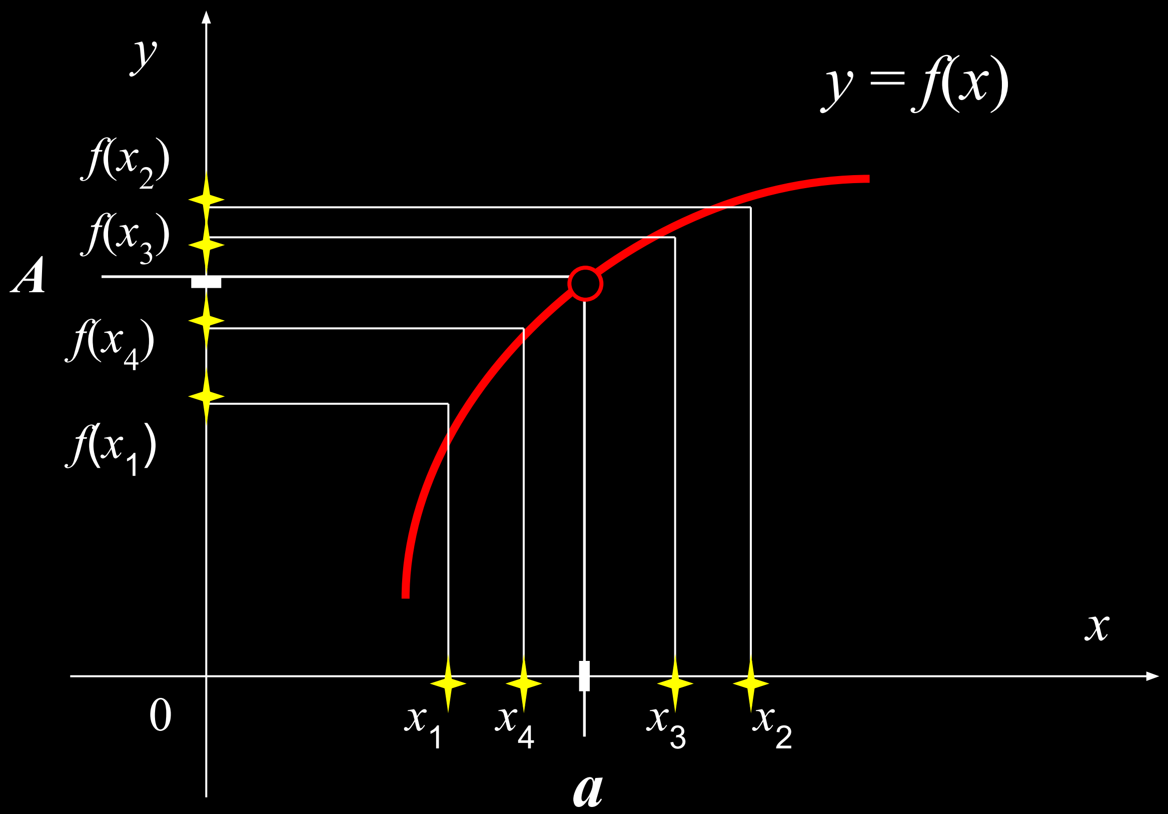
Раздел 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Лекция 2.1

- Два определения предела функции в точке, их эквивалентность.
- Критерий Коши существования предела функции.
- Односторонние пределы и пределы при стремлении аргумента к бесконечности.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Два определения предела функции в точке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Гейне).



Пусть функция $f(x)$ определена в

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a,

если для любой последовательности значений её аргумента

сходящейся к точке a

(т.е.),

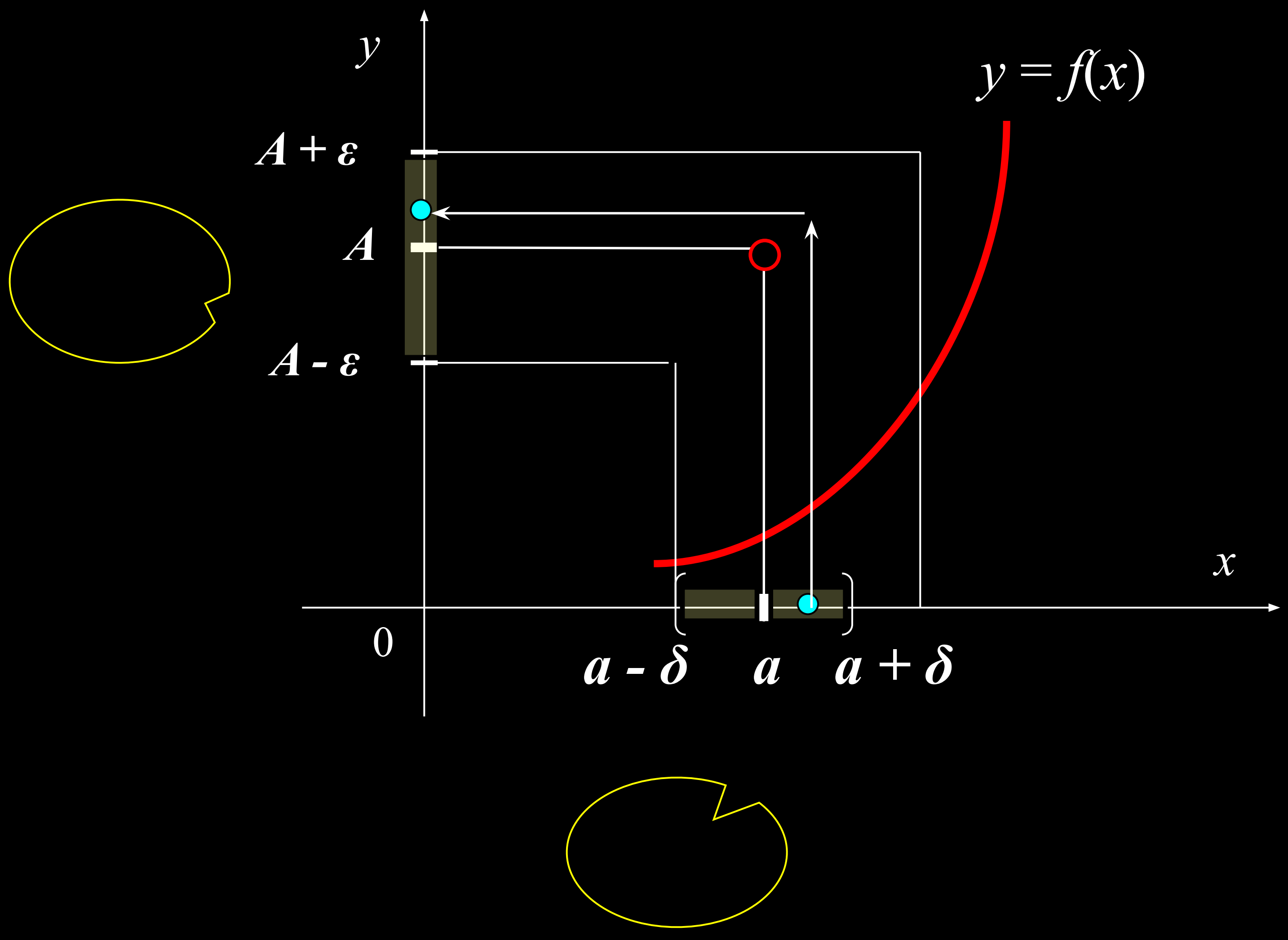
соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$

сходится к A

(т.е.).

В этом случае пишут

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (Коши).



Пусть функция $f(x)$ определена в

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon)>0$, такое что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < | x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Последнее определение можно записать с помощью логических символов, используя понятие окрестностей:

ТЕОРЕМА.

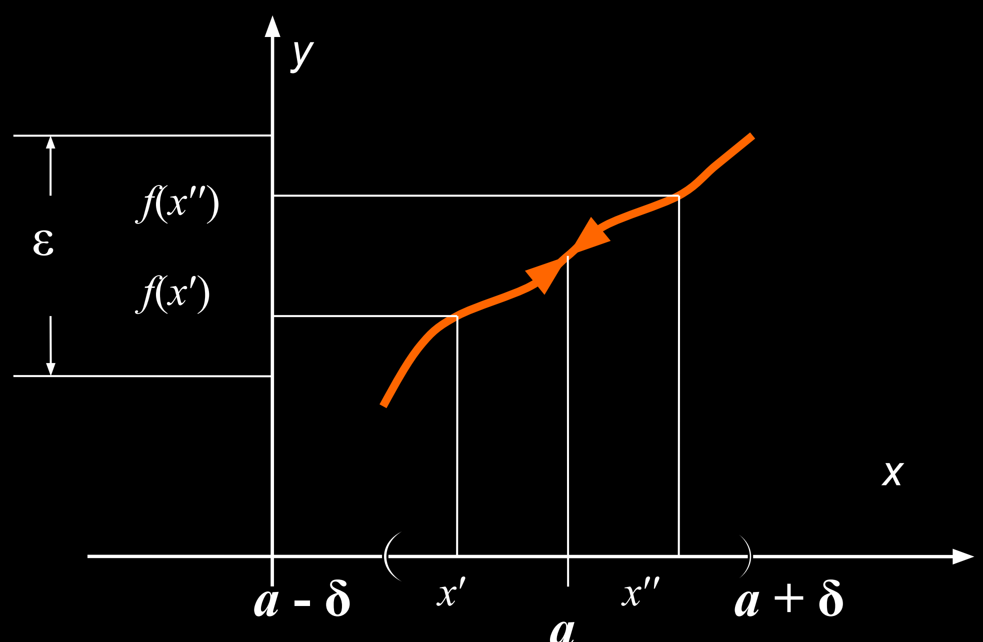
Два определения предела функции, по Коши и по Гейне, эквивалентны.

Критерий Коши существования предела функции.

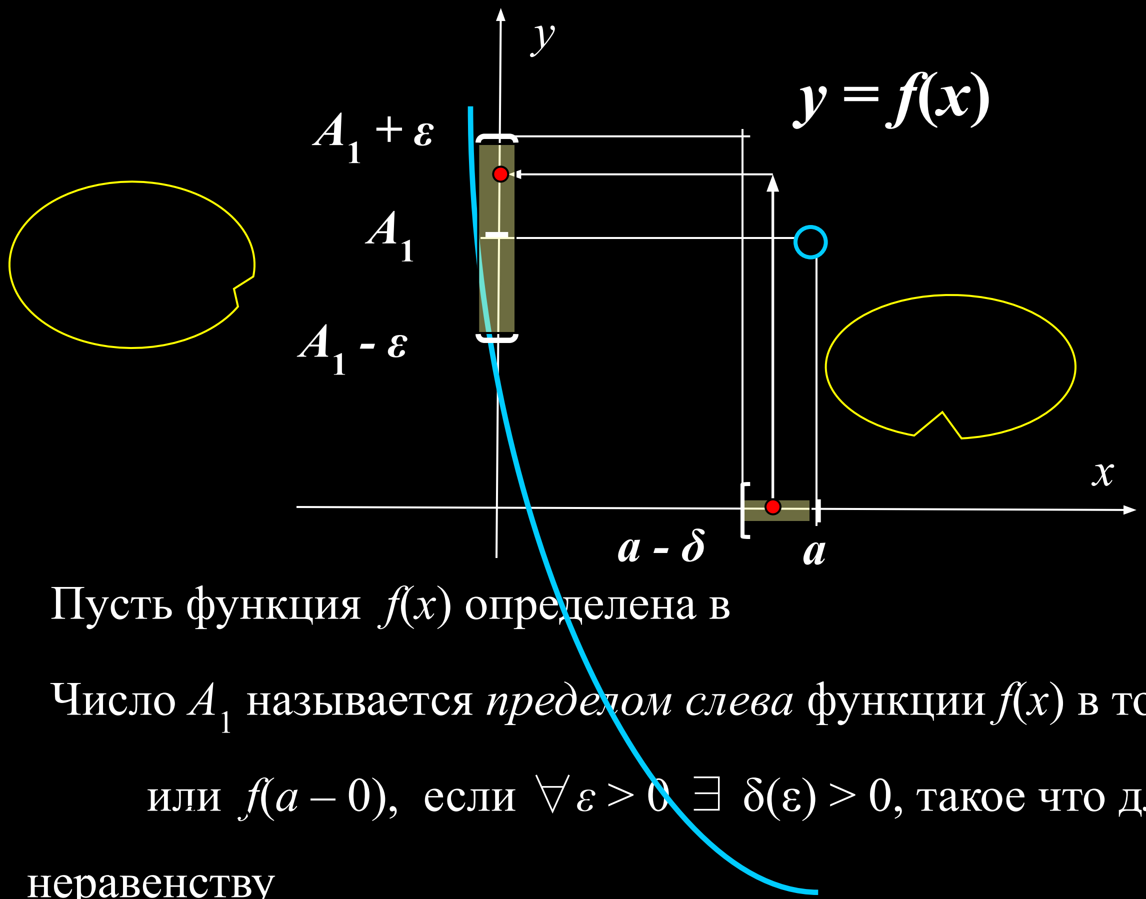
ТЕОРЕМА.

Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала такая проколотая δ-окрестность точки a , что для всех

выполнялось бы неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.



Односторонние пределы.



Пусть функция $f(x)$ определена в

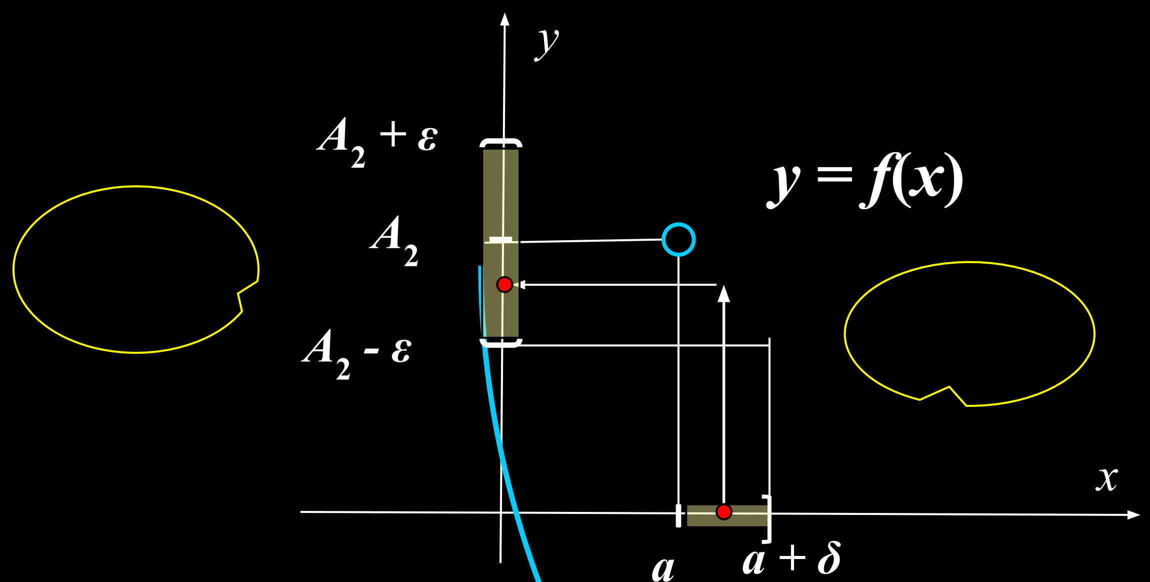
Число A_1 называется *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a и обозначается

или $f(a-0)$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$a - \delta < x < a,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon.$$



Пусть функция $f(x)$ определена в

Число A_2 называется *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a и обозначается

или $f(a+0)$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для всех x,

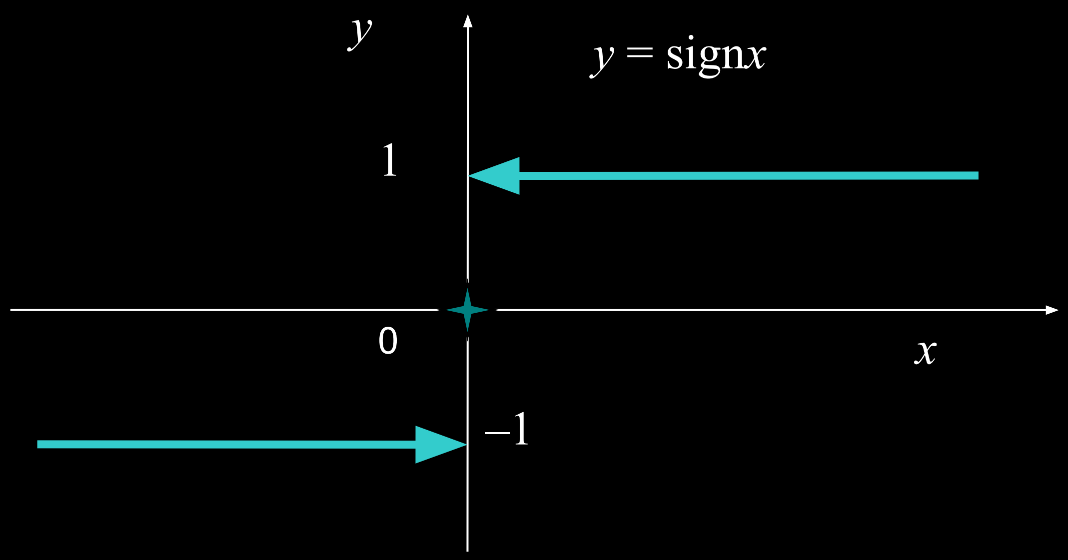
удовлетворяющих неравенству

$$a < x < a + \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

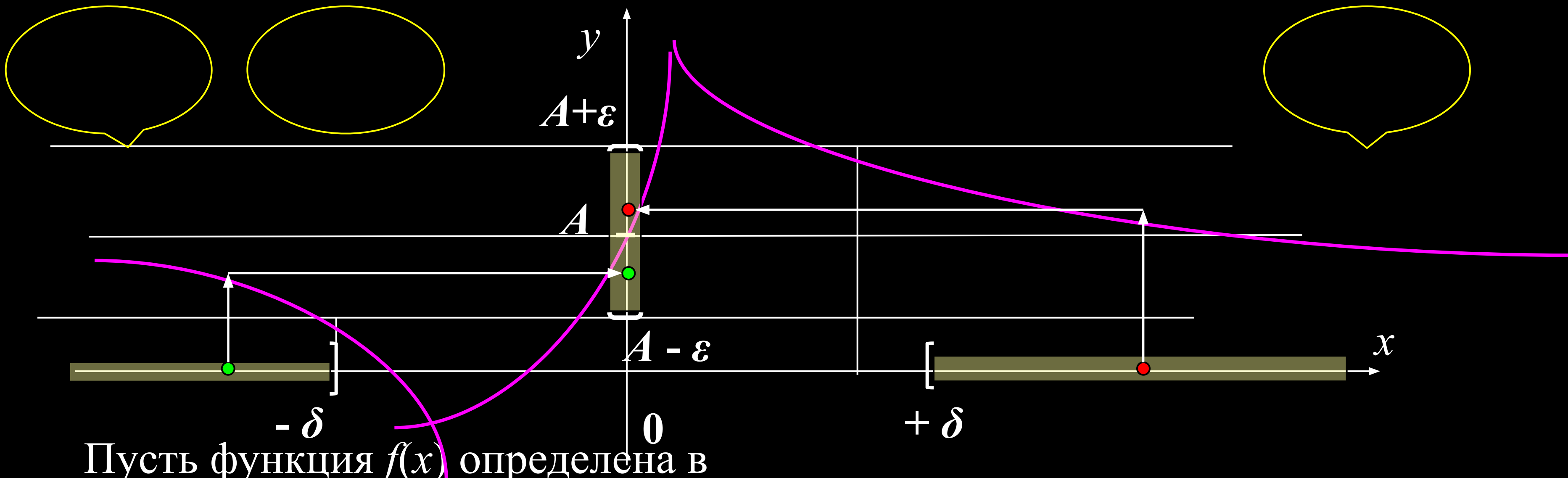
ПРИМЕР.



ТЕОРЕМА.

Для существования необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы этой функции в точке *a* слева и справа и

Пределы функции при стремлении аргумента к бесконечности.



Пусть функция $f(x)$ определена в

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, такое что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|\,x\,| > \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A\,| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при стремлении аргумента x к точке a, если

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая δ -окрестность точки a что для всех

ЗАМЕЧАНИЕ.

Пользуясь определением предела функции в точке a и определением бесконечно малой при $x \to a$ нетрудно показать, что

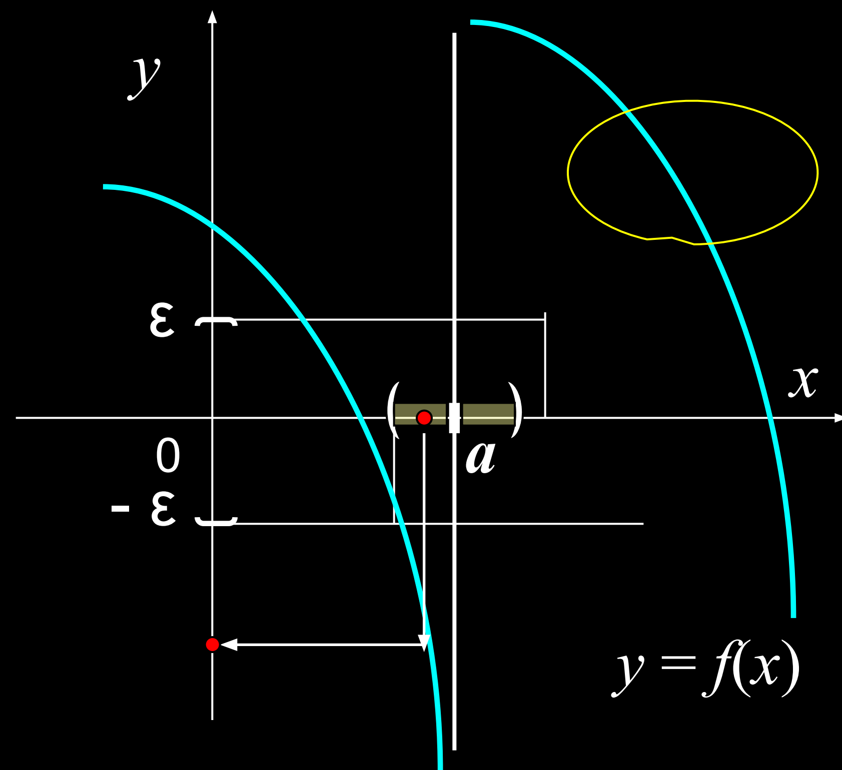
$$f(x) = A + \alpha(x),\text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при стремлении аргумента x к точке a, если для любого ε > 0 существует такая проколотая δ - окрестность точки a что для всех

выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

В этом случае пишут



Аналогично определяются пределы

а также пределы

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

2. Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

3. Пусть $\alpha(x) \neq 0$ в

   $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ функция тогда и только тогда, когда

   $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!