Лекция 3.

- **Предельный переход в неравенствах.**
- **Существование предела у ограниченной монотонной последовательности (свойство Вейерштрасса).**
- **Число е.**

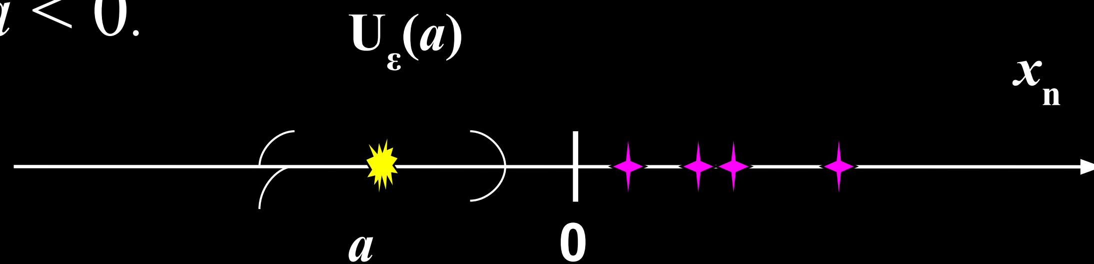
Предельный переход в неравенствах.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть Тогда $a \geq 0$.

Доказательство.

Предположим противное: $a < 0$.



Так как a – предел числовой последовательности, то вне любой окрестности этого числа может содержаться лишь конечное число элементов последовательности. Выберем ε так, чтобы $U_\varepsilon(a) \subset (-\infty, 0)$. Но, по условию теоремы, все элементы последовательности лежат на положительной полуоси, т.е. вне $U_\varepsilon(a)$ находится бесконечно много ее элементов, что противоречит определению предела. Следовательно наше предположение неверно и $a \geq 0$.

СЛЕДСТВИЕ.

Если   то $a \le 0$.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть

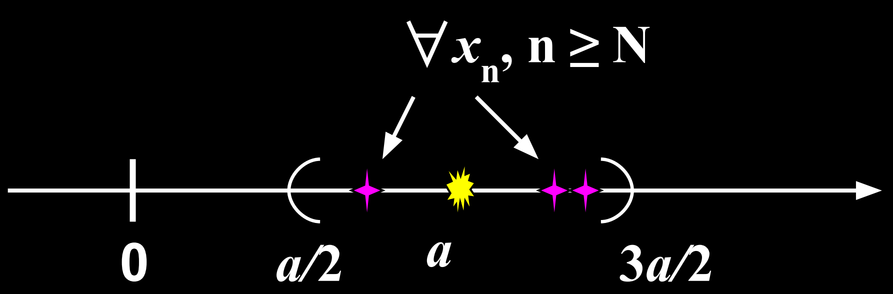
Тогда найдется такое натуральное число N , что $x_n > 0$ для всех $n \ge N$.

Доказательство.

Возьмем $\varepsilon = a/2$. Тогда, согласно определению предела, найдется такое N(ε), что для всех $n \ge N(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство

$$|\, x_n - a \,| < a/2 \quad \Leftrightarrow \quad a/2 < x_n < 3a/2,$$

т.е. $x_n > 0$ для всех $n \ge N$.



ТЕОРЕМА 3. (О «двух милиционерах»)

Пусть числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$,$\{z_n\}$ таковы, что

1) $x_n \le y_n \le z_n \quad \forall\, n \ge N_0$;

2)

Тогда $\{y_n\}$ сходится и

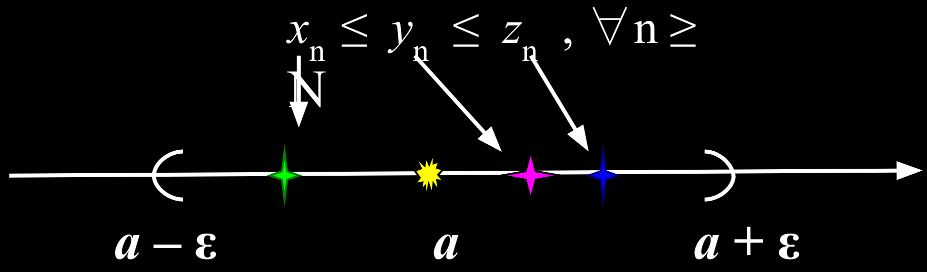
Доказательство.

Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$.

Возьмем $N(\varepsilon) = \max\{ N_0, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $y_n \in U_\varepsilon(a)$ для $\forall n \geq N(\varepsilon)$.

Т.е. $\{y_n\}$ сходится и



ТЕОРЕМА 4.

Если и $x_n \geq y_n \; \forall n$, то $a \geq b$.

Доказательство.

По теореме о пределе разности

$$x_n - y_n \to a - b \text{ и } x_n - y_n \geq 0,$$

тогда по теореме о сохранении пределом знака членов последовательности

$$a - b \geq 0, \text{ т.е. } a \geq b.$$

Определение монотонной числовой последовательности и точной грани числовой последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ $\forall n$ и строго возрастающей (убывающей), если $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$ $\forall n$. Возрастающие и убывающие числовые последовательности называются ***монотонными***.

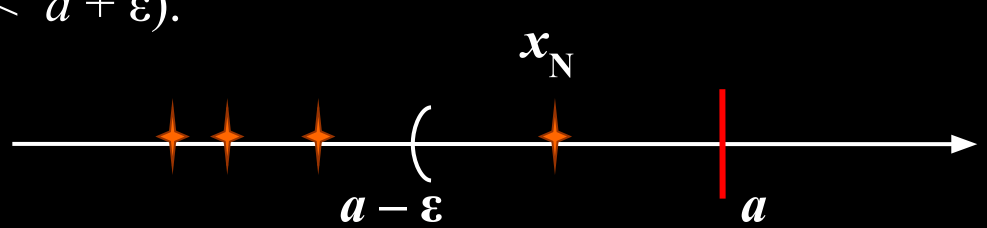
ПРИМЕР.

$\{1/n\}$ – убывающая, $\{n\}$ – возрастающая, $\{\sin n\}$ – не является монотонной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Число a называется точной верхней (нижней) гранью числовой последовательности $\{x_n\}$, если

- $x_n \leq a$ $(x_n \geq a)$ $\forall$ n ;
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $x_N > a - \varepsilon$ $(x_N < a + \varepsilon)$.



К известным из школы свойствам вещественных чисел добавим еще одно важное Свойство Вейерштрасса .

Всякая возрастающая (убывающая), ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел, причем, если

то

Бином Ньютона

Число e.

Рассмотрим последовательность

окажем, что эта последовательность сходится.

Для этого достаточно доказать что она:

- возрастает;
- ограничена сверху.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона при

где

(1)

(2)

Все слагаемые в суммах (1) и (2) положительны, причем каждое слагаемое суммы (1) меньше соответствующего слагаемого суммы (2), так как

Кроме того, число слагаемых в сумме (2) на одно больше, чем в сумме (1). Поэтому

Теперь докажем, что последовательность ограничена сверху. Заметим, что

В результате получим оценку:

Итак

Итак $\{x_n\}$- возрастает и ограничена сверху, а значит, согласно свойству Вейерштрасса, имеет предел. Этот предел обозначается буквой ***e*.** Переходя к пределу в последнем неравенстве, получим, что $2 < e < 3$. Более точными оценками можно получить, что справедливо приближенное равенство

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Доказывается также, что число ***e*** иррационально и, более того, трансцендентно, т.е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Число ***e*** играет в математическом анализе особую роль. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов.