Лекция 2.

- **Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.**
- **Арифметические операции над сходящимися числовыми последовательностями.**

Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.

Числовая последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

ПРИМЕР 1. Покажем, что $\alpha_n = 1/n$ – бесконечно малая.

Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$.

Решив относительно n неравенство $|\alpha_n| = 1/n < \varepsilon$, получим: $n > 1/\varepsilon$.

Возьмем $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда

$$\forall\, n \geq N(\varepsilon) \rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

В этом случае пишут

ПРИМЕР 2. Покажем, что $x_n = (-1)^n n$ – бесконечно большая.

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$.

Решив относительно n неравенство $|x_n| = n > \varepsilon$ и взяв $N(\varepsilon) = [\varepsilon] + 1$, получим:

$$\forall n \geq N(\varepsilon) \rightarrow |x_n| > \varepsilon.$$

Аналогично определяются пределы, равные $\pm\infty$.

ПРИМЕР 3.

ПРИМЕР 4.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Запись

носит условный характер. На самом деле

предела здесь нет!

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

ТЕОРЕМА 1.
Алгебраическая сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство.

Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые.

Покажем, что $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – бесконечно малая.

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда, согласно определению бесконечно малой, для $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$

$$\exists \quad N_1(\varepsilon/2) \in \mathbf{N} : \forall n \geq N_1 \rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon/2,$$

$$\exists \quad N_2(\varepsilon/2) \in \mathbf{N} : \forall n \geq N_2 \rightarrow |\beta_n| < \varepsilon/2.$$

Возьмем $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда, воспользовавшись свойством модуля вещественного числа, для всех $n \geq N$ имеем оценку:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

т.е. $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – бесконечно малая.

СЛЕДСТВИЕ.

Сумма ***конечного*** числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Последнее утверждение неверно, если число слагаемых растет с ростом n. Например

бесконечно малые, а их сумма

т.е. в данном случае сумма не стремится к нулю при $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 2.

Произведение бесконечно малой числовой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая.

Доказательство.

Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, $\{x_n\}$ – ограниченная.
Покажем, что $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ – бесконечно малая.

Пусть $C > 0 : |x_n| \le C \ \forall n$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда, согласно определению бесконечно малой последовательности, для $\varepsilon_1 = \varepsilon / C$

$$\exists \ N(\varepsilon / C) \in \mathbf{N} : \forall n \ge N(\varepsilon / C) \rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon / C.$$

Воспользовавшись свойством модуля вещественного числа, для всех $n \ge N$ имеем оценку:

$$|\alpha_n \cdot x_n| \le |\alpha_n| \cdot |x_n| < (\varepsilon / C) \cdot C = \varepsilon,$$

т.е. $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ – бесконечно малая.

СЛЕДСТВИЕ.

Произведение конечного числа числовых последовательностей, из которых хотя бы одна бесконечно малая, а остальные ограниченные, есть бесконечно малая.

ТЕОРЕМА 3.

Числовая последовательность $\{x_n\}$, где $x_n \neq 0\ \forall n$ является бесконечно малой тогда и только тогда, когда $\{1/x_n\}$– бесконечно большая.

Доказательство.

1) Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$.

Согласно определению бесконечно малой, для $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$

$$\exists \quad N(\varepsilon_1) \in \mathbf{N}: \forall n \geq N(\varepsilon_1) \ \rightarrow \ |x_n| < 1/\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|1/x_n| > \varepsilon$ для $\forall n \geq$ N, т.е. $\{1/x_n\}$ – бесконечно большая.

2) Пусть $\{1/x_n\}$ – бесконечно большая последовательность. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно большой, для $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$

$$\exists \quad N(\varepsilon_1) \in \mathbf{N}: \forall n \geq N(\varepsilon_1) \rightarrow |1/x_n| > \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|x_n| < \varepsilon$ для $\forall n \geq N$, т.е. $\{x_n\}$ – бесконечно малая.

Арифметические операции над сходящимися числовыми последовательностями.

ЛЕММА.

где α_n – бесконечно малая числовая последовательность.

Доказательство.

1. Пусть

   Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; N(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \; \forall n \geq N(\varepsilon) \rightarrow | x_n - a | < \varepsilon,$$

   то есть $x_n - a = \alpha_n$ – бесконечно малая последовательность.

2. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая. Из определения бесконечно малой последовательности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; N(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \; \forall n \geq N(\varepsilon) \rightarrow | x_n - a | < \varepsilon,$$

   то есть

ТЕОРЕМА.

1. Если $x_n = C = \text{const} \quad \forall\, n$, то

2. Если

то

a)

b)

c)

Доказательство.

1. $x_n - C = C - C = 0$ – бесконечно малая последовательность. Тогда, согласно лемме,

2. Согласно лемме,

$$x_n = a + \alpha_n\,,\; y_n = b + \beta_n\,,$$

где α_n , β_n – бесконечно малые последовательности. Тогда

а) $x_n \pm y_n = (\,a + \alpha_n) \pm (\,b + \beta_n) = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$,

где $\alpha_n \pm \beta_n$ – бесконечно малая последовательность и, согласно лемме, *b*) $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)\cdot(b + \beta_n) = a\cdot b + (a\beta_n + b\alpha_n)$,

где $a\beta_n + b\alpha_n$ – бесконечно малая последовательность и, согласно лемме,

c)

где

– бесконечно малая последовательность; то есть, согласно лемме,

СЛЕДСТВИЕ.

Если существует то для любого числа $C \in \mathbf{R}$

ЗАМЕЧАНИЕ.

В случае бесконечно больших последовательностей теоремы об арифметических операциях над ними неприменимы. Так, например, частное двух бесконечно больших последовательностей не всегда является бесконечно большой.