82,5	85,5	Итого
n_i	6	10	12	15	17	20	22	21	18	15	18	16	10	200
$x_i - \bar{x}$	-19,2	-16,2	-13,2	-10,2	-7,2	-4,2	-1,2	1,8	4,8	7,8	10,8	13,8	16,8	
$\dfrac{x_i - \bar{x}}{s}$	-1,96	-1,66	-1,35	-1,04	-0,74	-0,43	-0,12	0,18	0,49	0,8	1,1	1,41	1,72	
$f\left(\dfrac{x_i - \bar{x}}{s}\right)$	0,0584	0,1006	0,1604	0,2323	0,3034	0,3637	0.3961	0,3925	0,3538	0,2897	0,2179	0,1476	0,0909	
n_i^{o}	4	6	10	14	19	22	24	24	22	18	13	9	6	191

Задача

МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени С.Ю. ВИТТЕ

QUI NON PROFICIT, DEFICIT

Рассчитаем значение критерия Пирсона:

$$\chi^2 = \frac{(6-4)^2}{4} + \frac{(10-6)^2}{6} + \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(15-14)^2}{14} +$$

$$+ \frac{(17-19)^2}{19} + \frac{(20-22)^2}{22} + \frac{(22-24)^2}{24} + \frac{(21-24)^2}{24} +$$

$$+ \frac{(18-22)^2}{22} + \frac{(15-18)^2}{18} + \frac{(18-13)^2}{13} + \frac{(16-9)^2}{9} +$$

$$+ \frac{(10-6)^2}{6} = 1 + 2,6667 + 0,4 + 0,0714 + 0,2105 +$$

$$+ 0,1818 + 0,1667 + 0,375 + 0,7273 + 0,5 + 1,9231 +$$

$$+ 5,4444 + 2,6667 = 16,3336$$

Задача

Найдём по таблице критическое значение критерия Пирсона (число степеней свободы k=10, уровень значимости принимается равным 0,05).

$$\chi^2_{кр}(0{,}05;10) = 18{,}3$$

$$16{,}3336 < 18{,}3$$

Это позволяет утверждать, что при уровне значимости 0,05 опытные данные не противоречат гипотезе о нормальном законе распределения (или опытные данные согласуются с выдвинутой гипотезой).

Задача

Пример 2. Проверяется партия из 5000 консервов. Проверили 10%, среди проверенных оказалось 12% просроченных. Найти доверительную вероятность того, что процент годных консервов во всей партии отличается от процента годных в выборке не более, чем на 3% по абсолютной величине.

Найти границы в которых с вероятностью 0,95 заключён процент годных консервов во всей партии.

Задача

Каким должен быть минимальный объём выборки по которой можно было бы утверждать, что отклонение доли годных консервов не превысит 2,8% по абсолютной величине (рассмотреть повторную и бесповторную выборки).

Задача

Решение:

Дано: $N = 5000; \quad n = 500; \quad w = 0{,}88.$

$$\bar{\sigma}_w = \sqrt{\frac{0{,}88 \cdot 0{,}12}{500}} \approx 0{,}0145$$

$$\bar{\sigma}_w' = \sqrt{\frac{0{,}88 \cdot 0{,}12}{500} \cdot \left(1 - \frac{500}{5000}\right)} \approx 0{,}0138$$

$$P\left(|w - 0{,}88| \le 0{,}03\right) \approx \Phi\left(\frac{0{,}03}{0{,}0145}\right) \approx \Phi(2{,}06) \approx 0{,}9606 \; п.в.$$

$$P\left(|w - 0{,}88| \le 0{,}03\right) \approx \Phi\left(\frac{0{,}03}{0{,}0138}\right) \approx \Phi(2{,}17) \approx 0{,}97 \;\; б.п.в.$$

Задача

Для нахождения доверительного интервала найдём предельные ошибки выборки, используя найденные значения средних квадратических ошибок.

$$\Phi(u) = 0{,}95 \Rightarrow u = 2{,}5$$

$$\Delta_w = 2{,}5 \cdot 0{,}0145 \approx 0{,}028$$

$$\Delta_w^{'} = 2{,}5 \cdot 0{,}0138 \approx 0{,}027$$

$$88\% \pm 2{,}8\% \Rightarrow (85{,}2\%;\ 90{,}8\%) \quad \text{п.в.}$$

$$88\% \pm 2{,}7\% \Rightarrow (85{,}3\%;\ 90{,}7\%)\ \text{б.п.в.}$$

Задача

Найдём минимальный объём выборки:

$$\Phi(u) = 0{,}9 \Rightarrow u = 1{,}65$$

$$n = \frac{(1{,}65)^2 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}12}{(0{,}028)^2} \approx 367$$

$$n' = \frac{5000 \cdot (1{,}65)^2 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}12}{5000 \cdot (0{,}027)^2 + (1{,}65)^2 0{,}88 \cdot 0{,}12} \approx 366$$

Статистическое распределение выборки

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Результаты выборки представляются в виде статистического распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_k

где $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n;$

x_i – варианты;

n_i – соответствующие им частоты;

n – объём выборки;

$W_i = \dfrac{n_i}{n}$ – относительные частоты.

Распределение относительных частот

Распределение относительных частот:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
W_i	W_1	W_2	W_3	$\ldots$	W_k

Основные характеристики выборки:

$\overline{x}_B$ – выборочная средняя;

D_B – выборочная дисперсия;

σ_B – выборочное среднее квадратичное отклонение;

S^2 – исправленная дисперсия.

Расчет основных характеристик выборки

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \ldots + x_k n_k}{n},$$

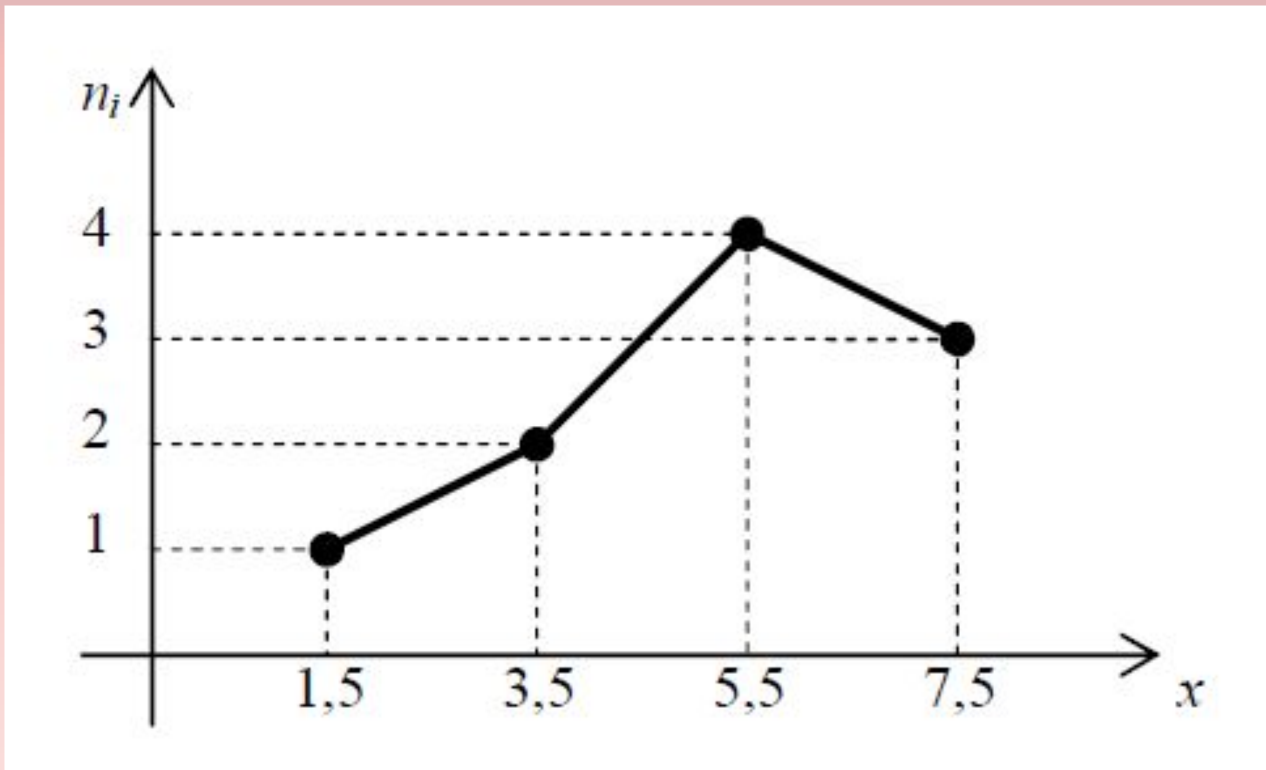
$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{n} = \frac{(x_1 - \overline{x}_B)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_B)^2 n_2 + \ldots + (x_k - \overline{x}_B)^2 n_k}{n},$$

$$D_B = \overline{x_B^2} - \overline{x}_B^2, \text{ где } \overline{x_B^2} = \frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k}{n},$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}, \quad S^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

Полигон абсолютных частот

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
n_i	1	2	4	3

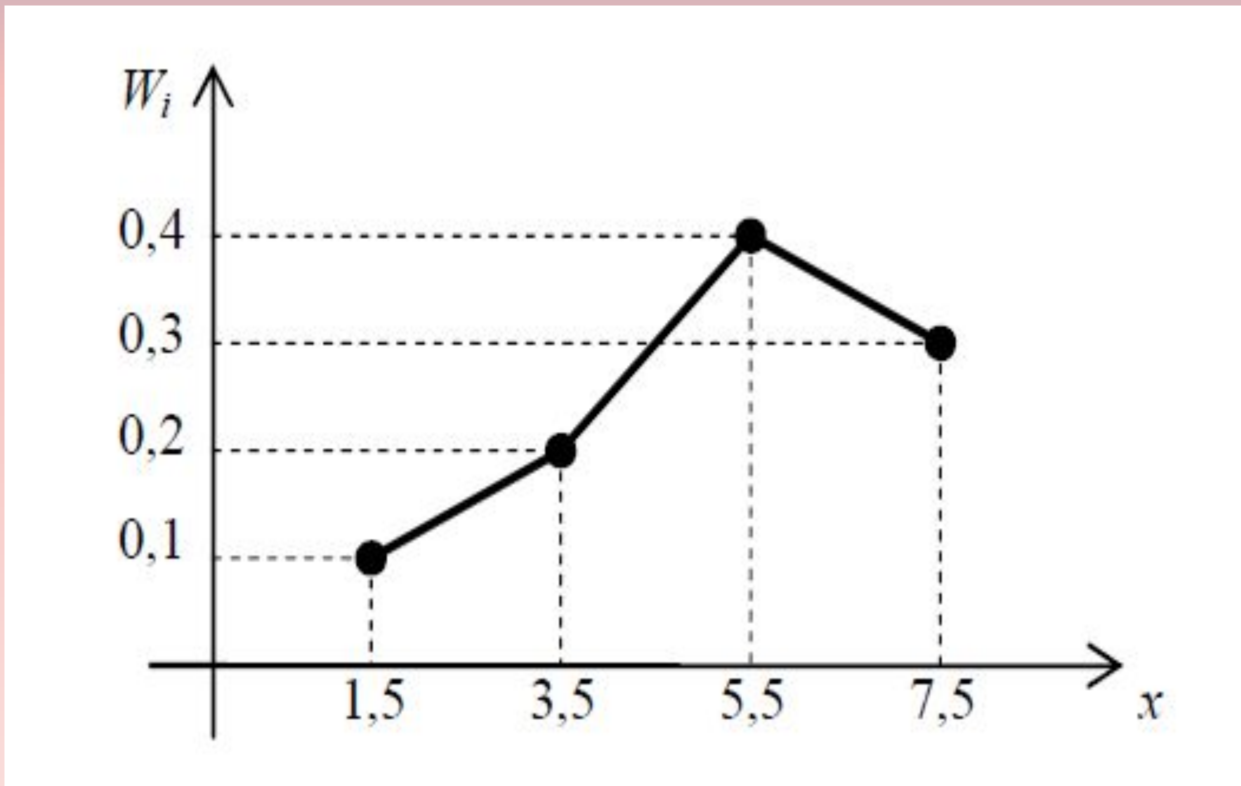


Полигон абсолютных частот – это ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i).

Полигон относительных частот

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
W_i	0,1	0,2	0,4	0,3

$W_i = \frac{n_i}{n}$ – относительные частоты.



Полигон относительных частот – это ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, W_i).

Интервальный характер статистического распределения

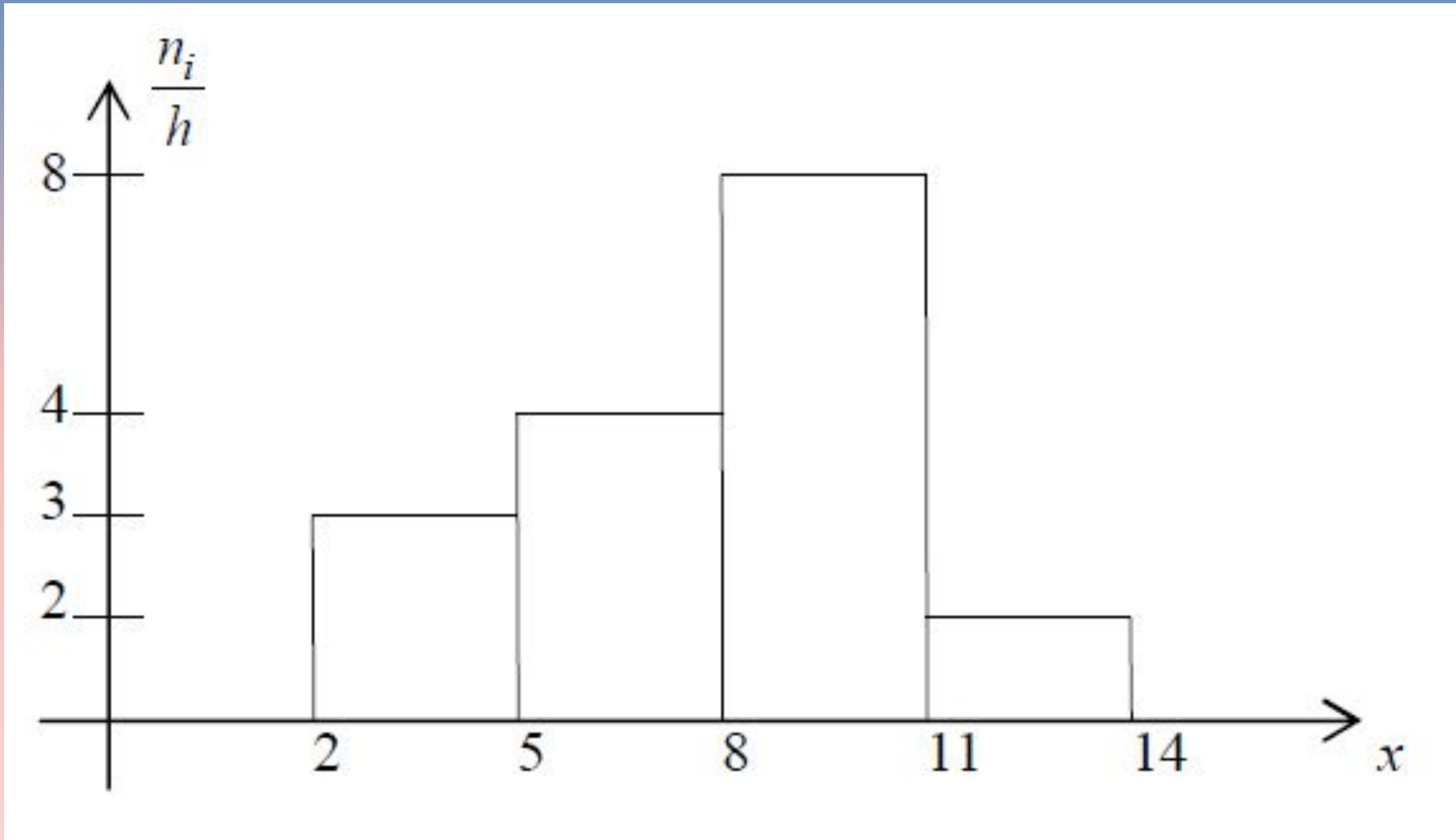
x	$2-5$	$5-8$	$8-11$	$11-14$
n_i	9	12	24	6

h – длина частичного интревала.

$h = 5-2 = 8-5 = 11-8 = 14-11 = 3.$

Гистограмма частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною *h*, а высоты равны отношению *ni/h* (плотность частоты)

Интервальный характер статистического распределения



Задача

В результате испытаний случайная величина Х приняла следующие значения:

Х1= 2	**Х13=7**	**Х25=6**
Х2=5	**Х14=6**	
Х3=7	**Х15=8**	
Х4=1	**Х16=3**	
Х5=10	**Х17=8**	
Х6=5	**Х18=10**	
Х7= 9	**Х19=6**	
Х8=6	**Х20=7**	
Х9=8	**Х21=3**	
Х10=6	**Х22=9**	
Х11=2	**Х23=4**	
Х12=3	**Х24=5**	

Требуется:

1. **Составить таблицу, устанавливающую зависимость между значениями случайной величины и ее частотами.**
2. **Построить статистическое распределение.**
3. **Изобразить полигон распределения.**

Задача

В результате испытаний случайная величина X приняла следующие значения:

X1=16 X13=20 X25=1
X2=17 X14=18
X3=9 X15=11
X4=13 X16=4
X5=21 X17=6
X6=11 X18=22
X7=7 X19=21
X8=7 X20=15
X9=19 X21=15
X10=5 X22=23
X11=17 X23=19
X12=5 X24=25

Требуется:

1. **Составить таблицу, статистического распределения, разбив промежуток (0, 25) на пять участков, имеющих одинаковые длины.**
2. **Построить гистограмму одинаковых частот.**

Точечные оценки параметров генеральной совокупности для дискретного распределения

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом.

Параметры генеральной совокупности $\bar{x}_Г$ – генеральная средняя и $D_Г$ – генеральная дисперсия оцениваются по соответствуюшим параметрам выборки:

$$\bar{x}_Г \approx \bar{x}_В, \quad D_Г \approx D_В \ (n \geq 30), \quad \sigma_Г \approx \sqrt{D_Г}.$$

$$D_Г \approx S^2 \ (n < 30),$$

$\bar{x}_В$ – выборочная средняя;

$D_В$ – выборочная дисперсия;

$\sigma_В$ – выборочное среднее квадратичное отклонение;

S^2 – исправленная дисперсия.

Задача

Найти основные характеристики представленной выборки

x_i	2	4	5	6
n_i	8	9	10	3

Решение:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{2\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 3}{30} = \frac{120}{30} = 4.$$

$$D_B = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{n} = \frac{(2-4)^2\cdot 8 + (4-4)^2\cdot 9 + (5-4)^2\cdot 10 + (6-4)^2\cdot 3}{30} = 1{,}8$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}3;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{30}{29}\cdot 1{,}8 \approx 1{,}86.$$

Точечные оценки параметров генеральной совокупности для интервального распределения

Пример.

x	$2-5$	$5-8$	$8-11$	$11-14$
n_i	9	10	25	6

Переходим к дискретному распределению:

x_i	3,5	6,5	9,5	12,5
n_i	9	10	25	6

Дальнейшие вычисления производим как в предыдущем примере.

$\overline{x}_B = 3{,}91;\ \ \overline{x_B^2} = 74{,}53;\ \ D_B \approx 59{,}24;\ \ S^2 \approx 60{,}45.$

Таким образом: $\overline{x}_Г \approx 3{,}91;\ \ D_Г \approx S^2 \approx 60{,}45;\ \ \sigma_Г = \sqrt{D_Г} \approx 7{,}77.$

Интервальные оценки параметров генеральной совокупности

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), содержащий истинное значение θ с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$, т.е.

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha.$$

Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется **доверительной вероятностью** (**надежностью**), а значение α – уровнем значимости.

Конец лекции