Лекция 1.2.

- Графики основных элементарных функций
- Числовая последовательность.
- Предел числовой последовательности.
- Единственность предела.
- Ограниченность сходящейся числовой последовательности.

Графики основных элементарных функций

Основными элементарными функциями называются функции: постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические.

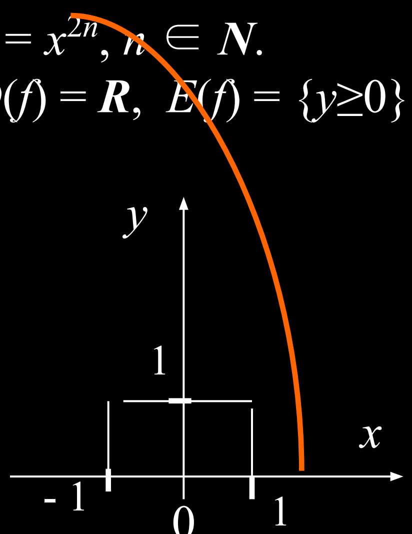
Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется просто элементарной функцией.

- *Степенная функция* $y = x^p$.

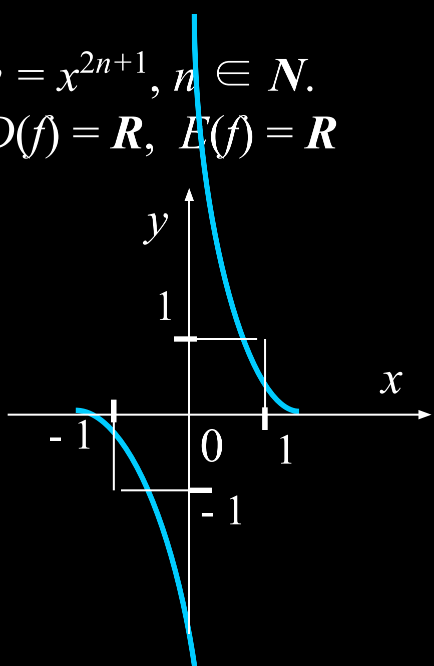
Область определения и график функции зависят от показателя p.

Рассмотрим несколько случаев:

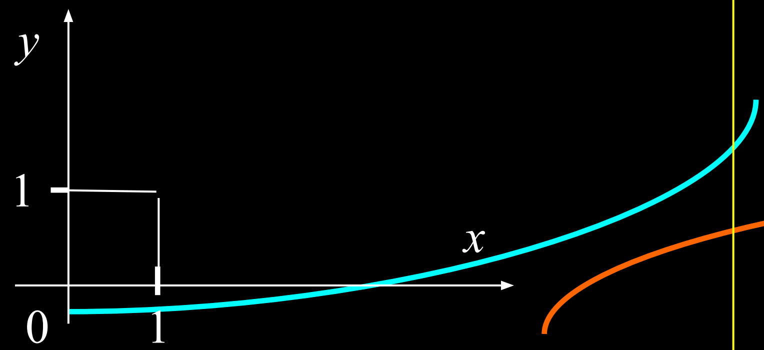
1. $y = x^{2n}, n \in \mathbf{N}$.
   $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \{y \geq 0\}$.



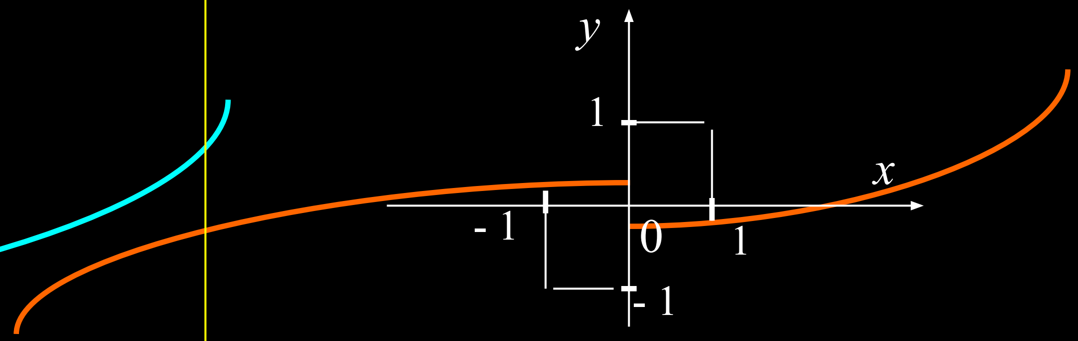
2. $y = x^{2n+1}, n \in \mathbf{N}$.
   $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$



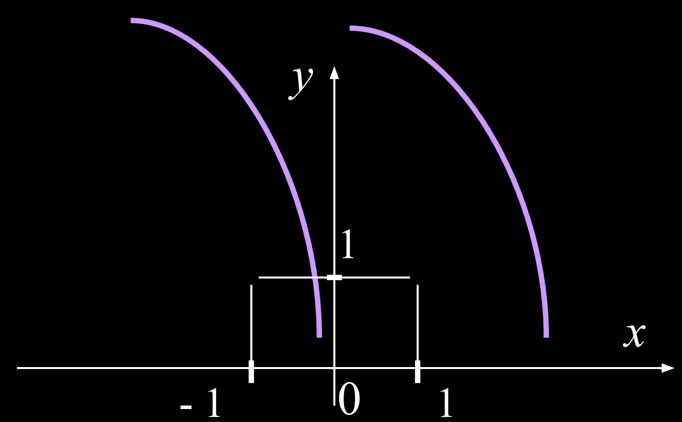
3.



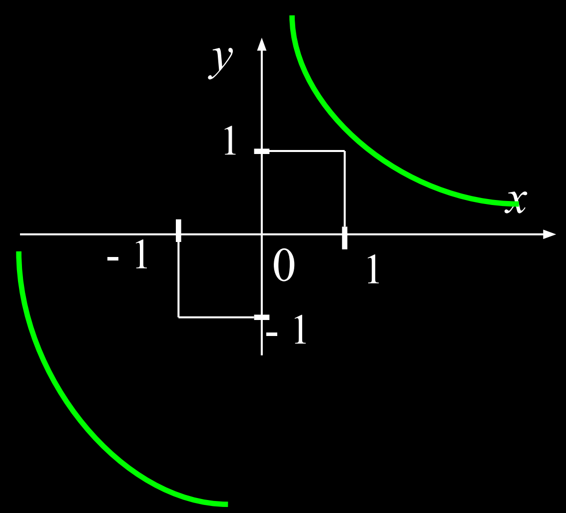
4.



5.

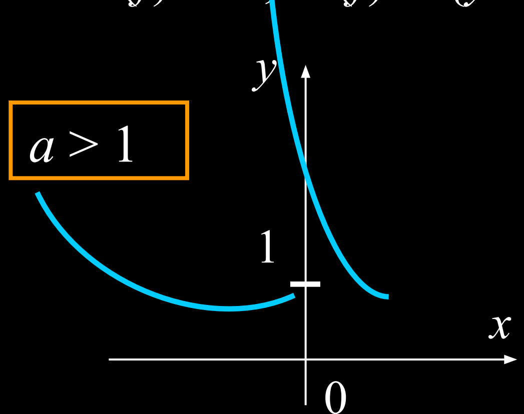


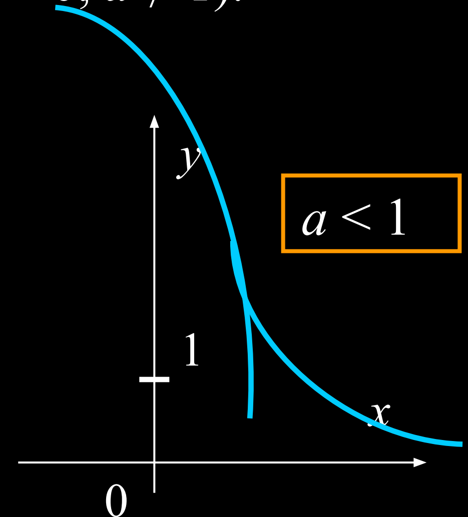
6.



- *Показательная функция* $y = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$

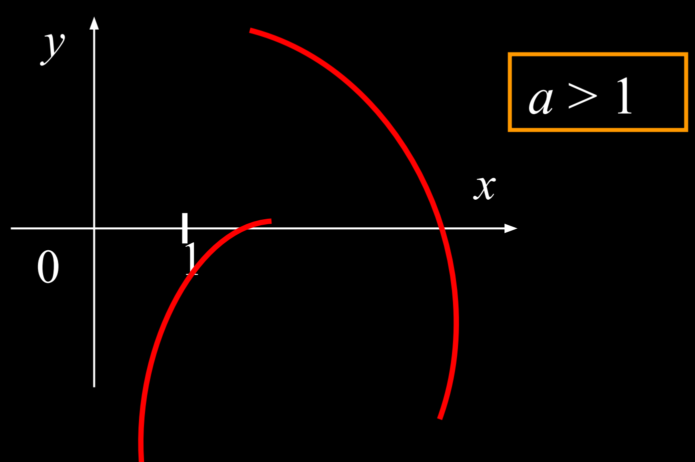
$$D(f) = \boldsymbol{R},\quad E(f) = \{y > 0\}.$$

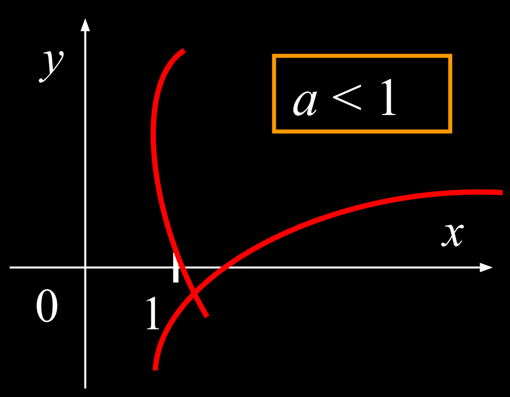




- *Логарифмическая функция* $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1).$

$$D(f) = \{x > 0\},\quad E(f) = \boldsymbol{R}$$

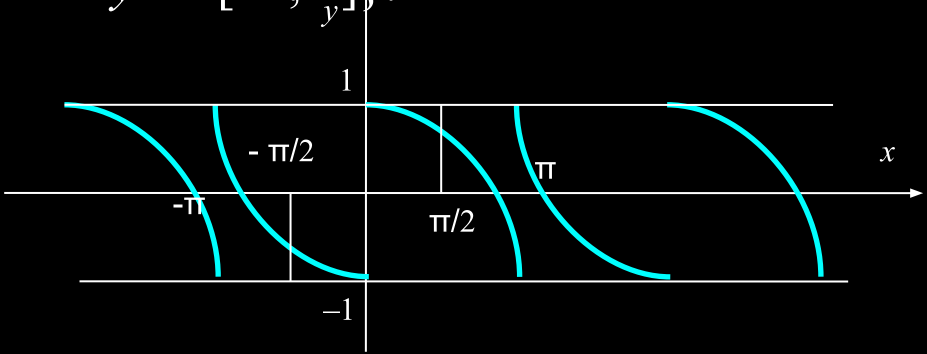




- ***Тригонометрические функции.***

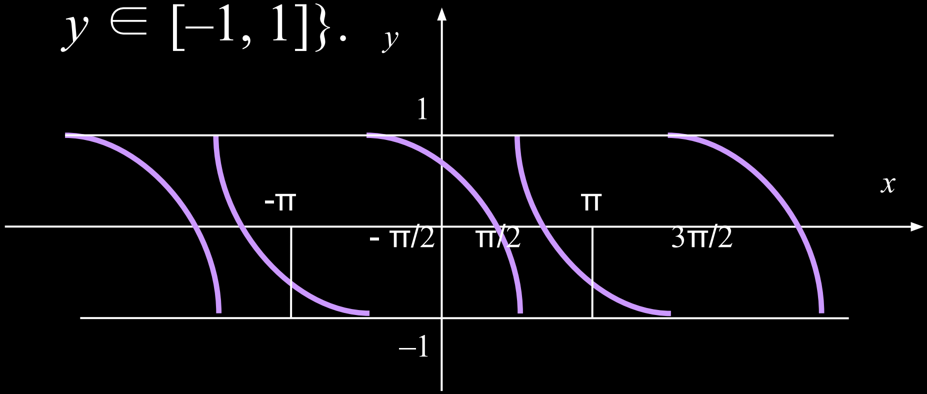
$y = \sin x$

$D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \{y \in [-1, 1]\}$.



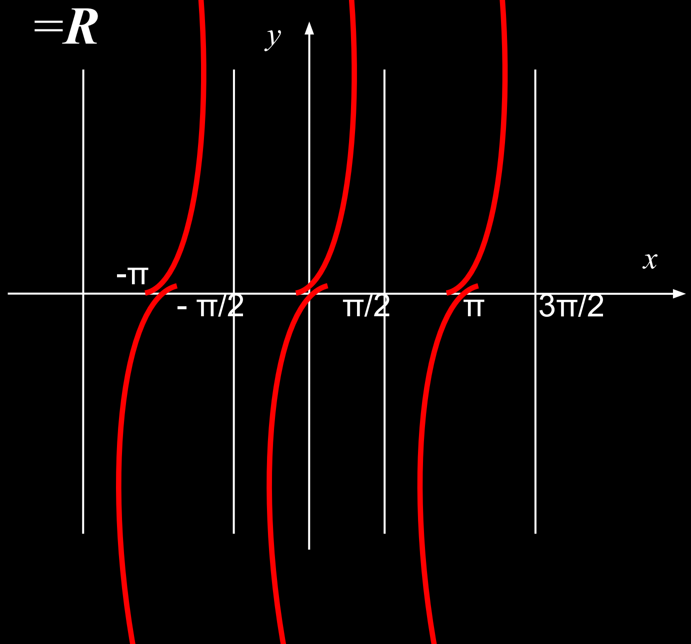
$y = \cos x$

$D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \{y \in [-1, 1]\}$.



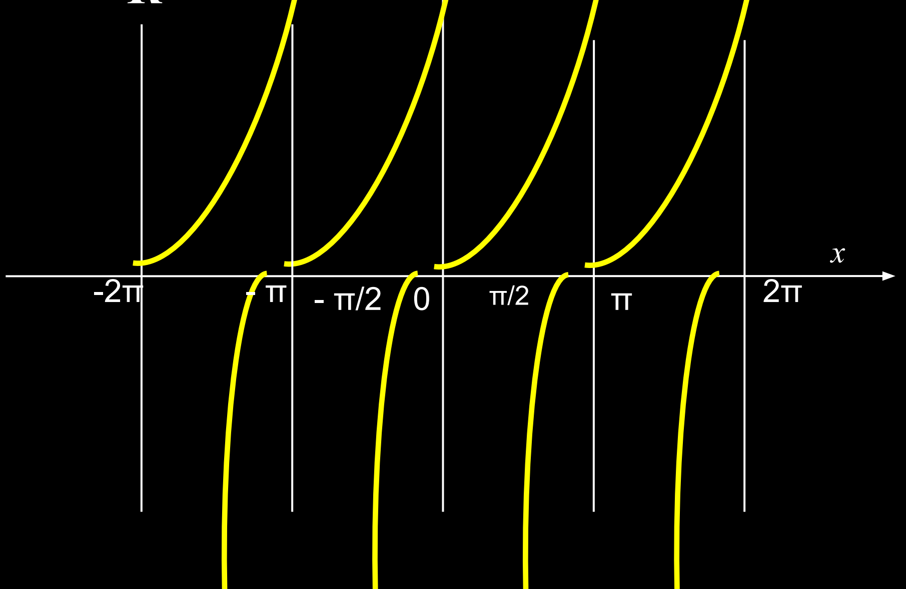
$y = \mathrm{tg}\, x$

$D(f) = \{x \neq \pi/2 + \pi k, k \in \mathbf{Z}\}$, $E(f) = \boldsymbol{R}$



$y = \mathrm{ctg}\, x$

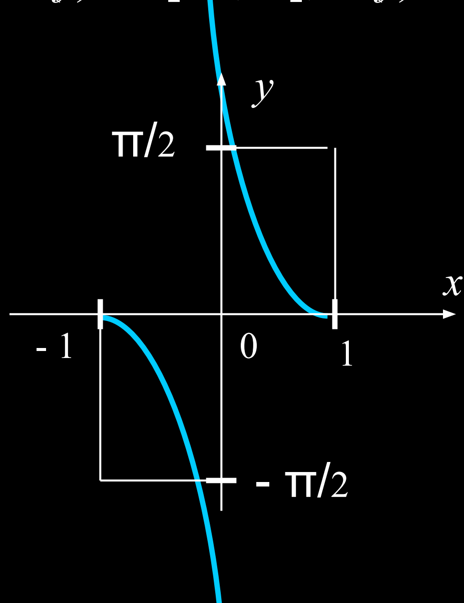
$D(f) = \{x \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}\}$, $E(f) = \boldsymbol{R}$



- ***Обратные тригонометрические функции.***

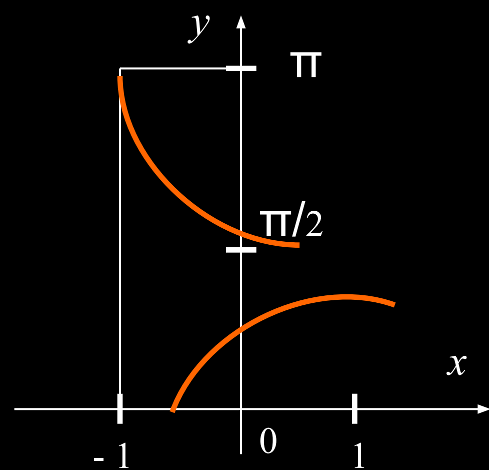
$y = \arcsin x$

$D(f) = [-1, 1], E(f) = [-\pi/2, \pi/2].$



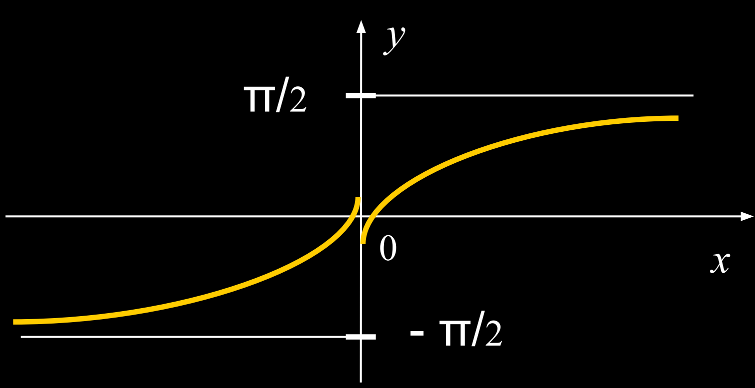
$y = \arccos x$

$D(f) = [-1, 1], E(f) = [0, \pi].$



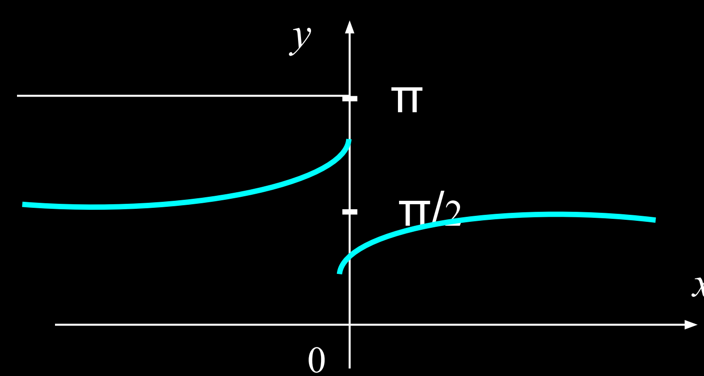
$y = \mathrm{arctg}\, x$

$D(f) = R, E(f) = (-\pi/2, \pi/2).$



$y = \mathrm{arcctg}\, x$

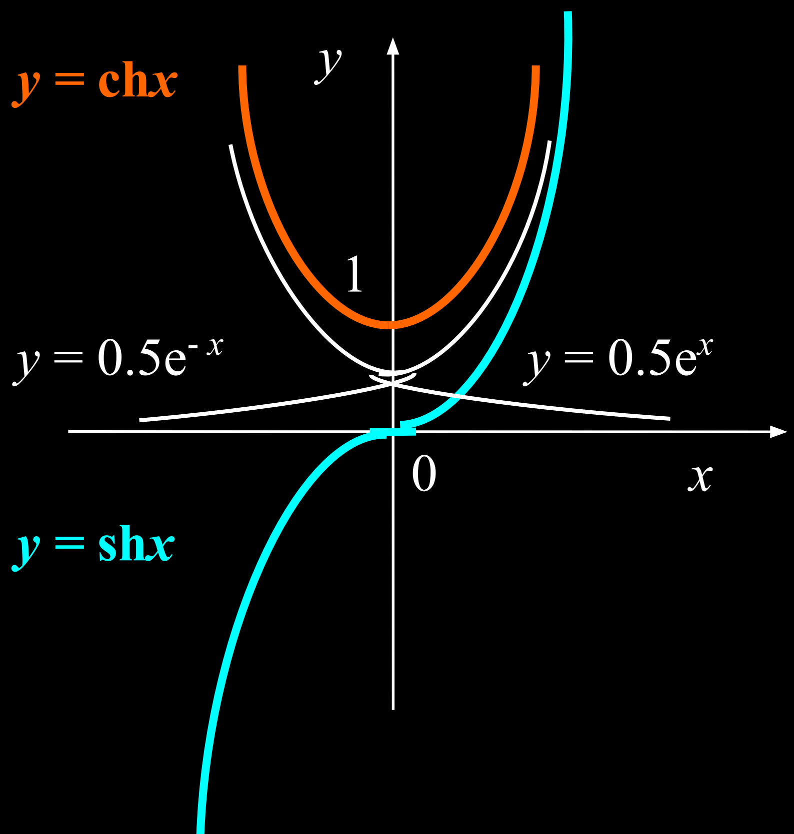
$D(f) = R, E(f) = (0, \pi).$



- ***Гиперболические функции.***

- гиперболический синус; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$.

- гиперболический косинус; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \{y \geq 1\}$.



Некоторые свойства гиперболических функций:

$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{sh}y$

$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}y$

$\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}x$

$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$

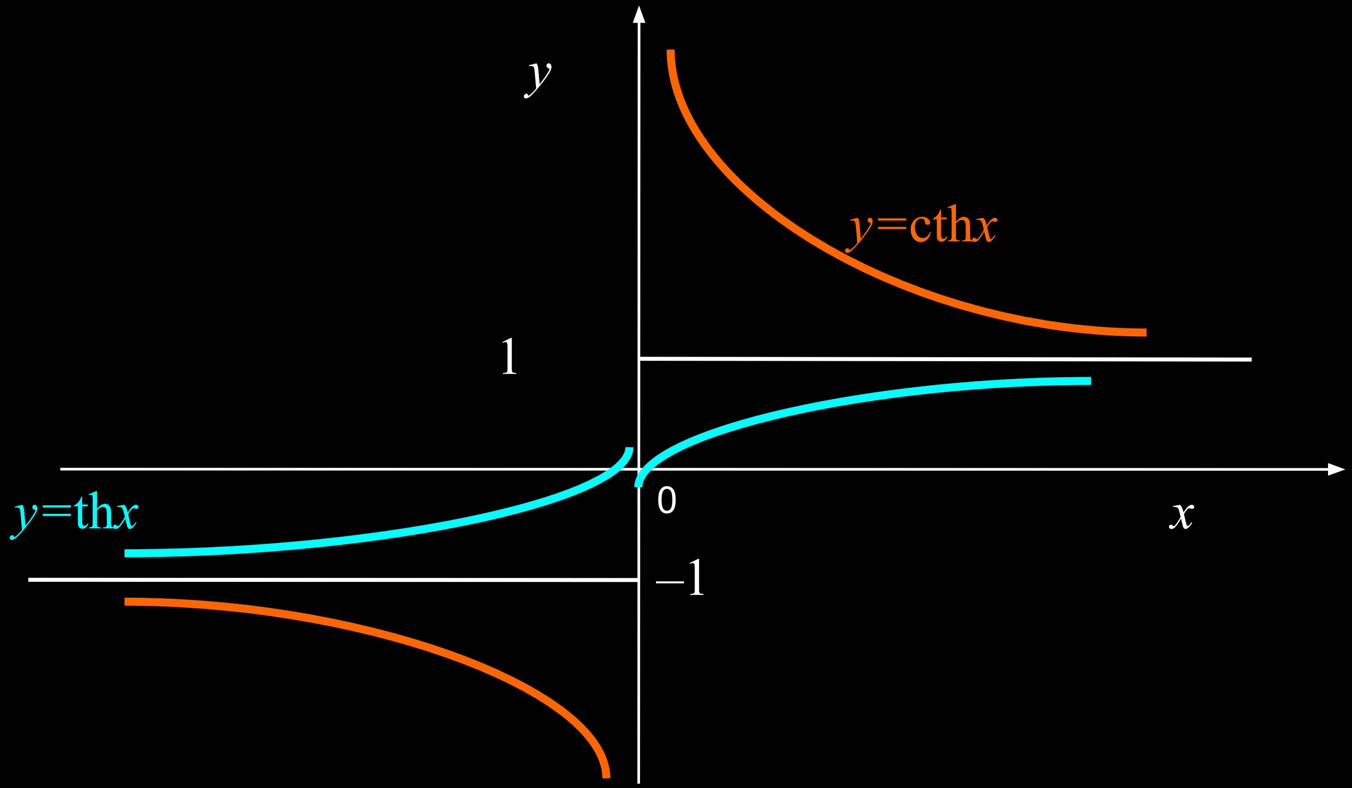
$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

- гиперболический тангенс;

$D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \{-1 < y < 1\}$.

- гиперболический котангенс;

$D(f) = \{x \neq 0\}$, $E(f) = \{\, |\, y\, | > 1\}$.



Понятие числовой последовательности.

Если каждому числу $n \in \mathbf{N}$ поставлено в соответствие определённое число $x_n \in \mathbf{R}$, то полученное упорядоченное множество

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

называют числовой последовательностью (ЧП).

Таким образом, ***числовая последовательность – это функция, областью определения которой является все множество натуральных чисел N.*** Значения этой функции x_n называются элементами последовательности, число ***n*** называется номером элемента.

Кратко числовую последовательность обозначают

или $\{x_n\}$.

Числовая последовательность может быть задана с помощью формулы, позволяющей вычислить каждый элемент последовательности по его номеру.

Примеры.

1) 1, 1, 1, … $\Leftrightarrow$

$$x_n = 1,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ;$$

2) –1, 1, –1, 1, … $\Leftrightarrow$

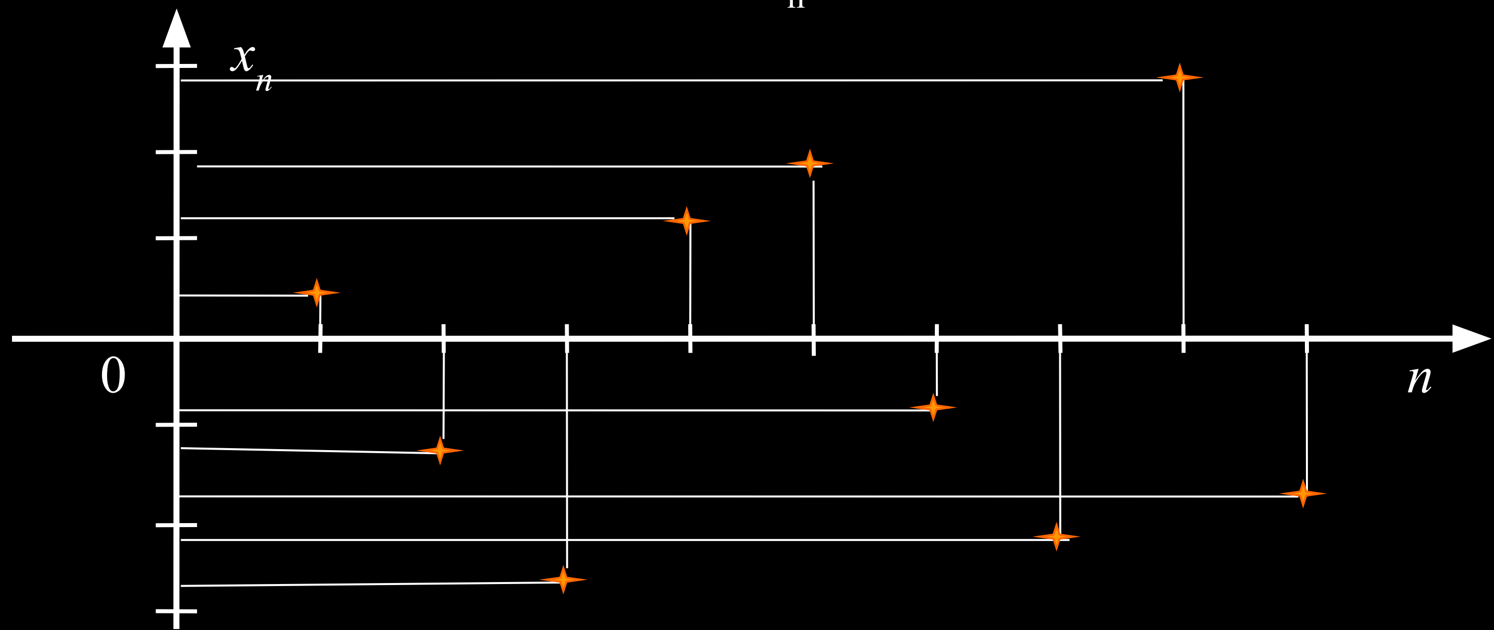
$$x_n = (-1)^n\ ,\ n \in \mathbf{N}\ ;$$

3)

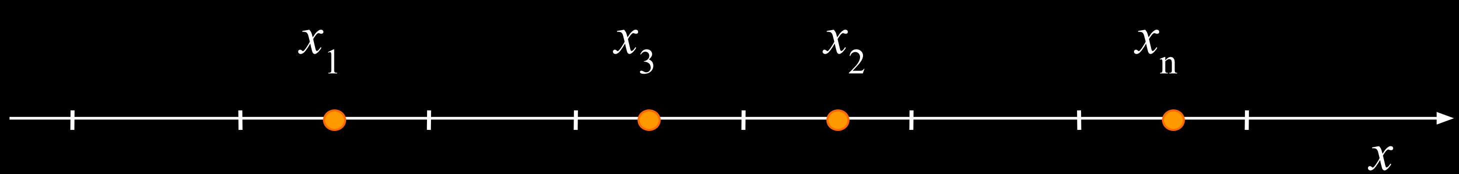
Арифметическая и и геометрическая прогрессии

Графическое изображение числовой последовательности:

1) точками с координатами (n, x_n), $n \in \mathbf{N}$, на плоскости:



2) точками x_n, $n \in \mathbf{N}$, на числовой прямой:



Определение предела последовательности

Число $a \in \boldsymbol{R}$ называется пределом (числовой) последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$ (зависящий от ε), что для всех ее элементов с номерами $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$| x_n - a | < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

Или по-другому:

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Если последовательность имеет предел, то говорят, что она *сходится*, в противном случае говорят, что она *расходится*.

С помощью логических символов определение предела последовательности можно записать так:

Геометрический вариант определения предела.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в определении предела эквивалентно неравенствам

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon .$$

Другими словами, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого, все члены ЧП принадлежат ε-окрестности точки a.

Число a является пределом ЧП $\{x_n\}$, если в любой его окрестности содержатся почти все элементы последовательности, за исключением их конечного числа.

Таким образом, вне любой ε-окрестности точки a лежит лишь конечное число элементов ЧП.

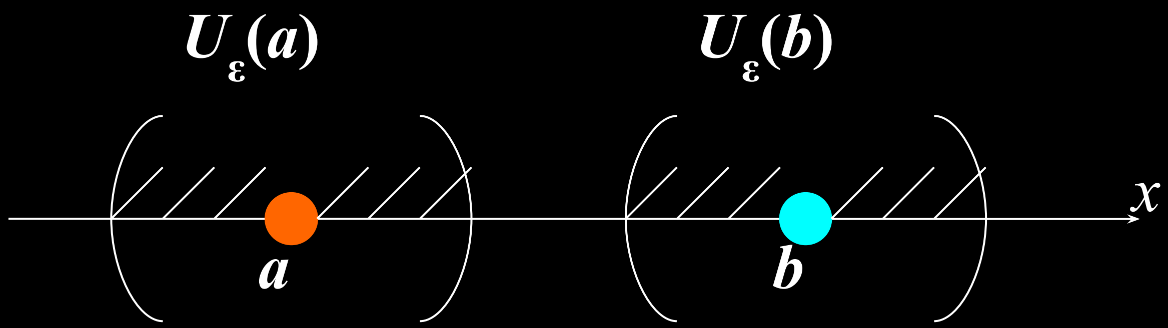
Единственность предела

ТЕОРЕМА.

Числовая последовательность может иметь лишь один предел.

Доказательство.

Предположим, что $\{x_n\}$ имеет два предела, причем $a < b$. Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы ε-окрестности точек a и b не пересекались:



Так как a - предел $\{x_n\}$, то вне $U_\varepsilon(a)$ может лежать лишь конечное число элементов ЧП, в частности, интервал $U_\varepsilon(b)$ может содержать лишь конечное число элементов последовательности. Это противоречит тому, что b – ее предел. Полученное противоречие говорит о том, что ***числовая последовательность может иметь только один предел.***

Ограниченность сходящейся ЧП.

ЧП называется ***ограниченной***, если множество ее значений ограничено сверху и снизу, т.е.

$$\exists\ C_1 \in \mathbf{R} \text{ и } C_2 \in \mathbf{R}:\ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow C_1 \leq x_n \leq C_2.$$

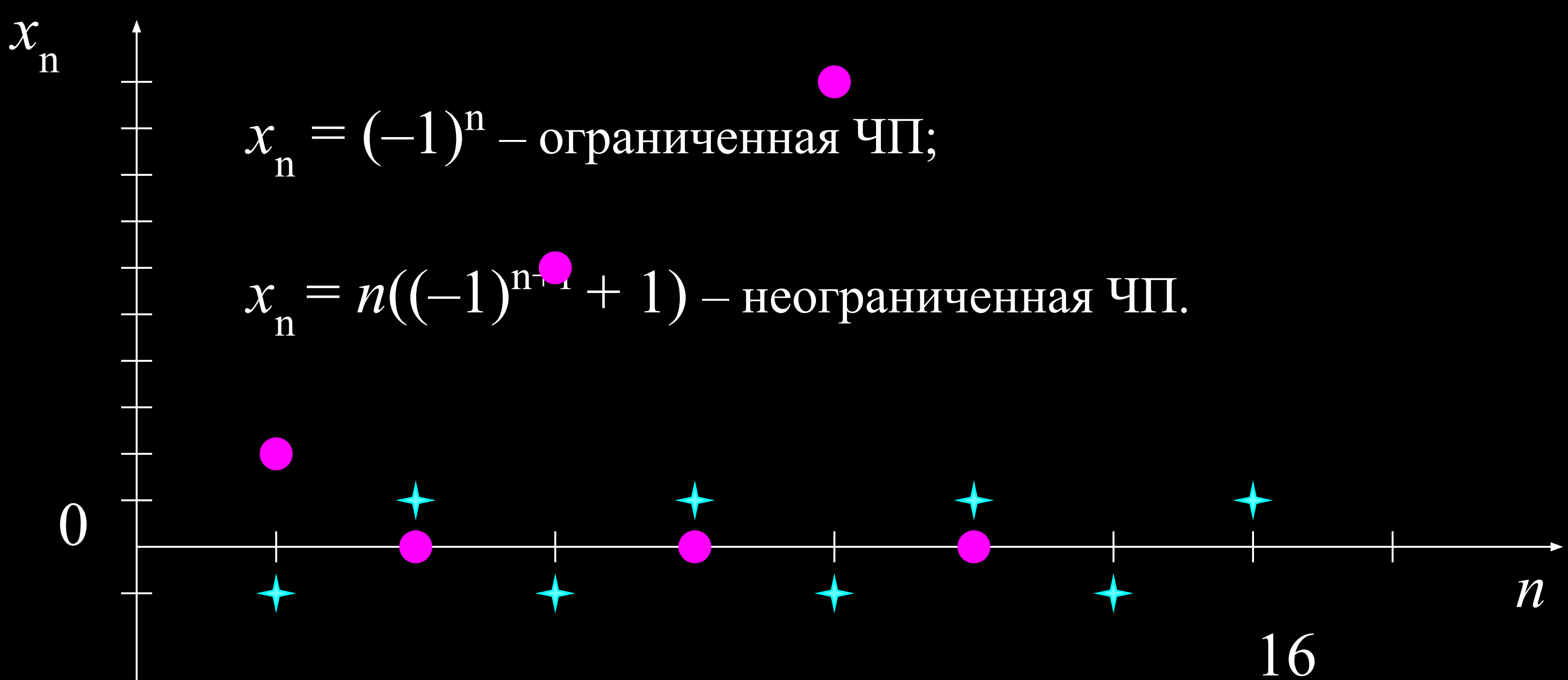
ЧП называется ***неограниченной***, если

$$\forall C > 0\ \exists\ n \in \mathbf{N}: |x_n| > C.$$

Примеры.

$x_n = (-1)^n$ – ограниченная ЧП;

$x_n = n((-1)^{n-1} + 1)$ – неограниченная ЧП.



ТЕОРЕМА.

Если числовая последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство.

Пусть

Возьмем $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела числовой последовательности, найдется такое N(1), что для всех $n \geq N(1)$ выполняется неравенство

$$a - 1 < x_n < a + 1.$$

Пусть

$$C_1 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, a - 1\},$$
$$C_2 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, a + 1\}.$$

Тогда для всех n справедливо неравенство

$$C_1 \leq x_n \leq C_2,$$

ч.т.д.

ЛЕММА.

Если $x_n \to a$ при $n \to \infty$, $a \neq 0$ и $x_n \neq 0$ для $\forall n$, то числовая последовательность $\{1/x_n\}$ ограничена.

Доказательство.

Так как $a \neq 0$, то $\varepsilon = |a|/2 > 0$. По определению предела для данного ε найдется $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq N(\varepsilon) \to$

$$|x_n - a| < |a|/2.$$

Воспользуемся свойством модуля вещественного числа:

$$||x_n| - |a|| < |x_n - a| < |a|/2 \quad \Rightarrow$$

$$|a|/2 < |x_n| < 3|a|/2 \ \Rightarrow$$

$$1/|x_n| < 2/|a| \quad \forall n \geq N(|a|/2).$$

Пусть

Тогда для всех n справедливо неравенство

$$|1/x_n| \leq C,$$

ч.т.д.

Спасибо за внимание!