Раздел 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Лекция 3.1

- **Дифференцируемость функции в точке.**
- **Связь дифференцируемости и непрерывности.**
- **Геометрический и физический смысл производной и дифференциала.**
- **Правила дифференцирования.**

Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $f(x)$, определенная в $U(x_0)$, называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение при переходе из точки x_o в точку $x = x_0+\Delta x$ можно представить в виде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

где $A(x_0)$ – не зависит от Δx .

Главная линейная относительно Δx часть приращения функции $A(x_0)\Delta x$ – называется *дифференциалом* функции в точке x_0 при приращении Δx и обозначается $df(x_0; \Delta x)$ или $df(x_0)$ или df или dy.

Таким образом

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0; \Delta x) + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Определение производной функции в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть функция $f(x)$ определена в $U(x_0)$ и x – произвольная точка этой окрестности. Если существует предел отношения

при $x \to x_0$, то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, то есть

Пусть $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента при переходе из точки x_0 в точку x, а $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ – соответствующее приращение функции. Тогда

предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в этой точке.

ТЕОРЕМА.

Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.

При этом дифференциал и производная связаны равенством:

$$df(x_0;\Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

Доказательство.

- **Необходимость.**

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_o, то есть

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \mathrm{A}(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

откуда

$$\Delta y / \Delta x = \mathrm{A}(x_0) + o(1) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

следовательно существует

то есть функция имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) = \mathrm{A}(x_0)$.

- **<u>Достаточность.</u>**

Пусть $f(x)$ имеет производную в точке x_o, то есть существует

Следовательно

$$\Delta y / \Delta x = f'(x_0) + o(1) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

откуда

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

то есть функция дифференцируема в точке x_0 и

$$df(x_0; \Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

ЗАМЕЧАНИЕ.

Операция вычисления производной называется *дифференцированием.*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Приращение Δx часто обозначают символом dx и называют *дифференциалом независимой переменной*. Таким образом, дифференциал функции в точке x_0 можно записать в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx.$$

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то ее дифференциал dy – функция от x и dx:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Отсюда, в частности, получается выражение для производной

То есть производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Непрерывность дифференцируемой функции.

ТЕОРЕМА.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

Пусть существует

Тогда

Отсюда получим, что

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + o(1))(x - x_0) \to 0 \text{ при } x \to x_0 .$$

то есть $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

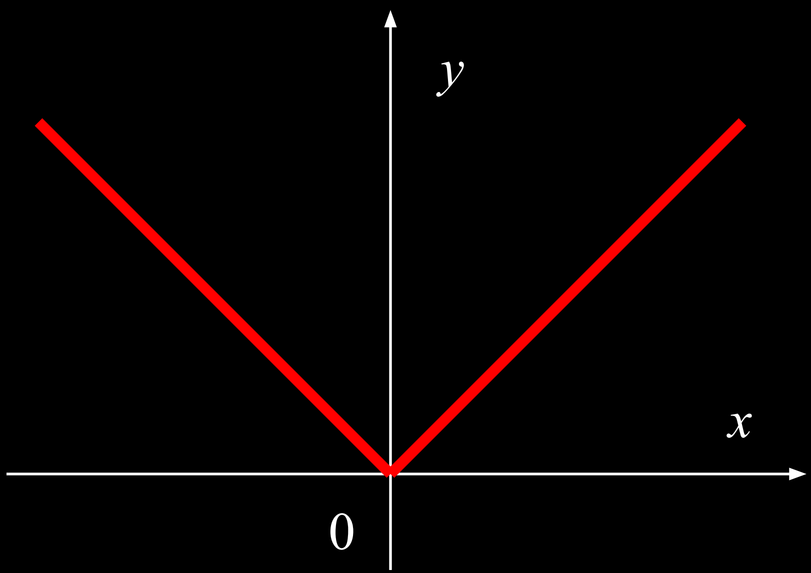
ЗАМЕЧАНИЕ.

Непрерывность функции в точке не является достаточным условием существования в этой точке производной.

Пример 1. $f(x) = |x|$.

Функция непрерывна в точке $x = 0$.

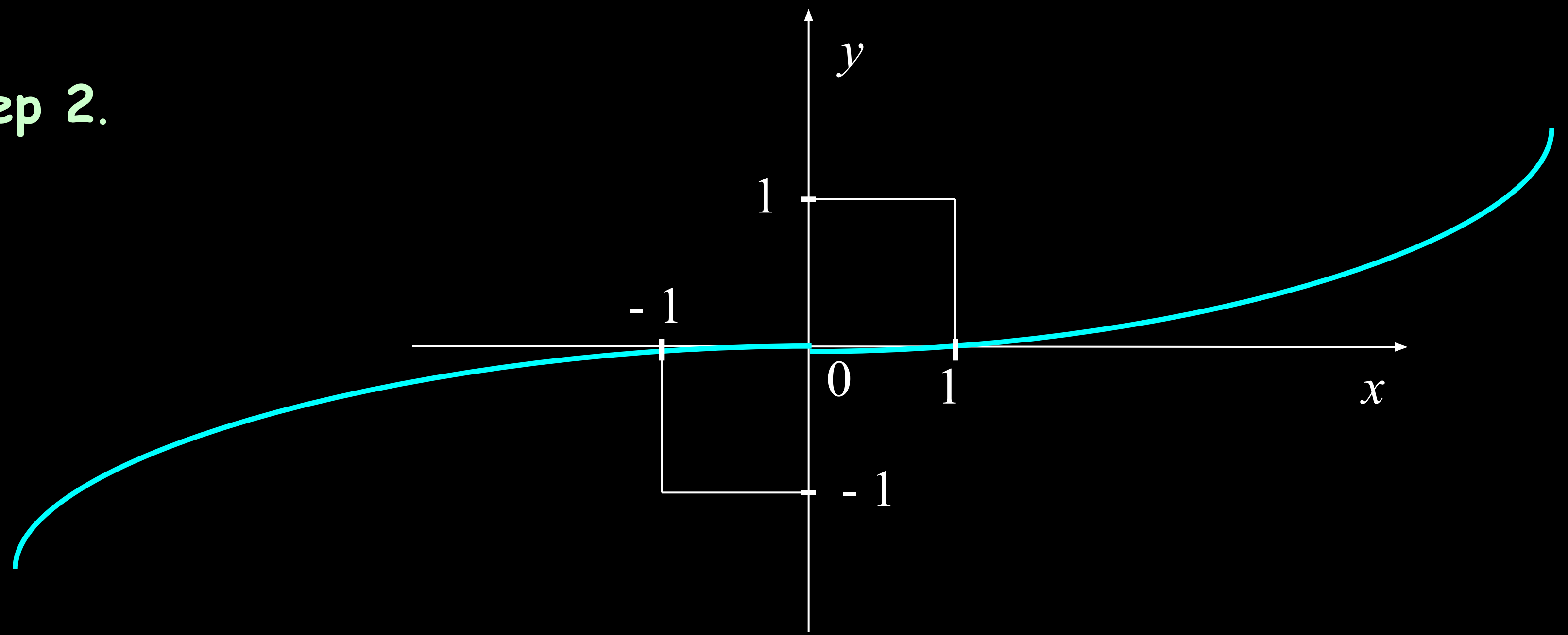
Рассмотрим



Предел не существует, так как

Итак, функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, хотя непрерывна в этой точке.

Пример 2.



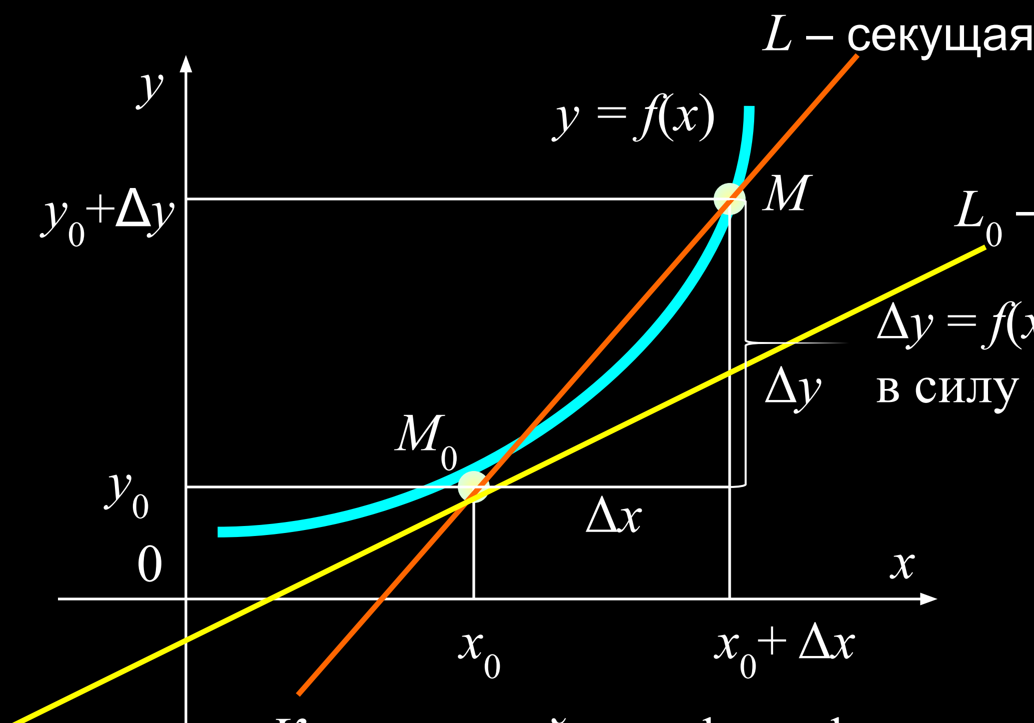
$\to 0$ при $x \to 0$. Т.е. $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

$\to \infty$ при $x \to 0$.

Т.е. $f(x)$ не имеет производной в точке $x = 0$ и, следовательно, не дифференцируема в этой точке.

Геометрический смысл производной и дифференциала.

Пусть функция $f(x)$ определена в $U(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0.



$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей L при $\Delta x \to 0$.

Если функция дифференцируема в точке x_0, то в уравнении секущей

$$\Delta y/\Delta x \to f'(x_0) \text{ при } \Delta x \to 0$$

и уравнение касательной имеет вид

$$\boxed{y = y_0 + f'(x_0)\,(x - x_0).}$$

Если же

$$\Delta y/\Delta x \to \infty \text{ при } \Delta x \to 0,$$

то прямая

$$x = x_0\,,$$

получающаяся из уравнения секущей, называется *вертикальной касательной* к графику функции в точке M_0.

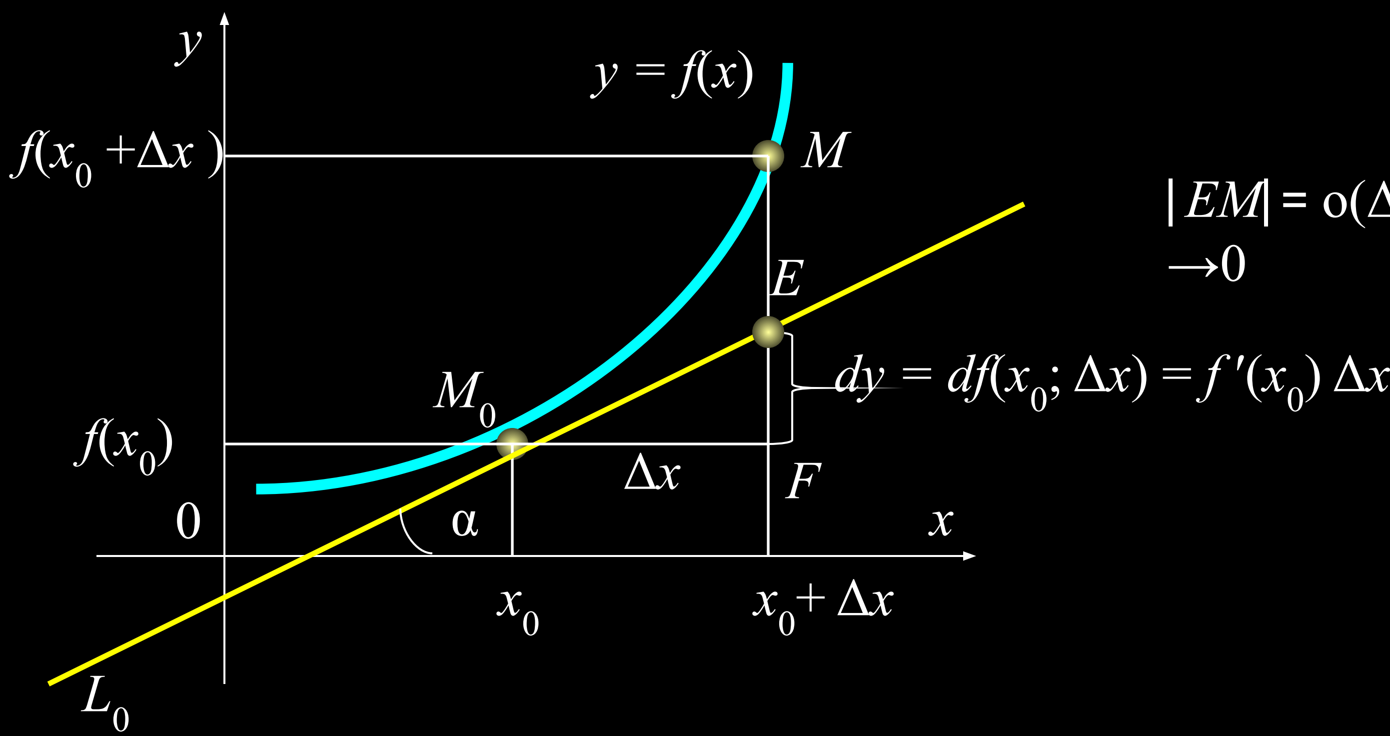
Нормалью к графику функции в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной, проходящая через точку M_0. Ее уравнение имеет вид

$$\boxed{y = y_0 - 1/f'(x_0)\,(x - x_0).}$$

Из уравнения касательной, в частности, получим

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) = df(x_0) -$$

приращение ординаты касательной при переходе из точки x_0 в точку x.



$|EM| = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$

$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$

Физические приложения производной и дифференциала.

- ✔ Если $S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t, то $S'(t)$ – мгновенная скорость материальной точки, а $dS = S'(t)dt$ – расстояние, которое прошла бы материальная точка за промежуток времени от t до $t + dt$, если бы она двигалась со скоростью, равной мгновенной скорости в момент t.

- ✔ Если $Q(t)$ – количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в момент времени t, то $Q'(t) = I$ – сила тока.

- ✔ Если $N(t)$ – количество вещества, образующегося в момент t в ходе химической реакции, то $N'(t)$ – скорость химической реакции.

Правила дифференцирования.

1. **Дифференцирование суммы, произведения и частного**

ТЕОРЕМА .

Если функции f и g дифференцируемы в точке x, то в этой точке дифференцируемы $f+g$, $f\cdot g$, f/g (если $g(x)\neq 0$) и при этом

- $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
- $(f(x)/g(x))' = (f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x))/g^2(x)$

Следствие. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x и $C = \mathrm{const}$, то

$$(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x);\quad (f(x)/C)' = f'(x)/C.$$

Доказательство теоремы.

1. Пусть $y = f + g$. Тогда

2. Пусть $y = f \cdot g$. Тогда

3. Пусть $y = f / g$. Тогда

2. Дифференцирование обратной функции

ТЕОРЕМА

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и имеет производную $f'(x_0) \neq 0$, тогда обратная к ней функция $x = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

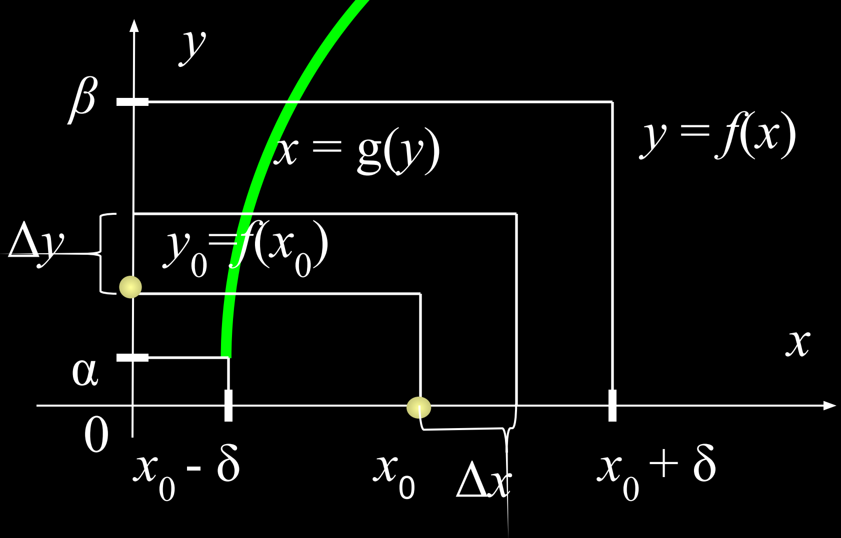
$$g'(y_0) = 1/f'(x_0).$$

Доказательство.

Пусть $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Пусть $\alpha = f(x_0 - \delta)$, $\beta = f(x_0 + \delta)$.

Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена обратная функция $x = g(y)$, непрерывная и строго возрастающая, причем $f(x_0) \in (\alpha, \beta)$.



Пусть Δyтаково, что $y_0 + \Delta y \in (\alpha, \beta)$.

Обозначим $\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$.

Нужно доказать, что существует

Заметим, что $\Delta y \neq 0$, если $\Delta x \neq 0$, в силу строгой монотонности функции. Поэтому при $\Delta y \neq 0$ имеем:

Пусть $\Delta y \to 0$, тогда и $\Delta x \to 0$, так как функция $x = g(y)$ непрерывна в точке y_0. Но если $\Delta x \to 0$, то существует

Итак, правая часть тождества имеет предел, равный $1/f'(x_0)$. Следовательно, существует и

3. Дифференцирование сложной функции

ТЕОРЕМА

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $y_0 = f(x_0)$,

а функция $x = \phi(t)$ дифференцируема в точке t_0, $x_0 = \phi(t_o)$.

Тогда сложная функция $y = f(\phi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и

$$f'_t(\phi(t_0)) = f'_x(x_0) \cdot \phi'_t(t_0)$$

или

Доказательство.

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$,

$\Delta x = \phi(t) - \phi(t_0) = \phi'(t_0)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$,

$\Delta y = f(\phi(t)) - f(\phi(t_0)) = f'(x_0)(\phi'(t_0)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)) + \mathrm{o}(\Delta x) =$

$= f'(x_0)\phi'(t_0)\Delta t + f'(x_0)\mathrm{o}(\Delta t) + \mathrm{o}(\Delta x)$

Здесь $\Delta x \to 0$ при $\Delta t \to 0$ в силу непрерывности функции $\phi\,(t)$ в точке t_0.

при $\Delta t \to 0$.

Следовательно

ЗАМЕЧАНИЕ.

Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например:

$$(f\,(\phi\,(g(x))))' = f\,'(\phi\,(g(x))) \cdot \phi'(g(x)) \cdot g'(x).$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

- **ЗАМЕЧАНИЕ 2.**

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = f'(x_o)\,\Delta x + o(\Delta x) \approx f'(x_o)\,\Delta x \quad \Rightarrow$$

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\,\Delta x.$$

Последнюю формулу можно использовать для вычисления приближенного значения $f(x_o + \Delta x)$ при малых Δx, если известны значения $f(x_o)$ и $f'(x_o)$.

Пример.