Логические основы компьютеров

Логические выражения и операции

Булева алгебра

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).

Почему "логика"?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Логические высказывания

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Жирафы летят на север.
- История – интересный предмет.
- У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь.
B – Форточка открыта.

простые высказывания (элементарные)

! **Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) "**и**", "**или**", "**не**", "**если … то**", "**тогда и только тогда**" и др.

A и B	Сейчас идет дождь и открыта форточка.
A или не B	Сейчас идет дождь или форточка закрыта.
если A, то B	Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.
не A и B	Сейчас нет дождя и форточка открыта.
A тогда и только тогда, когда B	Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то "**не A**" ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также: $\overline{\mathbf{A}}$,
not A (Паскаль),
! A (Си)

таблица истинности операции НЕ

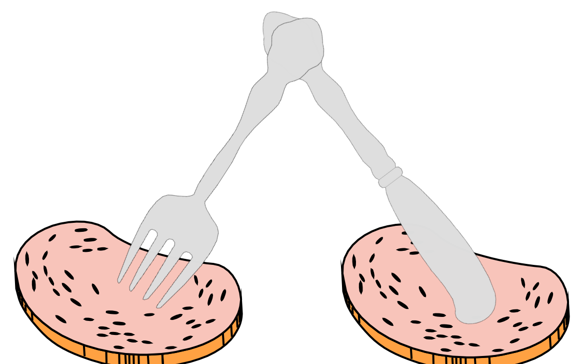
Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

Высказывание "**А и В**" истинно тогда и только тогда, когда **А** и **В** истинны одновременно.

также: **A·B**, **A ∧ B**,
A and B (Паскаль),
A && B (Си)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1



A ∧ B

конъюнкция – от лат. ***conjunctio*** — **соединение**

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание "**А или В**" истинно тогда, когда истинно **А** или **В**, или оба вместе.

также: **A+B**, **A ∨ B**, **A or B** (Паскаль), **A || B** (Си)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

Операция "исключающее ИЛИ"

Высказывание "**A ⊕ B**" истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, но ***не оба одновременно***.

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
A xor B (Паскаль),
A ^ B (Си)

арифметическое сложение, 1+1=2

остаток

сложение по модулю 2: A ⊕ B = (A + B) **mod** 2

Свойства операции "исключающее ИЛИ"

$A \oplus 0 =$ A

$A \oplus A =$ 0

$A \oplus 1 =$ $\bar{A}$

$(A \oplus B) \oplus B =$?

$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

A	B	$A\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B} + \overline{A}B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Импликация ("если …, то …")

Высказывание "**A** → **B**" истинно, если не исключено, что из **A** следует **B**.

A – "Работник хорошо работает".

B – "У работника хорошая зарплата".

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

Эквиваленция ("тогда и только тогда, …")

Высказывание "**A ↔ B**" истинно тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И, ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И **ИЛИ** **НЕ**

базовый набор операций

Сколько всего существует логических операции с двумя переменными?

Логические формулы

Система имеет три датчика и может работать, если два из них исправны.

A – "Датчик № 1 неисправен".

B – "Датчик № 2 неисправен".

C – "Датчик № 3 неисправен".

Аварийный сигнал:

X – "Неисправны два датчика".

X – "Неисправны датчики № 1 **и** № 2" **или**
"Неисправны датчики № 1 **и** № 3" **или**
"Неисправны датчики № 2 **и** № 3".

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая формула

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + \overline{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\overline{A} \cdot B$	$\overline{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

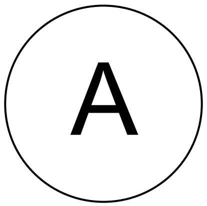
$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	AB	AC	BC	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

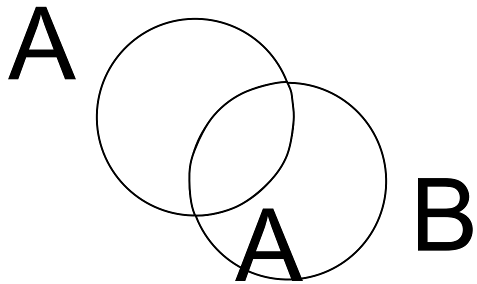
Логические основы компьютеров

Диаграммы

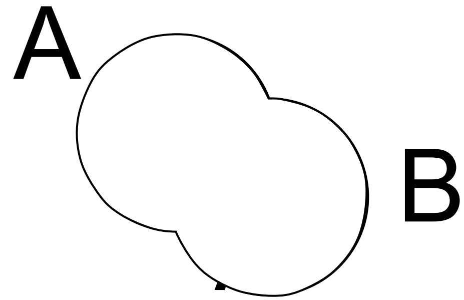
Диаграммы Вена (круги Эйлера)



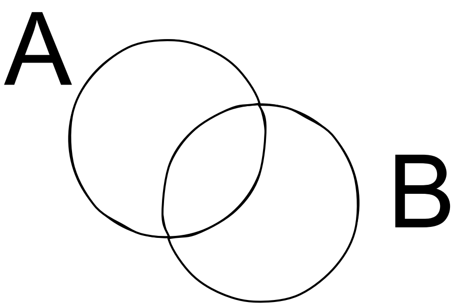
$\overline{A}$



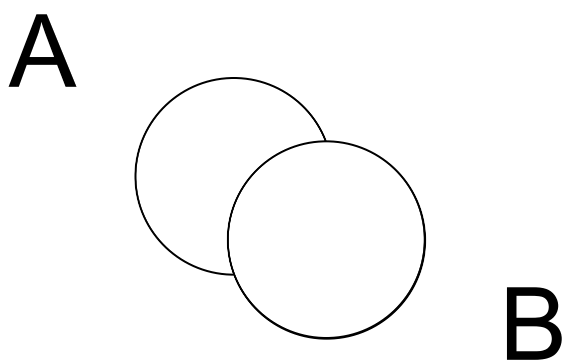
$A \cdot B$



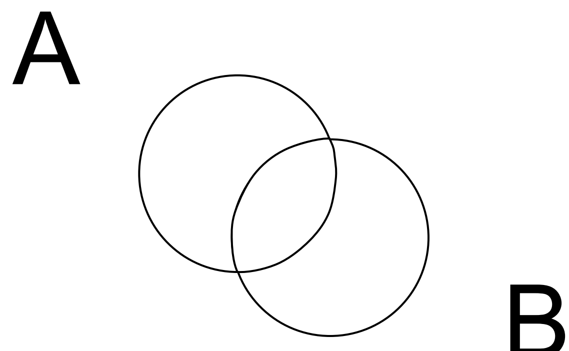
$A + B$



$A \oplus B$

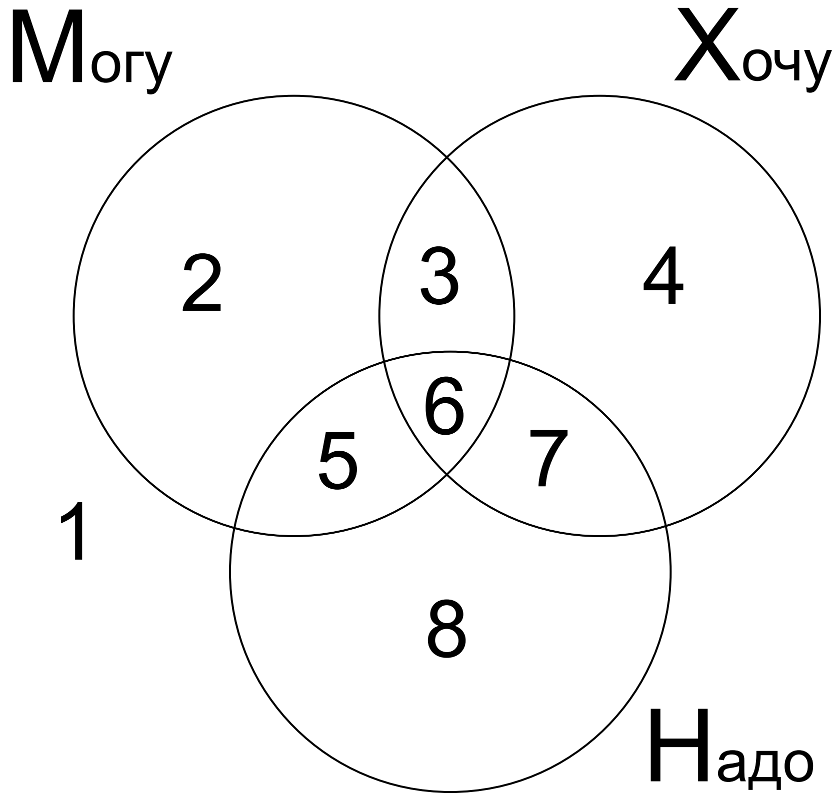


$A \rightarrow B$



$A \leftrightarrow B$

Диаграмма МХН (Е.М. Федосеев)



$$1 = \overline{M} \cdot \overline{X} \cdot \overline{H} \qquad 5 = M \cdot \overline{X} \cdot H$$

$$2 = M \cdot \overline{X} \cdot \overline{H} \qquad 6 = M \cdot X \cdot H$$

$$3 = M \cdot X \cdot \overline{H} \qquad 7 = \overline{M} \cdot X \cdot H$$

$$4 = \overline{M} \cdot X \cdot \overline{H} \qquad 8 = \overline{M} \cdot \overline{X} \cdot H$$

$$3 + 4 = M \cdot X \cdot \overline{H} + \overline{M} \cdot X \cdot \overline{H} \qquad 3 + 4 = X \cdot \overline{H}$$

Логические формулы можно упрощать!

Логические основы компьютеров

Преобразование логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, \quad A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, \quad A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
правила де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \rightarrow \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \overline{H} + \overline{M} \cdot X \cdot \overline{H} = (M + \overline{M}) \cdot X \cdot \overline{H} = X \cdot \overline{H}$$

$$X = (B \to A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \to C)$$

раскрыли →

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\overline{A} + C)$$

формула де Моргана

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

распределительный

$$= (\overline{B} \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

повторения

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot (\overline{A} + C)$$

поглощения

$$= \overline{B} \cdot \overline{A}$$

Логические уравнения

$$\overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C = 1$$

A=1, B=0, C=1

$$\overline{A}\cdot B = 1$$ **или** $$A\cdot\overline{B}\cdot C = 1$$

A=0, B=1, C – **любое**
2 решения: (0, 1, 0), (0, 1, 1)

Всего 3 решения!

$$K\cdot L + M\cdot L\cdot N + K\cdot L\cdot\overline{M} = 1$$

K=1, L=1,
M и N – **любые**
4 решения

M=1, L=1, N=1,
K – **любое**
2 решения

K=1, L=1, M=0,
N – **любое**
2 решения

$$L\cdot(K + M\cdot N) = 1$$

Всего 5 решений!

Логические основы компьютеров

Синтез логических выражений

Синтез логических выражений

A	B	X
0	0	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	1	$\overline{A}\cdot B$
1	0	0
1	1	$A\cdot B$

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 1**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат.

распределительный

$$X = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B + A\cdot B = \overline{A}\cdot(\overline{B} + B) + A\cdot B$$

$$= \overline{A} + A\cdot B = (\overline{A} + A)\cdot(\overline{A} + B) = \overline{A} + B$$

исключения третьего

распределительный

исключения третьего

Синтез логических выражений (2 способ)

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	A0 $\overline{B}$
1	1	1

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 0**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат, который равен $\overline{X}$.

Шаг 4. Сделать инверсию.

$$\overline{X} = A \cdot \overline{B} \;\Rightarrow\; X = \overline{A \cdot \overline{B}} = \overline{A} + B$$

Когда удобнее применять 2-ой способ?

Синтез логических выражений

A	B	C	X
0	0	0	1 $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	1 $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0	1	0	1 $\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	1 $\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	0
1	0	1	1 $A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	0
1	1	1	1 $A\cdot B\cdot C$

$$X=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$$

$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C$$

$$+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot C$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(\overline{C}+C)$$

$$+\overline{A}\cdot B\cdot(\overline{C}+C)$$

$$+A\cdot C\cdot(\overline{B}+B)$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot C$$

$$=\overline{A}\cdot(\overline{B}+B)+A\cdot C$$

$$=\overline{A}+A\cdot C$$

$$=(\overline{A}+A)\cdot(\overline{A}+C)=\boxed{\overline{A}+C}$$

Синтез логических выражений (2 способ)

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0 $A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$
1	0	1	1
1	1	0	0 $A\cdot B\cdot\bar{C}$
1	1	1	1

$$\bar{X} = A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot\bar{C}$$

$$= A\cdot\bar{C}\cdot(\bar{B} + B)$$

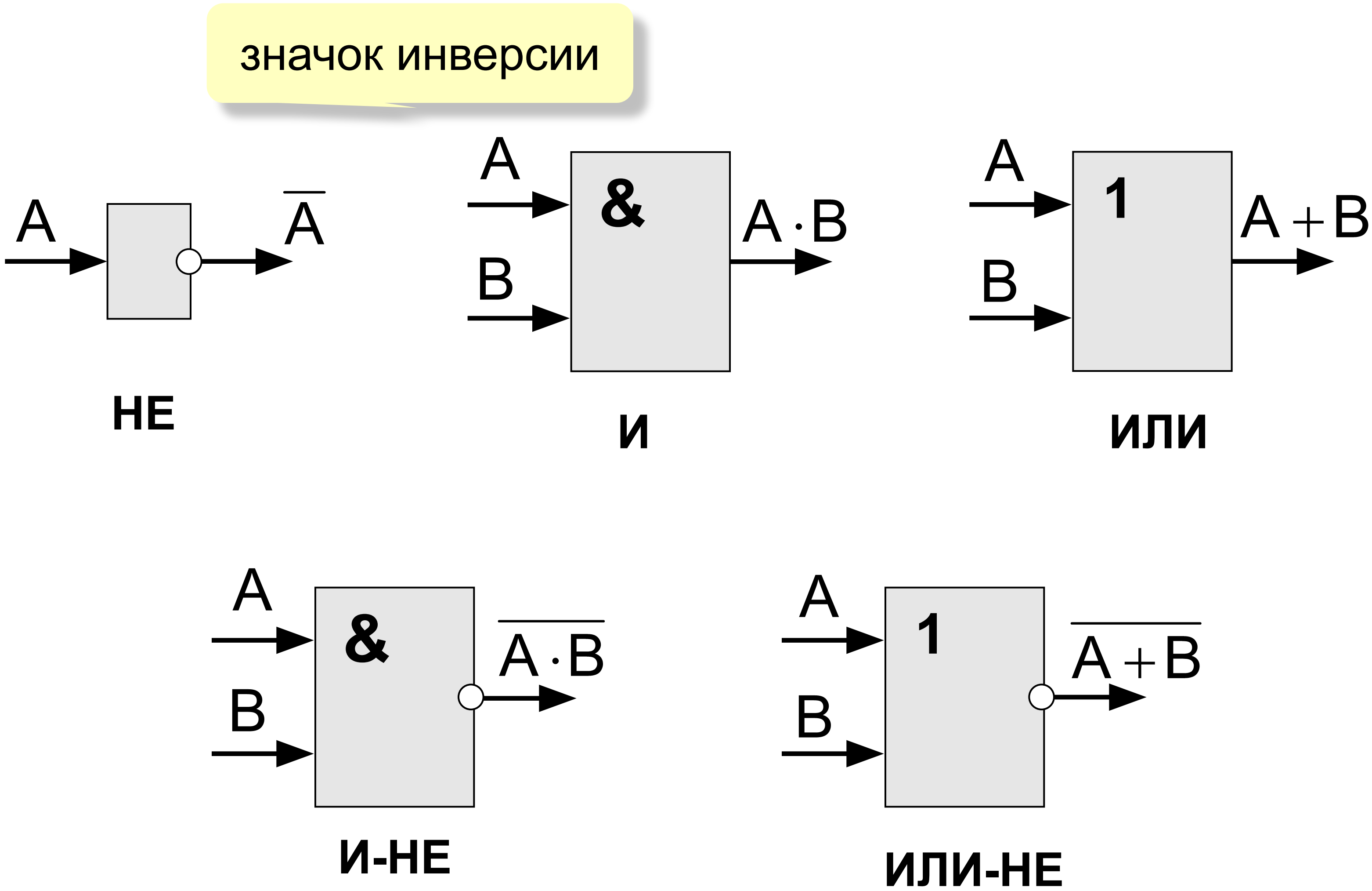
$$= A\cdot\bar{C}$$

$$X = \overline{A\cdot\bar{C}} = \boxed{\bar{A} + C}$$

Логические основы компьютеров

Логические элементы компьютера

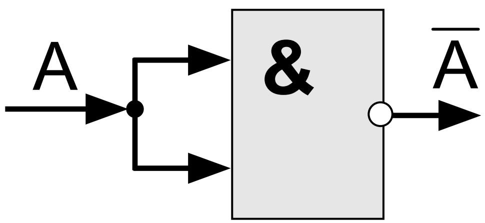
Логические элементы компьютера



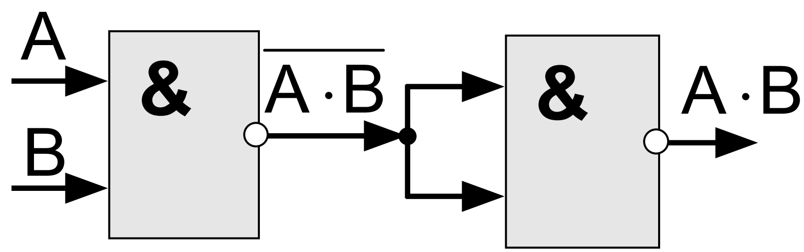
Логические элементы компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ.**

НЕ: $\overline{A} = \overline{A} + \overline{A} = \overline{A \cdot A}$

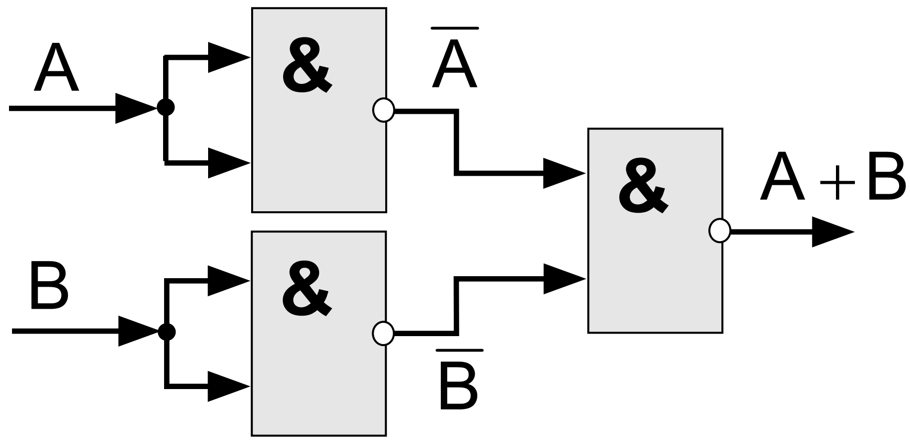


И: $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



ИЛИ:

$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$

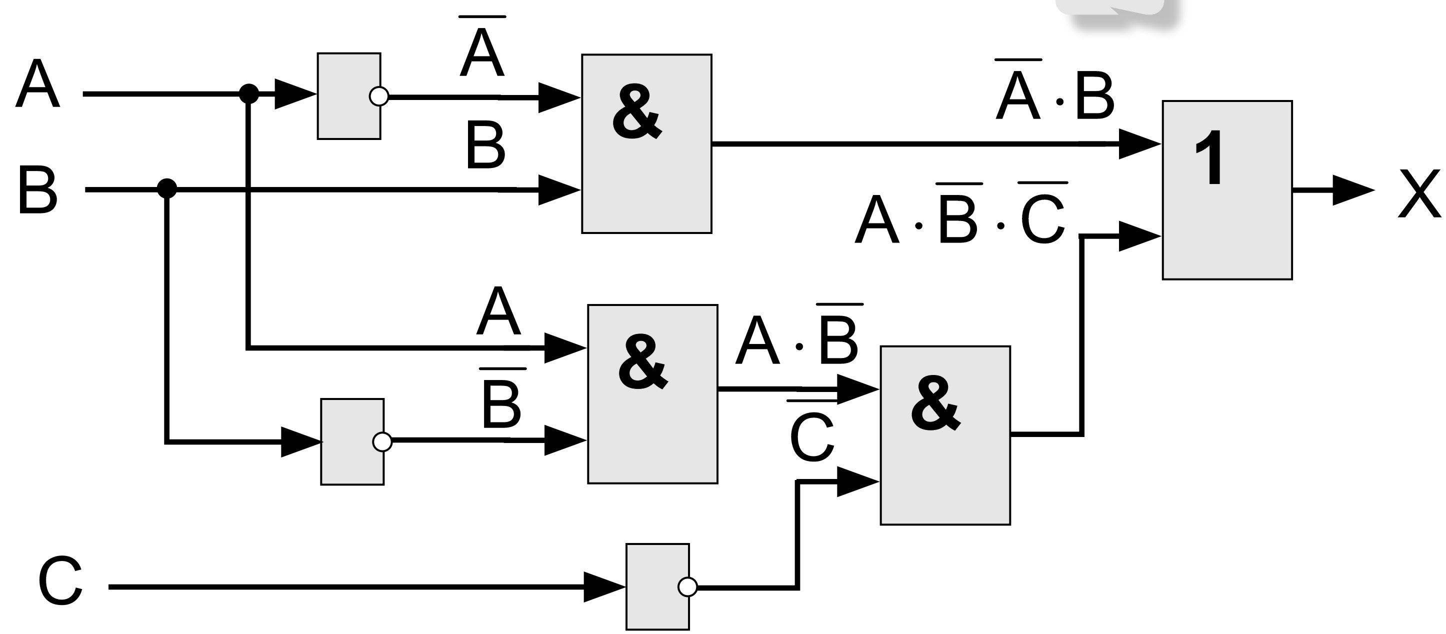


Составление схем

последняя операция - ИЛИ

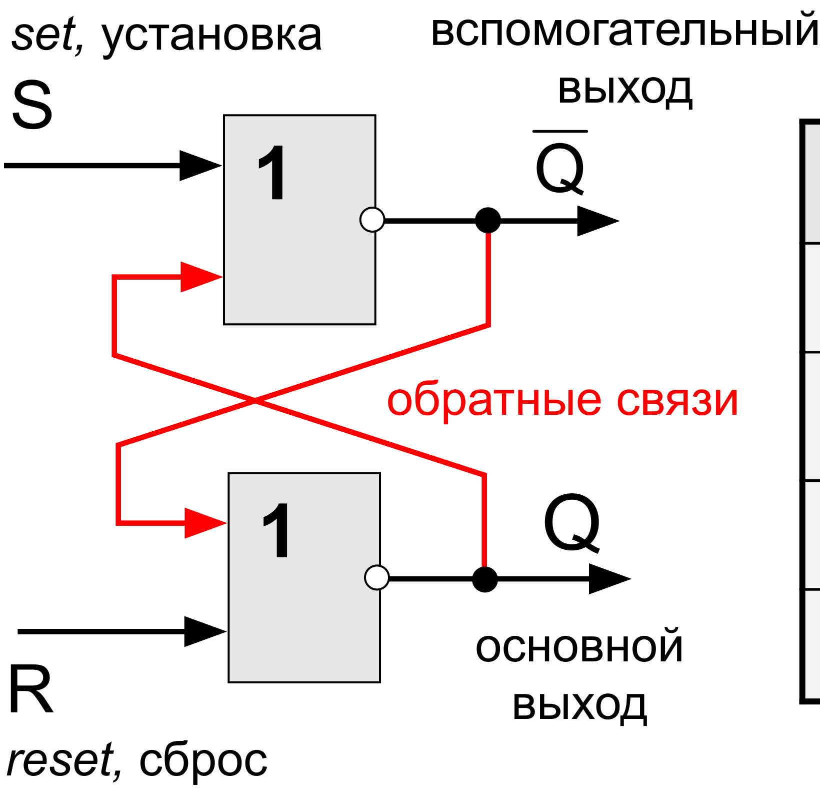
$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

И



Триггер (англ. *trigger* – защёлка)

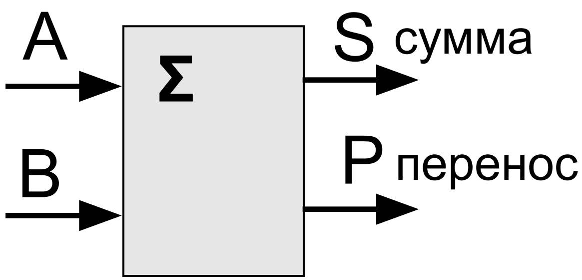
Триггер – это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах **ИЛИ-НЕ** или на 2-х элементах **И-НЕ.**



S	R	Q	$\overline{Q}$	режим
0	0	Q	$\overline{Q}$	хранение
0	1	0	1	сброс
1	0	1	0	установка 1
1	1	1	1	запрещен

Полусумматор

Полусумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.



$$P = A \cdot B$$

$$S = A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1
0	1	1	0

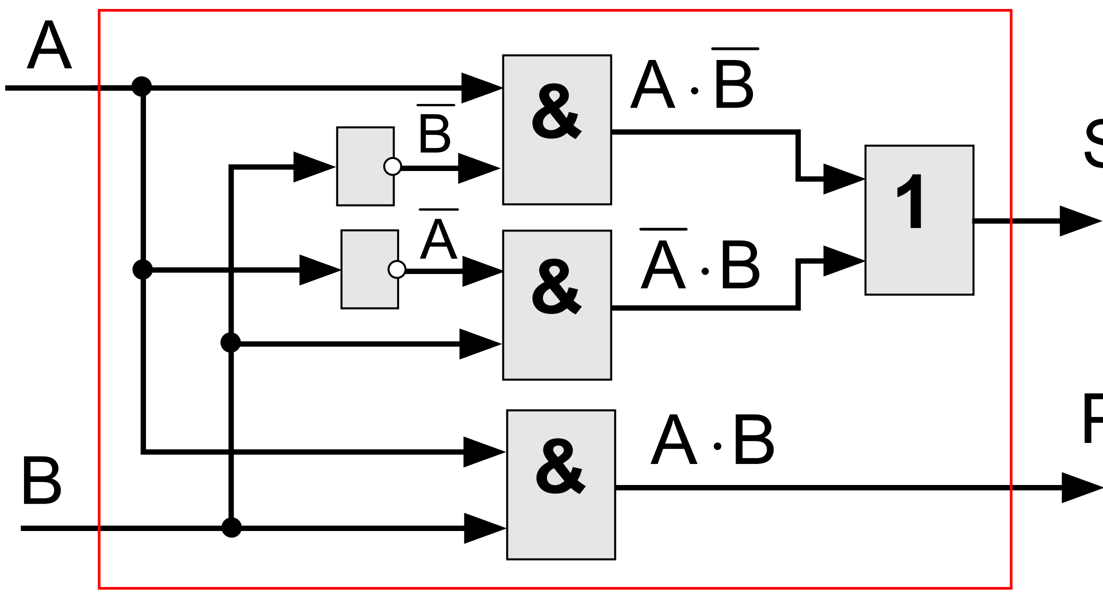
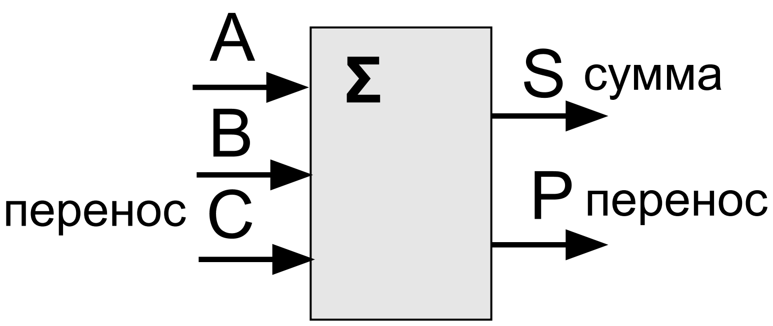


Схема на 4-х элементах?

Сумматор

Сумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.



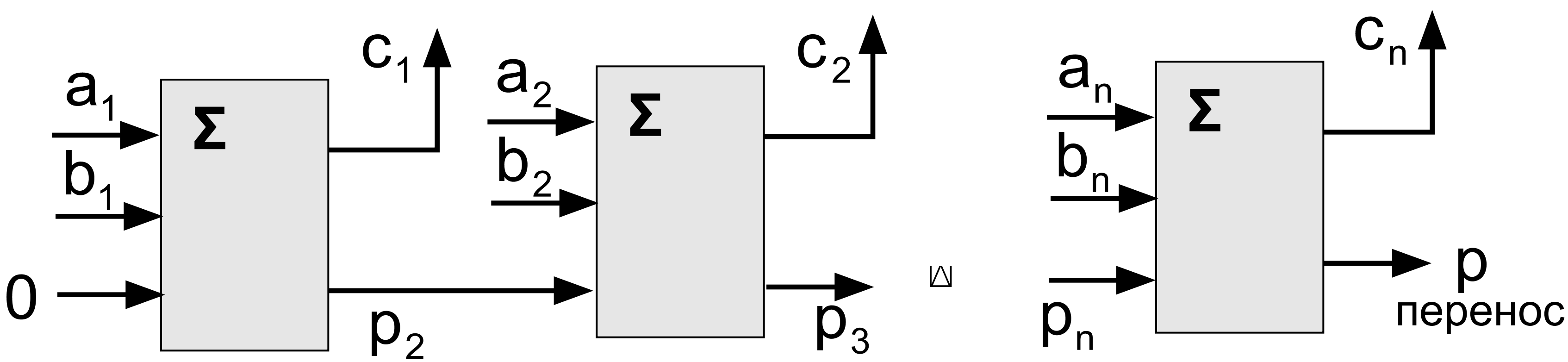
A	B	C	P	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Многоразрядный сумматор

это логическая схема, способная складывать два n-разрядных двоичных числа.

$$\begin{array}{rl} & A = a_n\ a_{n-1}\ \dots\ a_1 \\ + & B = b_n\ b_{n-1}\ \dots\ b_1 \\ \hline & C = \boxed{p}\ c_n\ c_{n-1}\ \dots\ c_1 \end{array}$$

перенос



Логические основы компьютеров

Логические задачи

Метод рассуждений

Задача 1. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты договора, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: "Чей именно проект был принят?", министры дали такие ответы:

Россия — "Проект не наш (1), проект не США (2)";
США — "Проект не России (1), проект Китая (2)";
Китай — "Проект не наш (1), проект России (2)".

Один из них оба раза говорил правду; второй – оба раза говорил неправду, третий один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Кто что сказал?

проект США (?)

	(1)	(2)
Россия	+	–
США	+	–
Китай		

проект Китая (?)

	(1)	(2)
Россия	+	+
США	+	+
Китай		

проект России (?)

	(1)	(2)
Россия	–	+
США	–	–
Китай	+	+

Табличный метод

Задача 2. Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что

- Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

- Много вариантов.
- Есть точные данные.

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	1	0	Даша	1	0	0
1	0	0	Анфиса	0	1	0
0	0	1	Лариса	0	0	1

В каждой строке и в каждом столбце может быть только одна единица!

Задача Эйнштейна

Условие: Есть 5 домов разного цвета, стоящие в ряд. В каждом доме живет по одному человеку отличной от другого национальности. Каждый жилец пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит животное. Никто из пяти человек не пьет одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Известно, что:

1. Англичанин живет в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьет чай.
4. Зеленой дом стоит слева от белого.
5. Жилец зеленого дома пьет кофе.
6. Человек, который курит *Pallmall*, держит птицу.
7. Жилец среднего дома пьет молоко.
8. Жилец из желтого дома курит *Dunhill*.
9. Норвежец живет в первом доме.
10. Курильщик *Marlboro* живет около того, кто держит кошку.
11. Человек, который содержит лошадь, живет около того, кто курит *Dunhill*.
12. Курильщик *Winfield* пьет пиво.
13. Норвежец живет около голубого дома.
14. Немец курит *Rothmans*.
15. Курильщик *Marlboro* живет по соседству с человеком, который пьет воду.

Вопрос: У кого живет рыба?

Использование алгебры логики

Задача 3. Следующие два высказывания истинны:

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет.
2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе.

Определить, какие корабли вышли в море.

Решение:

… если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет. $A \to \overline{C} = 1$

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет. $A \to \overline{C} = 0$ $\boxed{\overline{A \to \overline{C}} = 1}$

2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе. $\boxed{B \oplus C = 1}$

$$\left(\overline{A \to \overline{C}}\right) \cdot (B \oplus C) = 1 \qquad \left(\overline{\overline{A} + \overline{C}}\right) \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$$\boxed{A = 1, \ \ B = 0, \ \ C = 1}$$

Использование алгебры логики

Задача 4. Когда сломался компьютер, его хозяин сказал «Память не могла выйти из строя». Его сын предположил, что сгорел процессор, а винчестер исправен. Мастер по ремонту сказал, что с процессором все в порядке, а память неисправна. В результате оказалось, что двое из них сказали все верно, а третий – все неверно. Что же сломалось?

Решение:

A – неисправен процессор, **B –** память, **C –** винчестер

хозяин: $B = 0,\ \overline{B} = 1$ сын: $A \cdot \overline{C} = 1$ мастер: $\overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся хозяин: $X_1 = \overline{\overline{B}} \cdot A \cdot \cancel{\overline{C} \cdot} \overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся сын: $X_2 = \overline{B} \cdot \overline{A \cdot \overline{C}} \cancel{\cdot} \overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся мастер: $X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = 1$

$$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot (A + \overline{B}) = 1$$

$$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} = 1$$

$A = 1$

$B = 0$

$C = 0$

В общем случае: $X_1 + X_2 + X_3 = 1$

! **Несколько решений!**