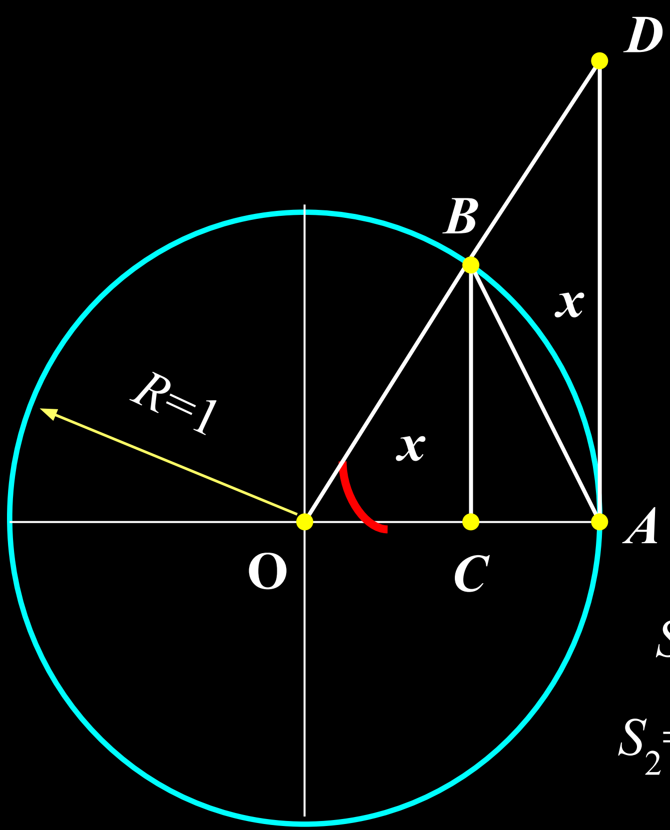
Лекция 2.3

- Замечательные пределы и следствия из них.
- Сравнение функций
  - Функции одного порядка. Символ «О-большое»
  - Эквивалентные функции
  - Функция, бесконечно малая по сравнению с другой функцией. Символ «о-малое»
- Асимптотическое представление функций

Первый замечательный предел

Рассмотрим круг единичного радиуса с центром в точке O.



Пусть

Тогда $\angle AOB = x$ (рад.),

Пусть S_1 – площадь треугольника *AOB*,

S_2 – площадь сектора *AOB*,

S_3 – площадь треугольника *AOD*.

$S_1 = 0{,}5 \cdot (OA)^2 \cdot \sin x = 0{,}5 \cdot \sin x,$

$S_2 = 0{,}5 \cdot (OA)^2 \cdot x = 0{,}5 \cdot x,$

$S_3 = 0{,}5 \cdot OA \cdot DA = 0{,}5 \cdot \mathrm{tg}\, x.$

$S_1 < S_2 < S_3$

Так как

то последнее неравенство справедливо и для

Отсюда, в частности, следует, что

Оценим разность:

Итак, по теореме о двух милиционерах, имеем:

Второй замечательный предел

Напомним, что

Далее покажем, что

Пусть $x > 1$. Положим $n = [x]$. Тогда $x = n + \alpha$, где $0 \leq \alpha < 1$.

Тогда

Найдем пределы последовательностей в левой и правой частях неравенства:

Следовательно, по теореме «о двух милиционерах»

Покажем, что

Пусть $x < -1$. Сделаем замену $x = -y$. Тогда

Итак, мы установили, что

Замена переменной при вычислении пределов.

ТЕОРЕМА.

Пусть существуют

Пусть, кроме того, $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности точки a.

Тогда в точке a существует предел сложной функции

ПРИМЕР.

Следствия замечательных пределов.

Доказать, что:

1)

Доказательство.

2)

Доказательство.

3)

Доказательство.

Пусть $\arcsin x = y$.

Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$; $x = \sin y$.

4)

Доказательство.

Пусть $\mathrm{arctg}\, x = y$.

Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$; $x = \mathrm{tg}\, y$

5)

Доказательство.

6)

Доказательство.

$\to \ln e = 1.$

$e, \ x \to 0$

7)

Доказательство.

8)

Доказательство.

Пусть $e^x - 1 = y$.

Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$; $x = \ln(1+y)$.

9)

Доказательство.

10)

Доказательство.

11)

Доказательство.

Пусть $y = (1+x)^a - 1 = e^{a\ln(1+x)} - 1$.

Тогда $(1+x)^a = y + 1 \;\Rightarrow\; a\ln(1+x) = \ln(1+y)$.

$\to a$ при $x \to 0$.

1 при $x \to 0$

Сравнение функций.
Функции одного порядка. Символ «О-большое».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и отличны от нуля во всех точках этой окрестности. Эти функции называются *функциями одного порядка* при $x \to a$, если существует

В этом случае будем использовать обозначения:

$$f(x) = \mathrm{O}(\underline{\mathrm{g}(x)}) \text{ и } \mathrm{g}(x) = \mathrm{O}(f(x)) \text{ при } x \to a.$$

(читается «О-большое от g(x)»)

ПРИМЕР.

$f(x) = 100 + x$; $\mathrm{g}(x) = \cos x$.

Это функции одного порядка при $x \to 0$, так как

Эквивалентные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и отличны от нуля во всех точках этой окрестности. Эти функции называются *эквивалентными* (асимптотически равными) при $x \to a,$ если

В этом случае используют обозначение: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

ПРИМЕРЫ.

1) $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;

2) $\sim x^2$ при $x \to \infty$.

Если сравниваемые функции обе бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a$, то их эквивалентность означает, что скорость их стремления к нулю или к бесконечности одинакова.

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ функция. Тогда при $x \to a$

- $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
- $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
- $\mathrm{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
- $\mathrm{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
- $1 - \cos(\alpha(x)) \sim \alpha^2(x)/2$
- $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
- $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
- $\mathrm{sh}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
- $(1 + \alpha(x))^k - 1 \sim k\alpha(x)$

ТЕОРЕМА. (*Замена функций на эквивалентные при вычислении предела.*)

Пусть $f(x) \sim f_1(x),\ \ g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a.$

Тогда, если существует , то существует и ,

причем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Последнее преобразование правомерно, так как обе функции отличны от нуля в проколотой окрестности точки *a*.

Поскольку обе части равенства равноправны, то предел, стоящий в левой части равенства, существует тогда и только тогда, когда существует предел, стоящий в правой части.

ПРИМЕРЫ.

1)

2)

Если бы мы формально заменили функции, стоящие в числителе дроби, на эквивалентные, то получили бы следующий результат:

Итак, **в случае суммы или разности функций замену их на эквивалентные при вычислении предела производить нельзя!!!**

Понятие функции, бесконечно малой по сравнению с другой функцией. Символ «о-малое».

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и $g(x)$ отличная от нуля во всех точках этой окрестности. Если

то функция $f(x)$ называется бесконечно малой по сравнению с g(x) при $x \to a$. При этом используется обозначение

$$f(x) = \mathrm{o}(\mathrm{g}(x)) \text{ при } x \to a.$$

(читается «о-малое от g(x)»)

В частности запись $f(x) = \mathrm{o}(1)$ означает, что $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$.

ПРИМЕР.

$x^4 = \mathrm{o}(x^2)$ при $x \to 0$, так как

Свойства символа «о-малое».

Отметим некоторые важные свойства символа $o(g(x))$, считая, что $x \to a$, а равенства, содержащие этот символ, читаются слева направо (здесь C – постоянная):

- $\mathbf{o(C \cdot g(\mathit{x})) = o(g(\mathit{x}))}$
- $\mathbf{C \cdot o(g(\mathit{x})) = o(g(\mathit{x}))}$
- $\mathbf{o(g(\mathit{x})) + o(g(\mathit{x})) = o(g(\mathit{x}))}$
- $\mathbf{o(\ g(\mathit{x}) + o(g(\mathit{x}))\ ) = o(g(\mathit{x}))}$
- $\mathbf{o(g^{\mathit{m}}(\mathit{x})) \cdot o(g^{\mathit{n}}(\mathit{x})) = o(g^{\mathit{m+n}}(\mathit{x}))} \quad \mathbf{(\ \mathit{m}, \mathit{n} \in N)}$
- $\mathbf{g^{\mathit{m}\text{-}1}(\mathit{x}) \cdot o(g(\mathit{x})) = o(g^{\mathit{m}}(\mathit{x}))} \quad \mathbf{(\mathit{m} \in N)}$
- $\mathbf{(o(g(\mathit{x}))^{\mathit{n}} = o(g^{\mathit{n}}(\mathit{x}))} \quad \mathbf{(\mathit{n} \in N)}$
- $\mathbf{o(g^{\mathit{n}}(\mathit{x})) / g(\mathit{x}) = g^{\mathit{n}\text{-}1}(\mathit{x})} \quad \mathbf{(\mathit{n} \in N,\ \ g(\mathit{x}) \neq 0)}$

Асимптотическое представление функций.

ТЕОРЕМА.

$f(x) \sim \mathrm{g}(x)$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = \mathrm{g}(x) + o(\mathrm{g}(x))$ при $x \to a$.

Доказательство.

- Пусть $f(x) \sim \mathrm{g}(x)$ при $x \to a$, то есть

  Это значит, что

  То есть $f(x) = \mathrm{g}(x) + o(\mathrm{g}(x))$ при $x \to a$.

- Пусть $f(x) = \mathrm{g}(x) + o(\mathrm{g}(x))$ при $x \to a$.

  Тогда

Другая форма таблицы эквивалентных бесконечно малых.

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда при $x \to a$

- $\sin(\alpha(x)) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$
- $\arcsin(\alpha(x)) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$
- $\mathrm{tg}(\alpha(x)) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$
- $\mathrm{arctg}(\alpha(x)) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$
- $1 - \cos(\alpha(x)) = \alpha^2(x)/2 + o(\alpha^2(x))$
- $\ln(1+\alpha(x)) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$
- $e^{\alpha(x)} - 1 = \alpha(x) + o(\alpha(x))$
- $\mathrm{sh}(\alpha(x)) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$
- $(1 + \alpha(x))^k - 1 = k\alpha(x) + o(\alpha(x))$

ПРИМЕР.

Используя асимптотические представления функций, найдем предел

Спасибо за внимание!