Математический анализ

Поток ММ

лектор

Профессор, доктор физико-математических наук,

Заслуженный деятель науки РФ

Треногин Владилен Александрович

ПРОГРАММА
ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

- Раздел 1. Введение в анализ.
- Раздел 2. Предел функции. Непрерывность функций одной переменной.
- Раздел 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
- Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа.– М.: Физматлит, 2003.
- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. – Т. 1.
- Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1981. – Т. 1.
- Сборник задач по математике для втузов. Под редакцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа.
- Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике.

Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.

Лекция 1.1.

- Предмет математического анализа, его роль в изучении и создании математических моделей.
- Математическая символика.
- Числовые множества.
- Ограниченные и неограниченные множества. Точные грани числового множества. Теорема существования точной грани ограниченного множества.
- Числовые функции

Предмет математического анализа.

- Математический анализ – обширный раздел математики, в котором функции и их обобщения изучаются методом пределов. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что математический анализ изучает функции и их обобщения методом бесконечно малых.
- В природе и технике всюду встречаются движения, процессы, которые описываются функциями; законы явлений природы также обычно описываются функциями. Отсюда объективная важность математического анализа как средства изучения функций.
- Основы математического анализа включают в себя теорию действительного числа, теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление и их приложения, теорию рядов.

Историческая справка

Начиная с трудов математиков Древней Греции и вплоть до 17 века математический анализ представлял собой совокупность решений разрозненных частных задач; например, в интегральном исчислении проводилось вычисление площадей различных фигур и объемов тел с кривыми границами, вычисление работы переменной силы и т. д. Каждая такая задача решалась сложным и громоздким методом исчерпывания. Математический анализ как единое и систематическое целое сложился в трудах И.Ньютона (I.Newton), Г.Лейбница (G.Leibniz), Л.Эйлера (L.Euler), Ж. Лагранжа (J.Lagrange) и других ученых 17-18 века, а его современная база – теория пределов – была разработана О. Коши (A.Cauchy) лишь в начале 19 века.

Ньютон (Newton) Исаак

(1643 – 1727)

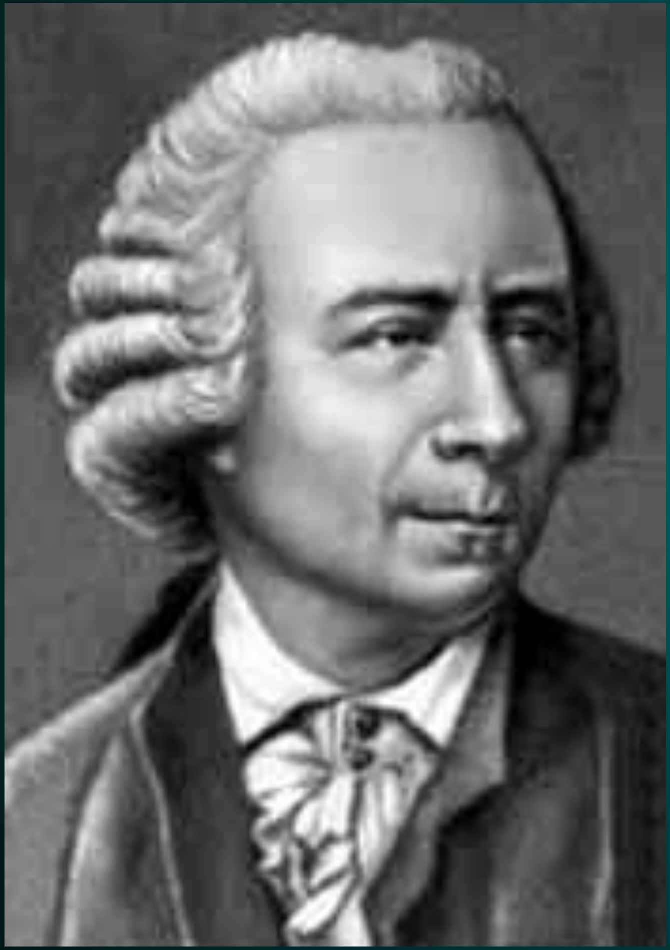
- Великий английский математик, механик, астроном и физик, президент Лондонского королевского общества с 1703 г.
- Разработал (независимо от Г. Лейбница) дифференциальное и интегральное исчисления.

Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм

(1646-1716)

- Выдающийся немецкий математик, физик, языковед и философ-идеалист . Основатель и президент Берлинского научного общества.
- По просьбе Петра I разработал проекты развития образования и государственного управления в России.
- Создатель теории нестандартного дифференциального и интегрального исчисления.

Эйлер (Euler) Леонард
(1707 - 1783)



- Великий швейцарский, российский и немецкий математик, механик, физик и астроном. Не найдя в Швейцарии условий для научной деятельности, переехал в 1727 году в Россию. С 1766 академик Петербургской АН. В период политической неустойчивости России, когда наукой пренебрегали перешел на работу в Германию. Вернулся в Россию по приглашению Екатерины Второй.
- Автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике и гидромеханике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др., оказавших решающее влияние на развитие всех этих и многих других областей науки.

Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736-1813)

- Выдающийся французский математик и механик, президент Берлинской АН, иностранный почетный член Петербургской АН.
- Основополагающие труды по математическому анализу, теории чисел, алгебре,

  дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению, .

Коши (Cauchy) Огюстен Луи

– 1857)

- **Выдающийся французский математик, иностранный почетный член Петербургской АН (1831).**
- **Разработал базу математического анализа – теорию пределов.**
- **Один из создателей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного.**

Символы математической логики

СИМВОЛ	НАЗВАНИЕ	ПОЯСНЕНИЕ
$\forall$	Знак общности	Заменяет слова: «для любого», «для каждого», «для всех».
$\exists$	Знак существования	Заменяет слова: «существует», «найдется».
$\Rightarrow$	Знак следования	Запись $A \Rightarrow B$ означает, что из утверждения А следует утверждение В *(В является следствием А)*.
$\Leftrightarrow$	Знак эквивалентности	Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения *А и В* равносильны. *А* необходимо и достаточно для *В*; *А* верно тогда и только тогда, когда верно *В*.
:		Заменяет слова: «такой, что».
$\longrightarrow$		Заменяет слова: «выполняется», «имеет место».

Множества. Операции над множествами.

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ	КАК ЭТО ЧИТАЕТСЯ
$a \in A$	*a* является элементом множества *A*.
$A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	Множество *A* состоит из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$
$A=B$	Множества *A* и *B* совпадают.
$A \subset B$	Множество *A* является подмножеством *B*.
$A \cap B$	Пересечение множеств *A* и *B*.
$A \cup B$	Объединение множеств *A* и *B*.

Числовые множества.

Напомним обозначения некоторых известных числовых множеств:

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел,

$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – множество целых чисел,

$\boldsymbol{Q} = \{p/q,\ p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}\}$ – множество рациональных чисел,
(состоит из бесконечных периодических десятичных дробей)

$\boldsymbol{J}$ – множество иррациональных чисел (состоит из бесконечных непериодических десятичных дробей),

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{J}$ – множество действительных (вещественных) чисел.

Промежутки на числовой оси

Отрезок $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$

Интервал $(a, b) = \{x : a < x < b\}$

Полуинтервалы

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$

Бесконечные полуинтервалы (полуоси)

$[a, +\infty) = \{x : x \ge a\}$, $(-\infty, b] = \{x : x \le b\}$

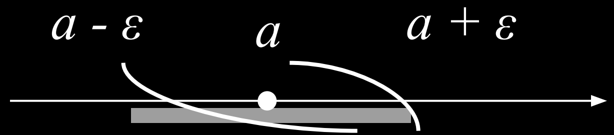
Бесконечные интервалы (открытые полуоси)

$(a, +\infty) = \{x : x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$

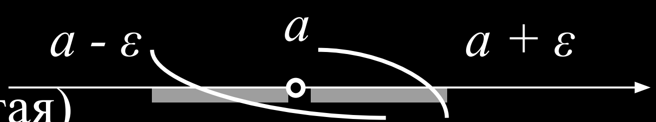
Окрестности точек на числовой прямой

Пусть ε > 0 – произвольное действительное число.
Введем следующие обозначения:

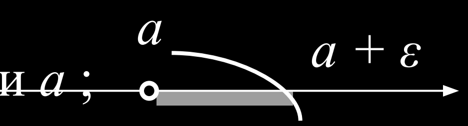
- ε-окрестность точки *a* ;



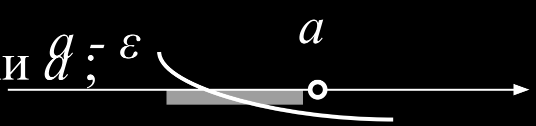
- проколотая (выколотая) ε-окрестность точки *a* ;



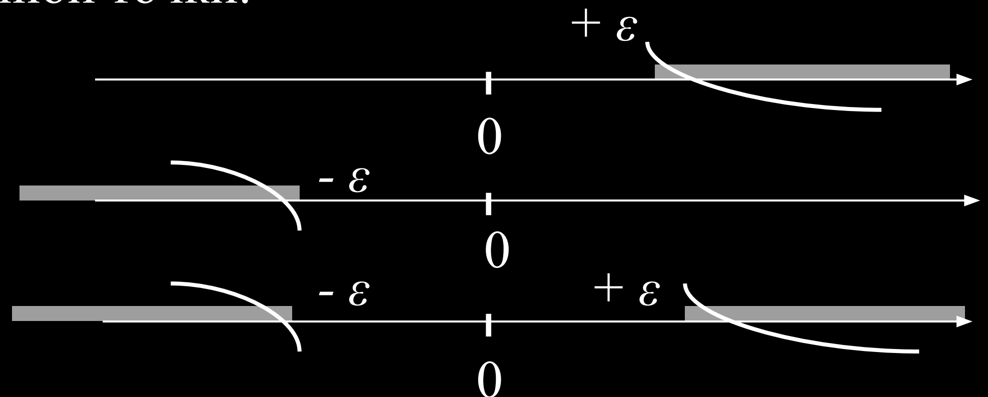
- правая ε-полуокрестность точки *a* ;



- левая ε-полуокрестность точки *a* ;



ε-окрестности бесконечно удаленной точки.



Некоторые свойства модуля вещественного числа.

Для любого вещественного числа a число

называется абсолютной величиной числа a или модулем.

Неравенство $|a| \leq \delta$ эквивалентно неравенствам $-\delta \leq a \leq \delta$.

Неравенство $|a| > \delta$ эквивалентно совокупности неравенств

Перечислим без доказательства основные свойства модуля:

$$|-a| = |a|;$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|;$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Ограниченные и неограниченные множества

Множество $X \subset R$ называется ***ограниченным снизу***, если существует число $C_1 \in R$ такое, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $C_1 \leq x$. Число C_1 называется ***нижней гранью*** множества X.

Множество $X \subset R$ называется ***ограниченным сверху***, если существует число $C_2 \in R$, такое что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq C_2$. Число C_2 называется ***верхней гранью*** множества X.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ***ограниченным*** множеством.

Последнее определение эквивалентно следующему:

Множество $X \subset R$ ограничено $\Leftrightarrow \exists\, C > 0 : \forall x \in X \rightarrow |x| \leq C$.

Определение неограниченного множества можно сформулировать как отрицание последнего:

Множество $X \subset R$ неограничено, если $\forall\, C > 0\ \exists x \in X$: $|x| > C$.

Определение точной верхней и нижней грани

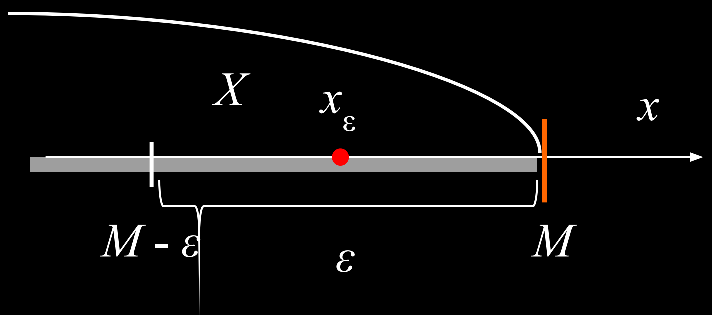
Наименьшая из верхних граней множества $X \subset R$ называется его ***точной верхней гранью*** и обозначается через $\sup X$ или (читается «**супремум**»).

Определение 1. Число $M = \sup X$, если:

1) $\forall x \in X \rightarrow x \leq M$; (т.е. M – верхняя грань X)

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon \in X: \ M - \varepsilon < x_\varepsilon < M$.

(т.е. M – наименьшая их верхних граней X)



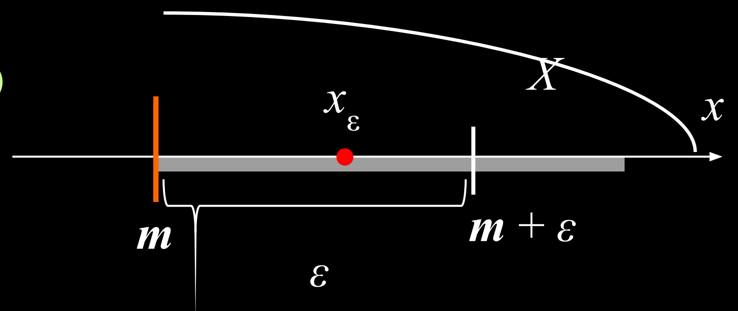
Наибольшая из нижних граней множества $X \subset R$ называется его ***точной нижней гранью*** и обозначается через $\inf X$ или (читается «**инфимум**»).

Определение 2. Число $m = \inf X$, если:

1) $\forall x \in X \rightarrow x \geq m$; (т.е. m – нижняя грань X)

2) $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon \in X: \ m < x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

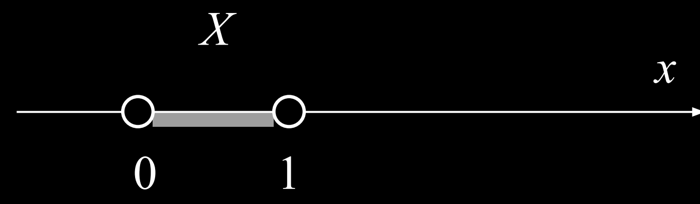
(т.е. m – наибольшая их нижних граней X)



ПРИМЕРЫ.

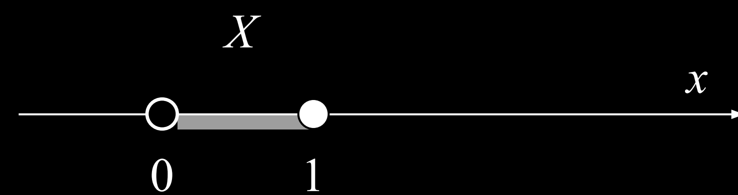
1) $X = (0,\ 1)$

$\sup X = 1 \notin X$, $\inf X = 0 \notin X$;



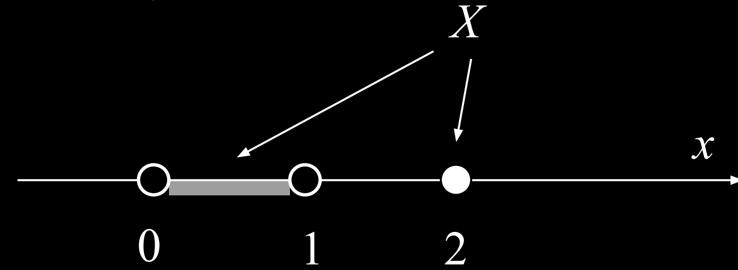
2) $X = (0,\ 1]$

$\sup X = 1 \in X$, $\inf X = 0 \notin X$;



3) $X = (0,\ 1) \cup \{2\}$

$\sup X = 2 \in X$.



АКСИОМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ.

К известным из школы свойствам вещественных чисел добавим следующее: У всякого непустого, ограниченного сверху множества существует его точная верхняя грань.

Отсюда имеем: У всякого непустого, ограниченного снизу множества существует его точная нижняя грань.

Числовые функции

Понятие числовой функции действительной переменной

Если каждому $x \in X \subset \mathbf{R}$ поставлено в соответствие по некоторому правилу единственное $y \in Y \subset R$, то говорят, что на множестве X определена ***числовая функция*** действительной переменной x.

Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например f, и пишут

$$y = f(x),\ x \in X.$$

Множество X называют *областью определения функции* и обозначают $D(f)$.
Множество Y называют *множеством значений функции* и обозначают $E(f)$.

Для обозначения функции используют также запись вида

$$f\colon X \to Y.$$

График функции

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in X$ в прямоугольной системе координат называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.

ПРИМЕР

$y = \mathrm{sign}x =$

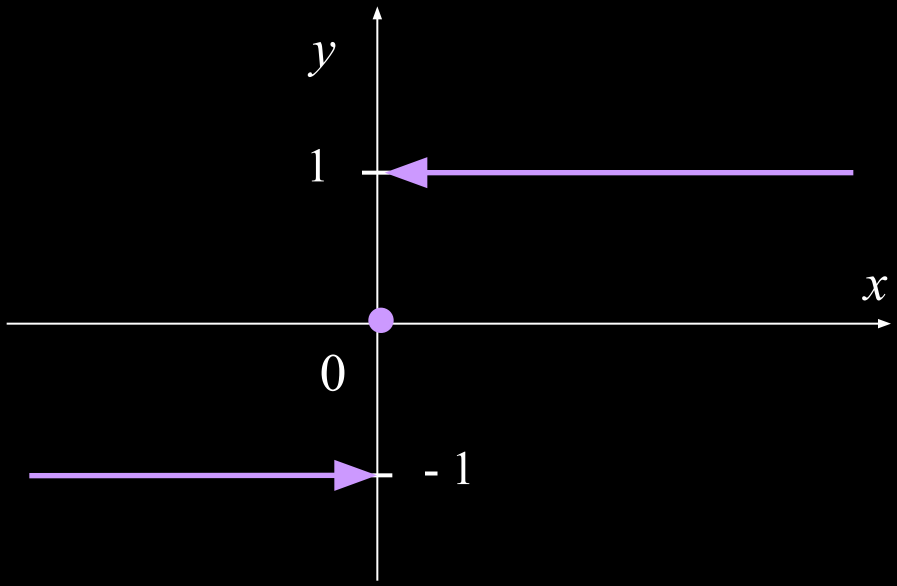


График функции иногда можно получить преобразованием известного графика другой функции $f(x)$, как показано в таблице:

Функция	**Преобразование графика функции** **$y = f(x)$**
$y = f(x) + C$	Сдвиг вдоль оси ординат на C
$y = f(x - a)$	Сдвиг вдоль оси абсцисс на a
$y = f(-x)$	Симметрия относительно оси ординат
$y = -f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс
$y = k \cdot f(x),\ k \neq 0$	Умножение каждой ординаты на k
$y = f(kx),\ k \neq 0$	Деление каждой абсциссы на k

Четные и нечетные функции

Функция $f(x)$ определенная на множестве X, называется *четной,* если для любого $x \in X$ выполняются условия:

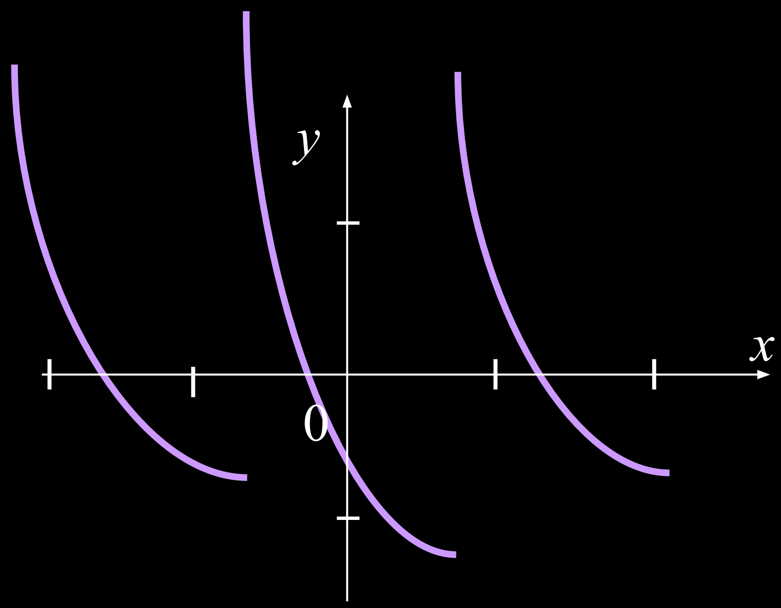
$$-x \in X \text{ и } f(-x) = f(x),$$

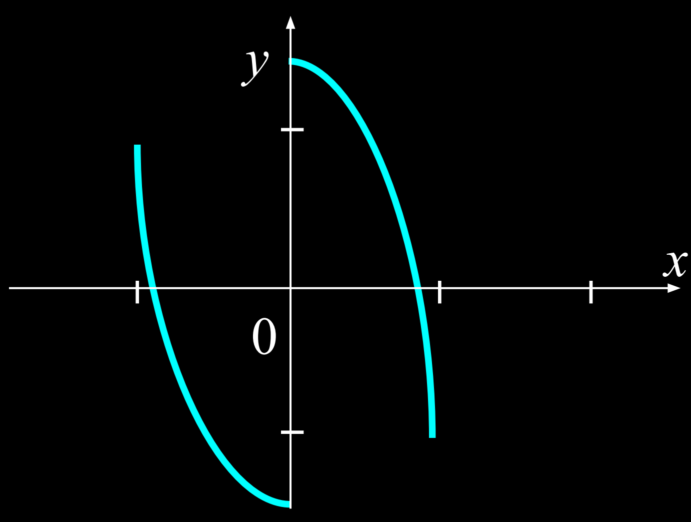
нечетной, если для любого $x \in X$ выполняются условия:

$$-x \in X \text{ и } f(-x) = -f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

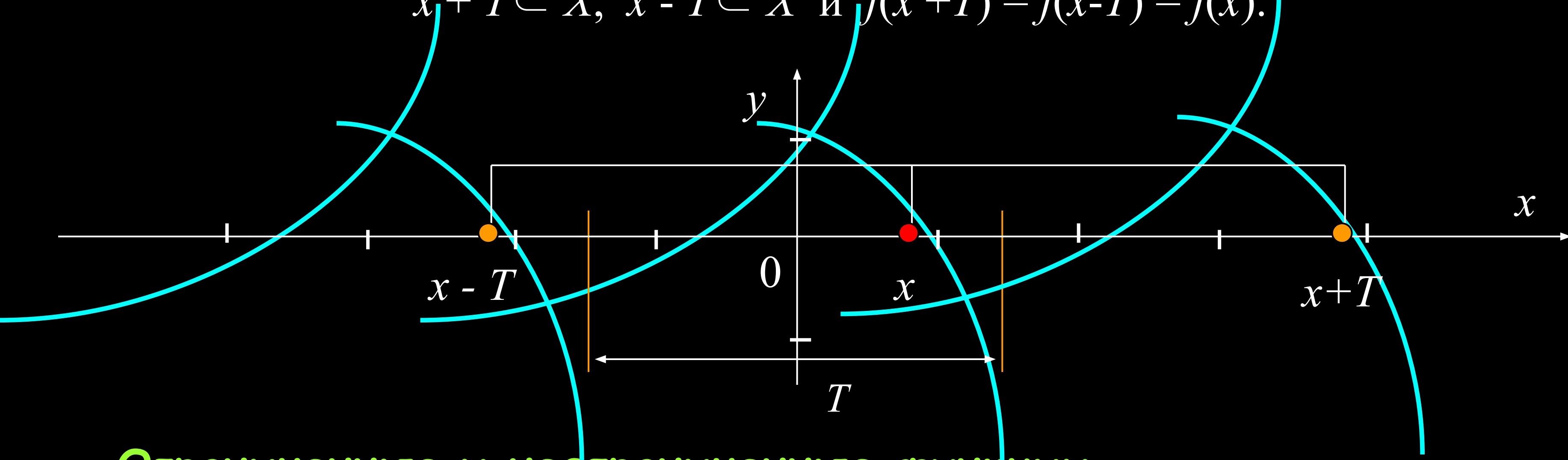




Периодические функции

Функция $f(x)$ определенная на множестве X, называется *периодической* с периодом $T > 0$, если для любого $x \in X$ выполняются условия:

$$x + T \in X,\ x - T \in X \text{ и } f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$



Ограниченные и неограниченные функции

Функция $f(x)$, называется *ограниченной* на множестве X, если множество ее значений ограничено, т.е. существует такое число $C>0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство:

$$|f(x)| \le C.$$

Функция $f(x)$ не ограничена на множестве X, если последнее условие не выполняется, т.е.

$$\forall C > 0 \quad \exists\ x_c \in X: \ |f(x_c)| > C.$$

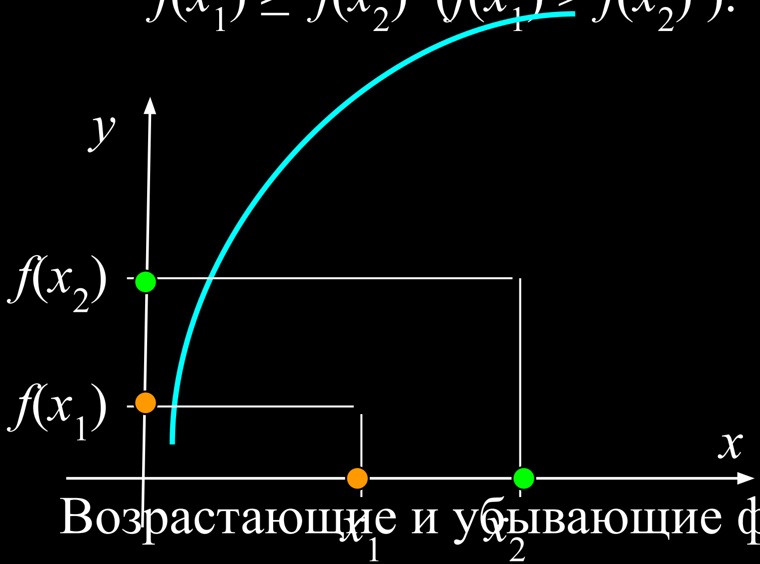
Монотонные функции

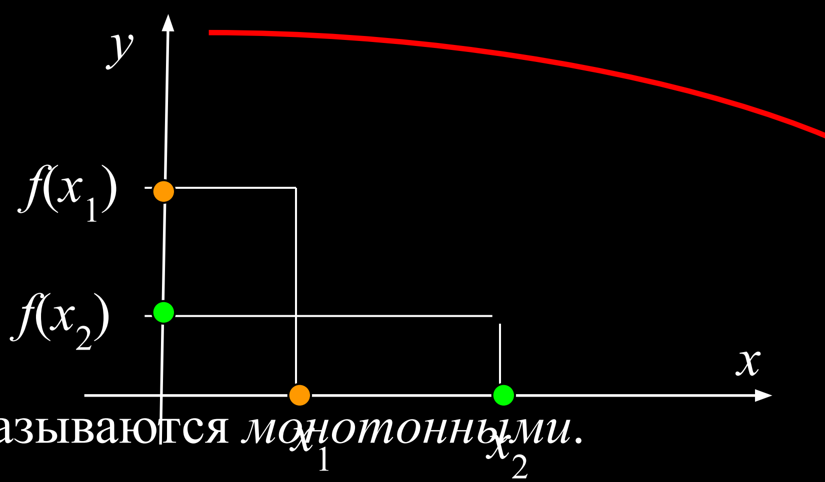
Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*строго возрастающей*) на множестве X, если для всех $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

Функция $f(x)$ называется *убывающей* (*строго убывающей*) на множестве X, если для всех $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

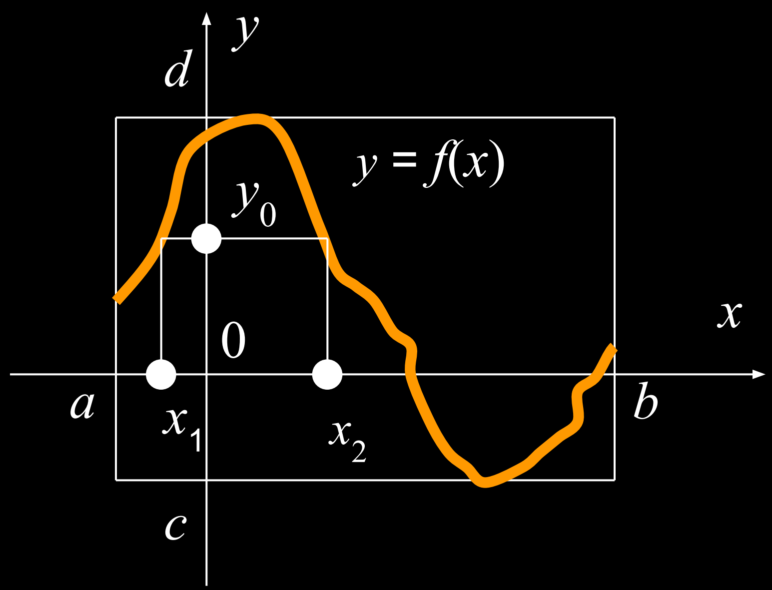
$$f(x_1) \ge f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

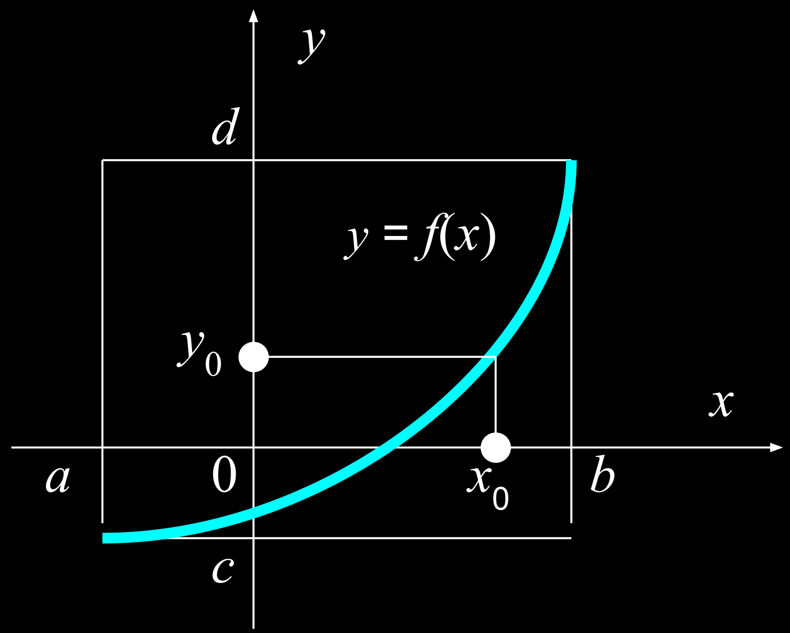




Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Обратная функция





$D(f) = [a, b]$ – область определения функции $f(x)$,
$E(f) = [c, d]$ – область значений функции $f(x)$.
Если $f(x)$ такова, что для любого $y_o \in E(f)$, уравнение

$$f(x) = y_o$$

имеет единственное решение, то эту функцию называют *обратимой*.
В этом случае, выразив x из формулы $y = f(x)$ и поменяв затем x и y местами, получим обратную функцию, обозначаемую символом f^{-1} или g:

$$y = f^{-1}(x) = g(x), \quad x \in D(g).$$

Отметим следующие свойства, показывающие, как связаны данная функция и обратная к ней:

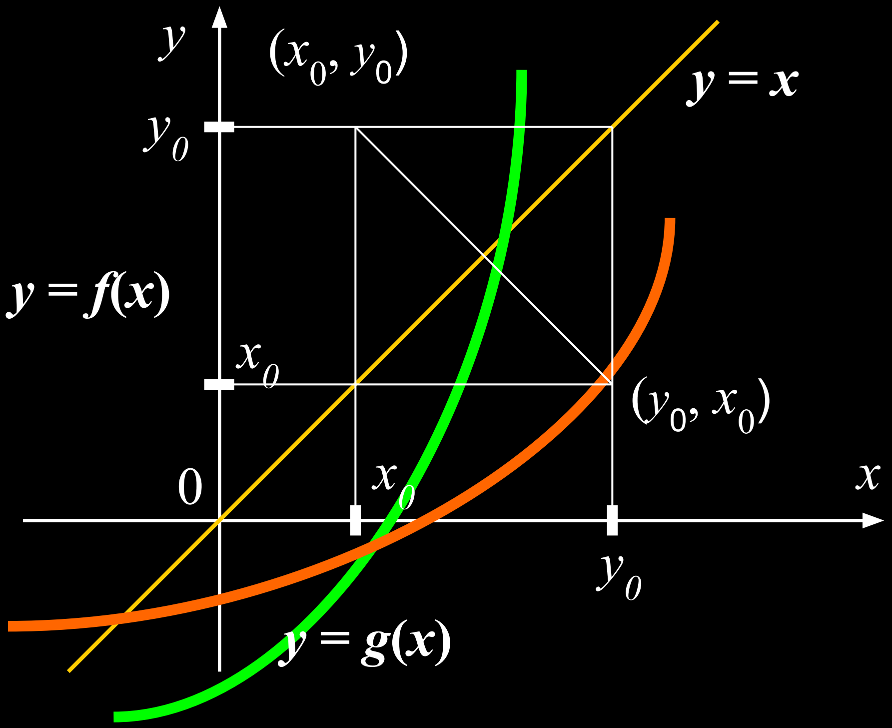
1. Если g – функция, обратная к f, то f – функция, обратная к g; при этом

$$D(g) = E(f),\ \ E(g) = D(f).$$

2. $g(f(x)) = x,\ \forall x \in D(f);\quad f(g(x)) = x,\ \forall x \in E(f).$

3. Если f – строго монотонная функция, то она обратима.

4. График обратной функции $y = g(x)$, симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.



Спасибо за внимание!