Лекция 2.2

- Свойства функций, имеющих предел.
- Асимптоты графика функции и методы их отыскания.

Свойства функций, имеющих предел.

ТЕОРЕМА **1.**

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то найдется такая проколотая окрестность точки a, в которой функция ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть

Тогда, по определению предела, для $\varepsilon = 1$ найдется такая проколотая δ-

окрестность точки a , что для всех

выполняется неравенство

$$A - 1 < f(x) < A+1.$$

Это и означает ограниченность функции на множестве

ТЕОРЕМА **2.**

Если функция $f(x)$ имеет в точке a предел, отличный от нуля, то найдется такая проколотая окрестность точки a, в которой функция сохраняет знак предела.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть

Тогда, по определению предела, для

найдется такая проколотая δ-окрестность точки a , что

Если A > 0, то из левого неравенства $\Rightarrow$

если A < 0, то из правого неравенства $\Rightarrow$

ТЕОРЕМА **3.**

Если $f(x) \geq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a и

то $A \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Воспользуемся определением предела по Гейне.

Возьмем числовую последовательность

сходящуюся к a.

Тогда

и $f(x_n) \geq 0$ для всех n.

Следовательно, по соответствующей теореме для числовых

последовательностей, $A \geq 0$.

ТЕОРЕМА **4.** (*О двух милиционерах.*)

Если в некоторой проколотой окрестности точки a справедливы

неравенства $\boldsymbol{f(x) \le g(x) \le \phi(x)}$

и существуют то

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Воспользуемся определением предела по Гейне. Возьмем

сходящуюся к a. Тогда

и $f(x_n) \le g(x_n) \le \phi(x_n)$ для всех n. Следовательно по теореме о двух

милиционерах для числовых последовательностей

т.е. существует

ТЕОРЕМА **5.**

1. Если $f(x)$ = с – постоянная в некоторой проколотой окрестности точки a, то
2. Если существуют

   тогда существуют и

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Воспользуемся определением предела по Гейне. Возьмем ЧП

   сходящуюся к *a*. Тогда $f(x_n) = c$ для всех n и

   следовательно

2. Воспользуемся определением предела по Гейне. Возьмем ЧП

   сходящуюся к *a*. Тогда

a) по теореме о пределе суммы для ЧП

   то есть

СЛЕДСТВИЯ из теорем 3, 5.

1. Если $f(x) \geq B$ в некоторой проколотой окрестности точки a

   и то $A \geq B$.

2. Если существует то для любого числа C

Арифметика бесконечностей.

Введем обозначения:

- $C = \text{const} \neq 0$.
- ∞ – бесконечно большая функция произвольного знака;
- $+\infty$ – бесконечно большая положительная функция;
- $-\infty$ – бесконечно большая отрицательная функция;
- 0 – бесконечно малая функция;
- 1 – функция, предел которой равен 1.

Тогда имеют место следующие соотношения:

- $C \cdot \infty = \infty$
- $C/0 = \infty$
- $C/\infty = 0$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $(+\infty)^C = +\infty$, если $C>0$ (0, если $C < 0$)
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

Неопределенные ситуации, требующие исследования.

- $0/0$
- $0 \cdot \infty$
- ∞/∞
- $\infty - \infty$
- 1^{∞}
- 0^{0}
- ∞^{0}

Асимптоты графика функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ АСИМПТОТЫ.

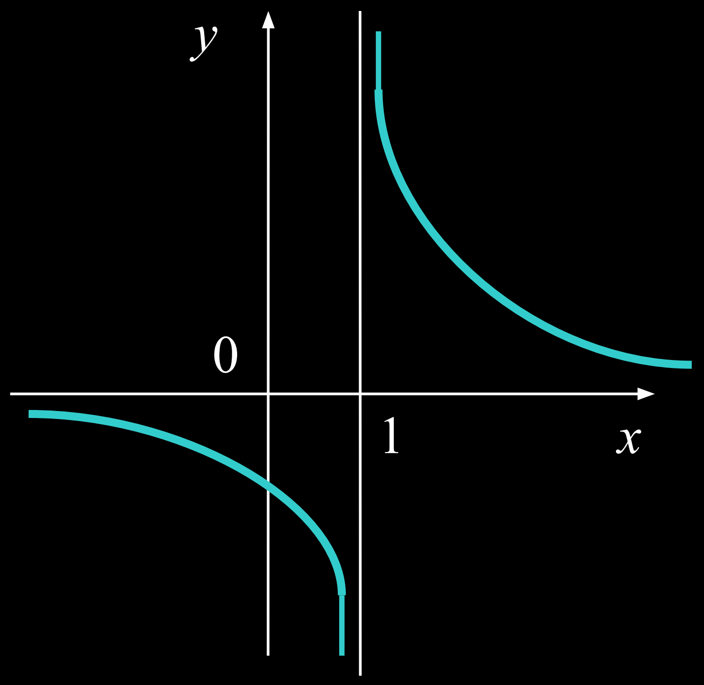
Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если выполнено хотя бы одно из условий:

ПРИМЕР.

Прямая $x = 1$ является вертикальной

асимптотой графика функции

так как



ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАКЛОННОЙ АСИМПТОТЫ.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если

СПОСОБ ОТЫСКАНИЯ НАКЛОННОЙ АСИМПТОТЫ.

ТЕОРЕМА.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

Доказательство.

1. Пусть

   Тогда

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x),$$

   где $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to +\infty$. Отсюда получим, что

2. Пусть

Тогда

$f(x) - (kx + b) = (f(x) - kx) - b = b + \alpha(x) - b = \alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Для случая горизонтальной асимптоты теорема формулируется так:

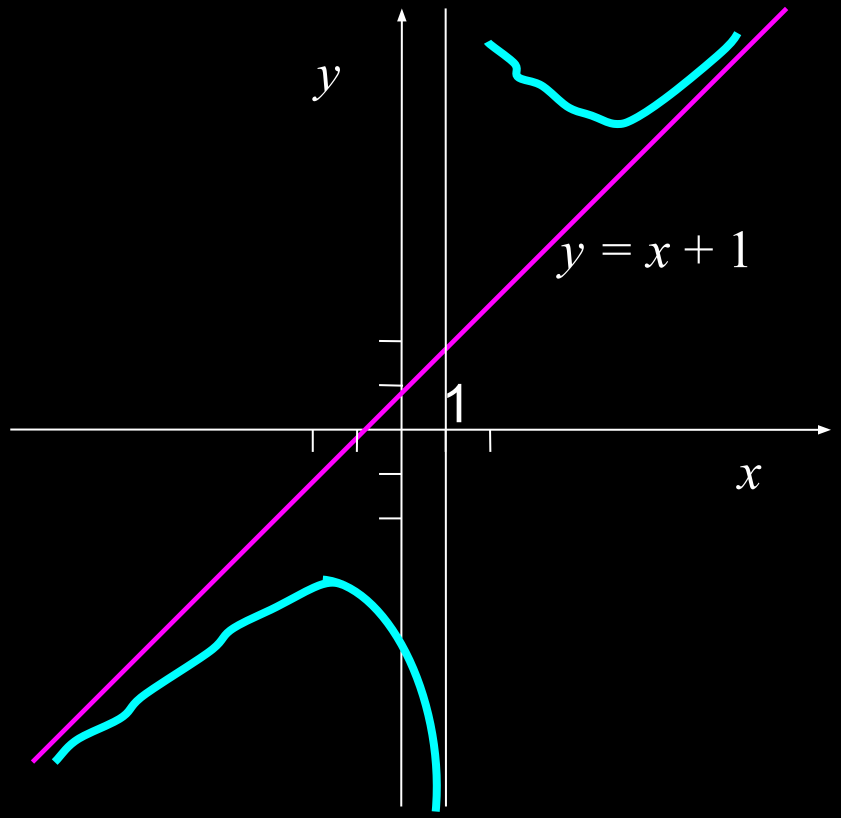
Для того, чтобы прямая $y = b$ была асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

ПРИМЕР.

Найдем наклонные асимптоты графика функции

Для этого вычислим необходимые пределы:

Аналогично при $x \to -\infty$.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!