Лекция 3.

- **Принцип вложенных отрезков.**
- **Подпоследовательность числовой последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.**
- **Критерий Коши существования предела последовательности.**

Принцип вложенных отрезков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Система числовых отрезков $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, …, $[a_n,b_n]$,…, где $a_n \in \mathbf{R}$, $b_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, называется *системой вложенных отрезков*, если

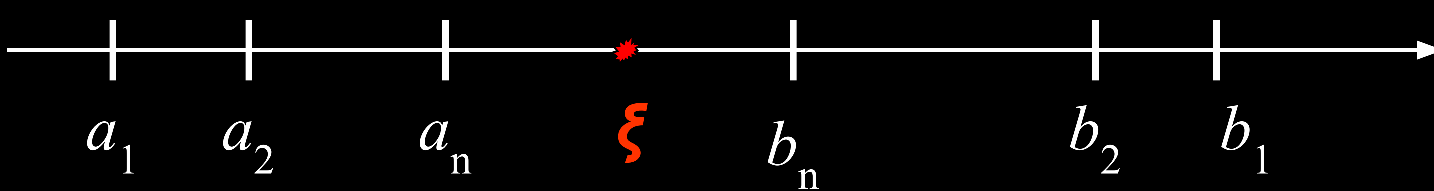
$$a_1 \le a_2 \le \ldots\ a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1,$$

т.е. если каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ содержится в предыдущем.

ТЕОРЕМА.

Для всякой системы вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам данной системы, причем

$$\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}.$$



Доказательство.

Последовательность левых концов отрезков $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху, например, числом b_1.

Тогда по свойству Вейерштрасса существует

По свойству верхней грани $a_n \le \alpha \ \forall n$.

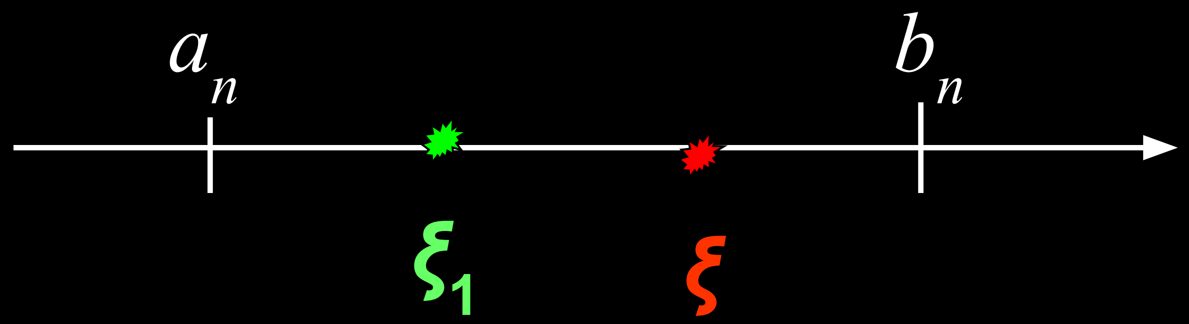
Последовательность правых концов отрезков $\{b_n\}$ убывает и ограничена снизу, например, числом a_1.

Тогда по свойству Вейерштрасса существует

По свойству нижней грани $b_n \ge \beta \ \forall n$.

С другой стороны $b_n = a_n + (b_n - a_n)$, откуда, переходя к пределу, получим

Следовательно $\alpha = \beta = \xi$ и $a_n \le \xi \le b_n \ \forall n$. Т.е. существует точка, принадлежащая всем отрезкам одновременно.



Покажем, что такая точка единственна.

Предположим, что существует еще одна точка $\xi_1 \in [a_n, b_n]\ \forall n$.
Тогда

$$0 \le |\xi - \xi_1| \le b_n - a_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда, по теореме «о двух милиционерах», делаем вывод, что

$$\xi = \xi_1.$$

Понятие подпоследовательности числовой последовательности.

Пусть дана числовая последовательность $\{x_n\}$.

Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, то есть такую, что

$$n_1 < n_2 < n_3 <\ldots <n_k <\ldots$$

Тогда числовая последовательность

называется подпоследовательностью числовой последовательности $\{x_n\}$.

Пример.

$\{x_n\} = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, 11, 12, 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17, \ldots$

$\{y_k\} = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19, \ldots$

$\{z_m\} = 3,\ 5,\ 1,\ 9,\ 11,\ 7,\ 15,\ 17,\ 13, \ldots$

$\{y_k\}$ – подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$;

$\{z_m\}$ не является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Существование частичного предела у ограниченной ЧП

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Если подпоследовательность числовой последовательности $\{x_n\}$ имеет предел, то этот предел называется *частичным пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$.

Пример. $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\}$; 0 – частичный предел этой ЧП.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Наибольший и наименьший из частичных пределов последовательности $\{x_n\}$, если они существуют, называют соответственно *верхним* и *нижним пределом* этой последовательности и обозначают символами

Пример.

$$\{x_n\} = 1,\ 2,\ 3, 1,\ 2,\ 3, 1,\ 2,\ 3, 1, 2, 3, \dots$$

ТЕОРЕМА **(Больцано-Вейерштрасса)**

Из всякой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

(любая ограниченная ЧП имеет хотя бы один частичный предел) .

ПРИМЕР.

$\{x_n\} = \{\sin(n\pi/2)\}$ - ограничена, но не является сходящейся.

$$\left.\begin{array}{l}\{x_{2n}\}=\{0\},\\ \{x_{4n-1}\}=\{-1\}\\ \{x_{4n-3}\}=\{1\}\end{array}\right\} \text{– сходящиеся подпоследовательности.}$$

Больцано **(Bolzano)** Бернард **(1781 – 1848)**

- Чешский математик и философ-идеалист.
- Ввел ряд важных понятий математического анализа, обычно связываемых с более поздними исследованиями других математиков.

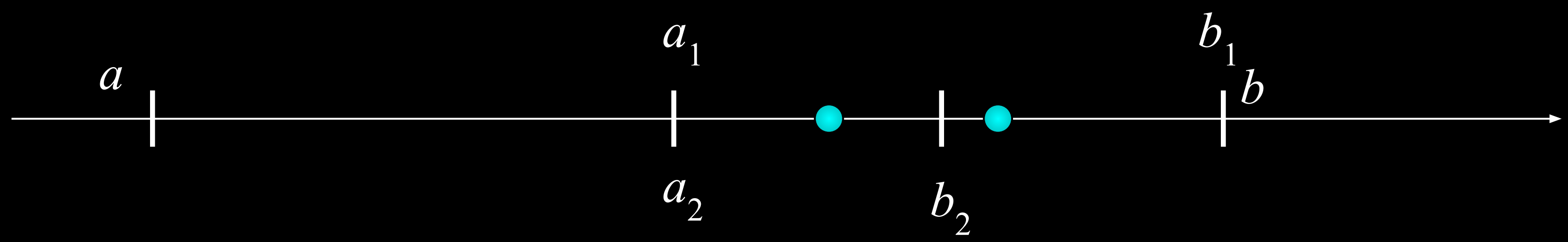
Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм
(1815-1897)

- Немецкий математик.
- Иностранный почетный член Петербургской АН.
- Труды по математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. Разработал систему логического обоснования математического анализа.

Доказательство теоремы.

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная ЧП, тогда существуют числа a, b, такие, что

$$a \le x_n \le b \ \forall n \in \boldsymbol{N}.$$



Разделим отрезок $[a, b]$ пополам.

Обозначим $[a_1, b_1]$ правую его половину, если в ней бесконечное число элементов ЧП, и левую – в противном случае.

Выберем

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам.

Обозначим $[a_2, b_2]$ правую его половину, если в ней бесконечное число элементов ЧП, и левую – в противном случае.

Выберем

так чтобы $n_2 > n_1$. И т. д.

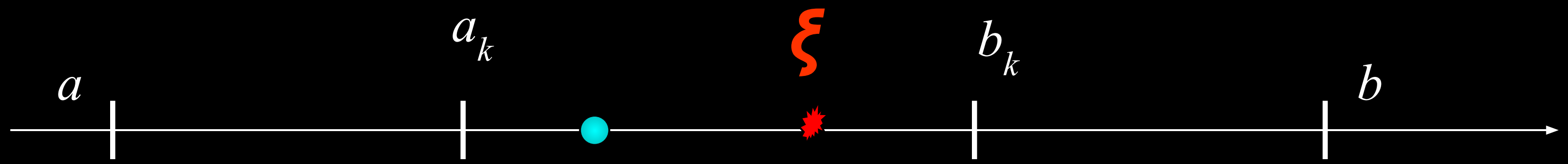
На каждом шаге получим отрезок $[a_k, b_k]$ и точку

так что $n_k > n_{k-1}$.

Т.е. получим подпоследовательность

и систему вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю, так как

Тогда, согласно принципу вложенных отрезков, существует единственная точка $\xi \in [a_k, b_k]$, $\forall k$.



Расстояние между точками ξ и не превосходит длины отрезка $[a_k, b_k]$, т.е.

0

$k \to \infty$

Итак, построена подпоследовательность:

Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (критерий Коши)

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***фундаментальной***, если она удовлетворяет ***условию Коши***:

для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для любого $n \geq N(\varepsilon)$ и любого $m \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Условие Коши можно записать в другом виде:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N} : \forall\ n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall\ p \in \boldsymbol{N} \rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Коши (Cauchy) Огюстен Луи

– 1857)

- **Французский математик, иностранный почетный член Петербургской АН (1831).**
- **Разработал базу математического анализа – теорию пределов.**
- **Автор классических курсов математического анализа.**

ЛЕММА.

Фундаментальная ЧП является ограниченной.

Доказательство.

Возьмем $\varepsilon = 1$.

В силу условия Коши существует такое $N(1)$, что для всех $n \geq N(1)$ и $m \geq N(1)$ выполняется неравенство

$$| x_n - x_m | < 1$$

В частности, и для $m = N$

$$| x_n - x_N | < 1.$$

Тогда

$$| x_n | = | x_n - x_N + x_N | \leq | x_n - x_N | + | x_N | < 1 + | x_N | .$$

Возьмем

$$C = \max \{1 + | x_N |, | x_1 |, | x_2 |, ..., | x_{N-1} | \}.$$

Тогда для всех n справедливо неравенство

$$| x_n | \leq C.$$

ТЕОРЕМА.

Для того, чтобы ЧП имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство.

1. *Необходимость.*

Пусть существует

Докажем, что ЧП фундаментальна.

Согласно определению предела, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N} : \forall n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall m \geq N(\varepsilon) \ \rightarrow$

$$| x_n - a | < \varepsilon /2, \qquad | x_m - a | < \varepsilon /2.$$

Оценим модуль разности

$$| x_n - x_m | = | x_n - a + a - x_m | \leq | x_n - a | + | x_m - a | < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно, ЧП удовлетворяет условию Коши, то есть является фундаментальной.

2. *Достаточность.*

Пусть ЧП $\{x_n\}$ фундаментальна. Докажем, что она имеет предел.

Так как фундаментальная ЧП $\{x_n\}$ является ограниченной, то, по теореме Больцано-Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Пусть Докажем, что a – предел исходной ЧП.

Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0.$

По опр. предела последовательности $\exists\ N_1(\varepsilon) \in \boldsymbol{N} : \forall\, k \geq N_1(\varepsilon) \rightarrow$

По опр. фундаментальной ЧП $\exists\ N_2(\varepsilon) \in \boldsymbol{N} : \forall\, n \geq N_2(\varepsilon)\ ,\ \forall\, m \geq N_2(\varepsilon) \rightarrow$

$$| x_n - x_m | < \varepsilon/2.$$

Пусть $N(\varepsilon) = \max\{ N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Фиксируем номер $n_k \geq N(\varepsilon)$.

Тогда при $m = n_k$ и $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

Т.е. при $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

ПРИМЕР 1.

Докажем, что сходится числовая последовательность

Оценим модуль разности

Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$. Найдём $N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$: $\forall\, n \geq N(\varepsilon) \rightarrow$

Решая неравенство, получим $N(\varepsilon) = [\log_2(1/\varepsilon)] + 1$.

То есть $\forall\, n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall\, p \in \boldsymbol{N} \rightarrow |\, x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Согласно критерию Коши, числовая последовательность сходится.

ПРИМЕР 2.

Докажем, что числовая последовательность $\{x_n\}$, где

расходится.

Последовательность $\{x_n\}$ расходится, если не выполнено условие Коши, т.е.

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0: \quad \forall\ k \in \boldsymbol{N} \quad \exists\ n \geq k \quad \exists\ m \geq k: \ |x_n - x_m| \geq \varepsilon_0 .$$

Пусть задано $\forall\ k \in \boldsymbol{N}$. Положим $n = 2k$, $m = k$. Тогда

$$|x_n - x_m| = |x_{2k} - x_k|$$

Таким образом, условие

выполняется при $\varepsilon_0 = 1/2$. Следовательно, в силу критерия Коши, числовая последовательность расходится.

Спасибо за внимание!