Лекция 2.4

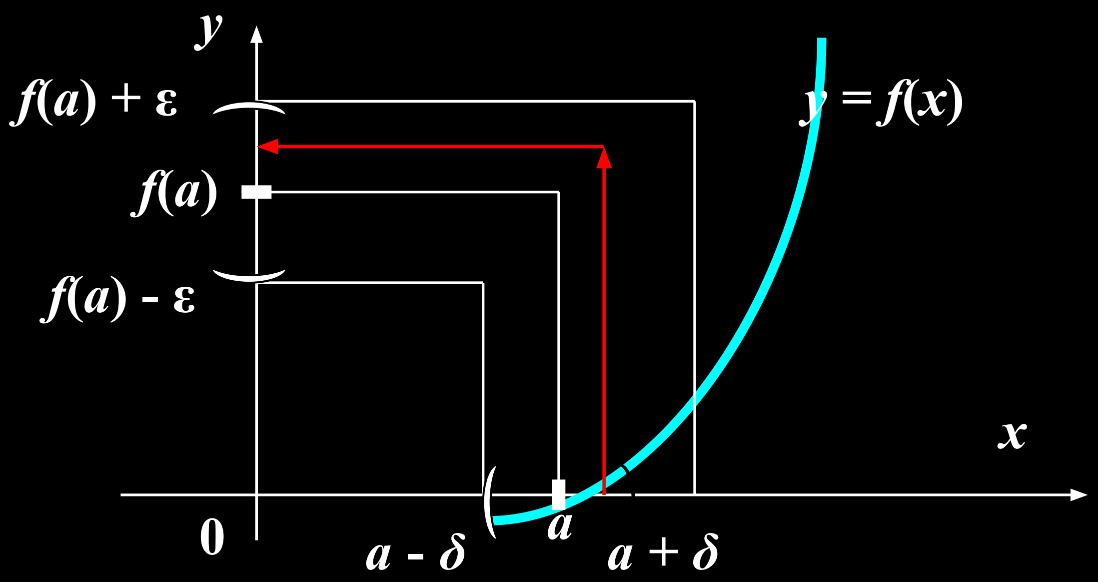
- Определение непрерывности функции в точке
- Точки разрыва
- Свойства функций, непрерывных в точке
- Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке
  - Об ограниченности непрерывной на отрезке функции
  - О достижимости точных граней функцией, непрерывной на отрезке

Определение непрерывности функции в точке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

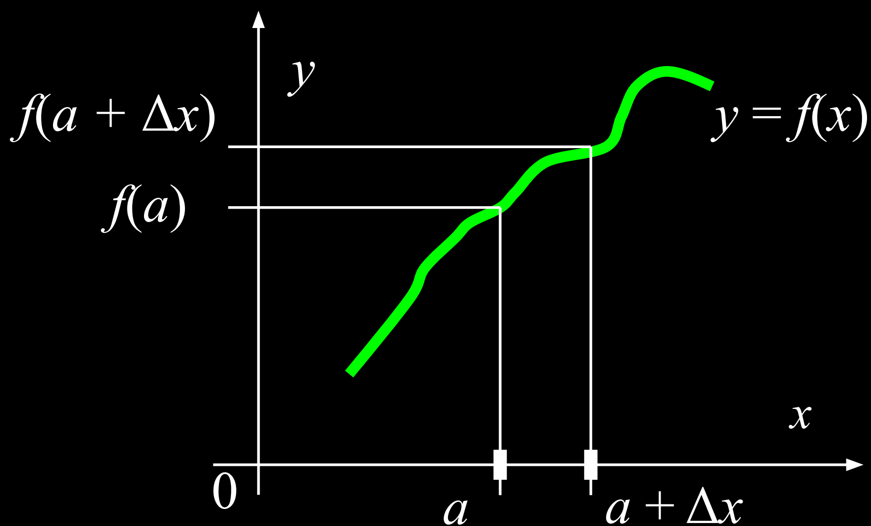
Функция $f(x)$, определенная в некоторой полной окрестности точки a, называется непрерывной в точке a, если

то есть если



Обозначим $\Delta x = x - a$ – приращение аргумента. Тогда $x = a + \Delta x$. И непрерывность функции в точке a означает, что приращение функции

$$f(a + \Delta x) - f(a) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$



ПРИМЕР.

Покажем, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке a своей области определения.

Найдем приращение функции

$$f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2 \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно, функция непрерывна в точке a.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $f(x)$, определенная в левой полуокрестности точки a, называется непрерывной в точке a слева, если

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $f(x)$, определенная в правой полуокрестности точки a, называется непрерывной в точке a справа, если

ТЕОРЕМА.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой полной окрестности точки a, непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Точки разрыва

Пусть функция $f(x)$, определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Точка a называется точкой разрыва функции в следующих случаях:

1. Функция не определена в этой точке;
2. Функция определена в точке a, но

   a) не существует

   b) существует

Различают следующие три типа точек разрыва:

1. Устранимый разрыв.

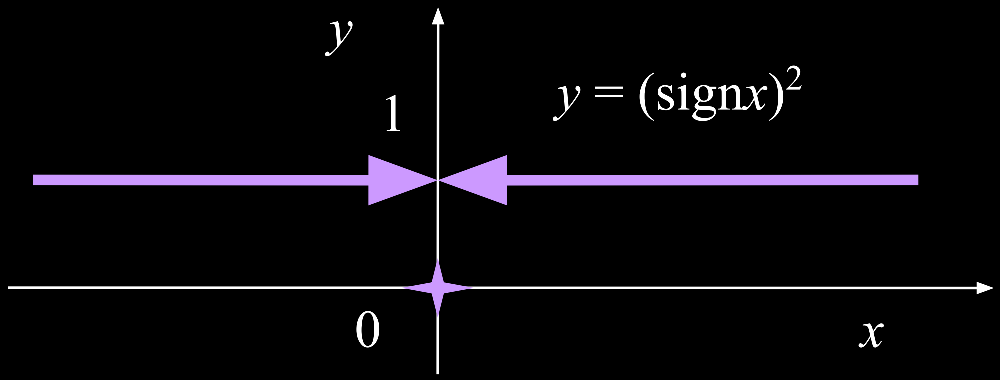
Если существует   но функция не определена в этой точке

или   то a называют *точкой устранимого разрыва*.

ПРИМЕРЫ.

1)

2) $f(x) = (\mathrm{sign}\,x)^2$;



2. Разрыв первого рода.

Если в точке a существуют

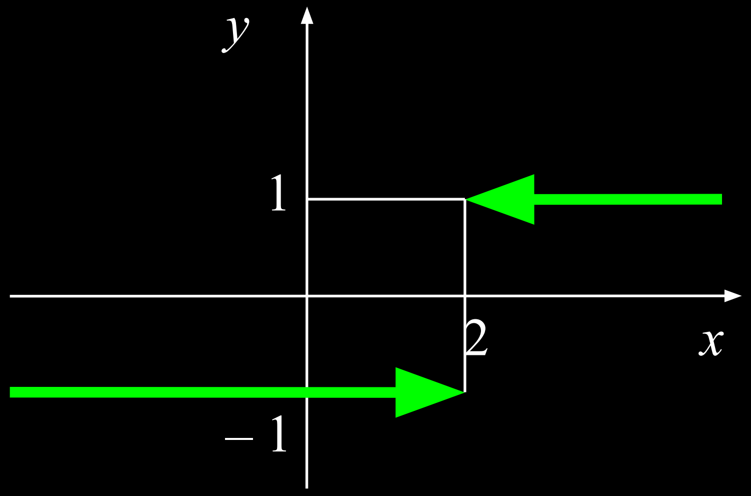
но

$$f(a-0) \neq f(a+0),$$

то это *точка разрыва первого рода*.

Разность $f(a+0) - f(a-0)$ называется скачком функции в точке a.

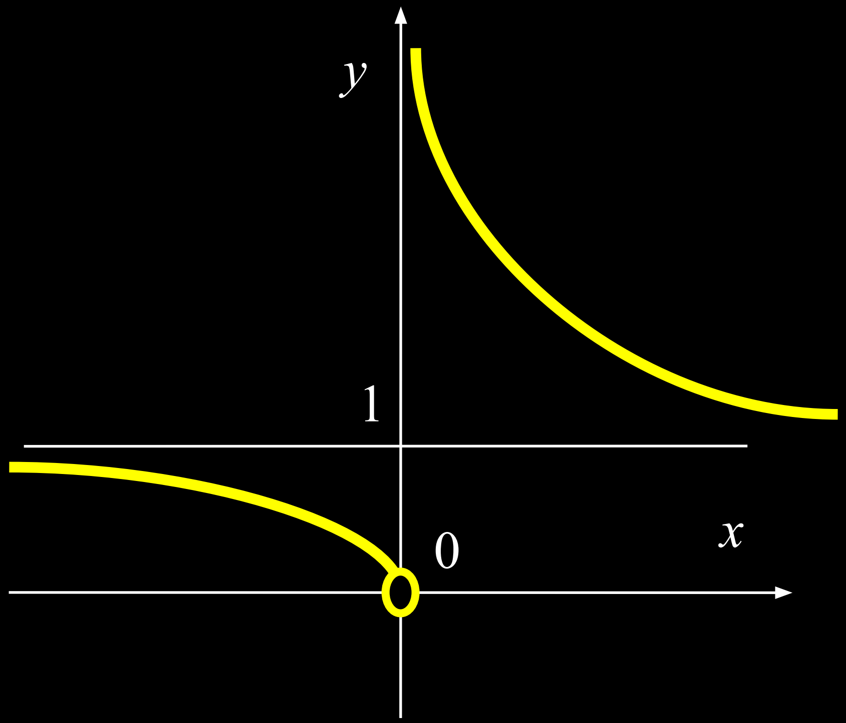
ПРИМЕР.



3. Разрыв второго рода.

Если в точке *a* не существует хотя бы один из односторонних пределов, то это *точка разрыва второго рода*.

ПРИМЕР.



Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функция непрерывна в точке a, то существует такая окрестность этой точки, в которой функция ограничена.

2. Если функция непрерывна в точке a и отлична от нуля, то существует такая окрестность этой точки, в которой функция сохраняет знак числа $f(a)$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то их сумма, произведение и частное (если $g(a) \neq 0$) непрерывны в этой точке.

4. Если функция $z = f(y)$ непрерывна в точке y_o, а функция $y = \phi(x)$ непрерывна в точке x_o, причем $y_o = \phi(x_o)$, то в некоторой окрестности точки x_o определена сложная функция $f(\phi(x))$, непрерывная в точке x_o.

Доказательство.

Свойства 1 – 3 являются следствием определения непрерывности и соответствующих свойств пределов функции.

Докажем свойство 4.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$.

В силу непрерывности функции $z = f(y)$ в точке y_o найдется число

В силу непрерывности функции $y = \phi(x)$ в точке x_o для найденного числа ρ найдется число

Итак,

Это значит, что, в силу определения непрерывности, функция $f(\phi(x))$, определенная в окрестности точки x_o, непрерывна в точке x_o.

Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке отрезка, непрерывна в точке a справа, в точке b слева.

Множество функций, непрерывных на $[a,b]$, обозначается как $C[a,b]$.

1. Об ограниченности непрерывной на отрезке функции

ТЕОРЕМА (первая теорема Вейерштрасса)

Если $f(x) \in C[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

Предположим, что функция не ограничена сверху на отрезке, т.е. для любого числа $n \in \mathrm{N}$ найдется $x_n \in [a, b]$, такое что $f(x_n) > n$. Т.е. найдется такая последовательность значений аргумента $\{x_n\}$, что соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ будет бесконечно большой. Эта последовательность значений аргумента ограничена, значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, причем

В силу непрерывности функции

Но

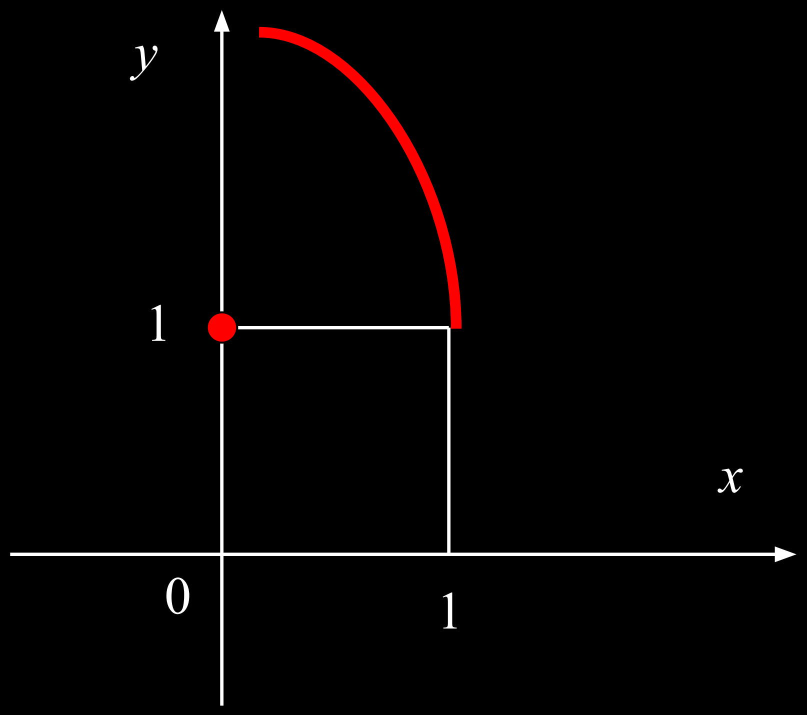
как подпоследовательность бесконечно большой последовательности.

Полученное противоречие доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1) Теорема не верна в случае интервала, а не отрезка. Например, функция $f(x)=1/x$ непрерывна на $(0, 1]$, но не ограничена на этом интервале.

2) Теорема не верна для функции, разрывной на отрезке, например



2. О достижимости функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней

ТЕОРЕМА (вторая теорема Вейерштрасса)

Если $f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точной нижней и верхней граней.

Доказательство.

Так как функция непрерывна на отрезке, то множество ее значений ограничено и, следовательно, имеет точную верхнюю и нижнюю грани. Пусть

Требуется доказать, что на отрезке найдутся точки, значения функции в которых равны m и M. Предположим, что $f(x) < M$ во всех точках отрезка. Введем вспомогательную функцию

Эта функция непрерывна на отрезке, а значит и ограничена сверху на этом отрезке, то есть существует C > 0, такое что

откуда

То есть число M не является наименьшей из верхних граней, что противоречит определению точной верхней грани.

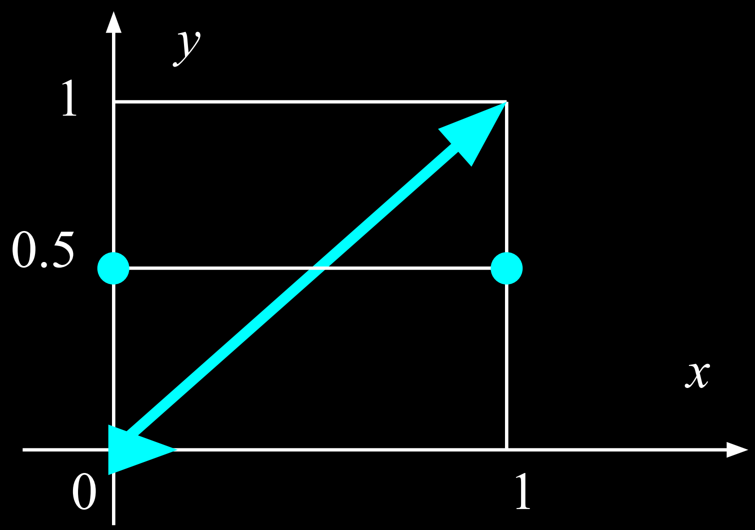
Следовательно, найдется такая точка $x_1 \in [a,b]$, что $f(x_1)$=M.

Аналогично доказывается для нижней грани.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1)Теорема не верна в случае интервала, а не отрезка. Например, функция $f(x)= x$ непрерывна на (0, 1), но не достигает на этом интервале своих точных граней.

2) Теорема не верна для функции, разрывной на отрезке, например



Спасибо за внимание!