Лекция 4.4

- **Частные производные высших порядков.**
- **Некоторые сведения из теории квадратичных форм.**
- **Дифференциалы высших порядков.**
- **Неявные функции и их дифференцирование.**

Частные производные высших порядков.

Пусть функция $f(x, y)$ имеет частные производные

во всех точках открытого множества $G \subset \mathbf{R}^2$. Эти производные – функции независимых переменных x и y, заданные на множестве G, и тоже могут иметь частные производные в точке $M \in G$.

Частная производная

обозначается или f_{xx}.

Частная производная

обозначается или f_{xy}.

Аналогично

Производные $f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$ называются *частными производными второго порядка.*

Рассматривая частные производные от вторых производных, получим всевозможные частные производные третьего порядка

$$f_{xxx},\ f_{xxy},\ f_{yyx},\ f_{yyy},\ f_{xyx},\ f_{xyy},\ f_{yxx}\ ,\ f_{yxy}\ .$$

Аналогично определяются частные производные любого порядка от функций любого числа переменных. Т.е. частной производной n-ого порядка называется частная производная по какой-нибудь переменной от частной производной (n-1)-ого порядка.

Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется *смешанной производной*.

ТЕОРЕМА (о смешанных производных).

Если обе смешанные производные $f_{xy}\ (x, y)$ и $f_{yx}\ (x, y)$ определены в некоторой окрестности точки $M_0\ (x_0, y_0)$ и *непрерывны* в этой точке , то

$$f_{xy}\ (x_0, y_0) = f_{yx}\ (x_0, y_0).$$

Сформулированная выше теорема о частных производных распространяется на любые непрерывные смешанные производные, которые отличаются друг от друга только порядком дифференцирования.

Например $f_{xyy}\ (x_0, y_0) = f_{yyx}\ (x_0, y_0)$, если эти производные непрерывны в данной точке.

Некоторые сведения из теории квадратичных форм.

Квадратичной формой от n переменных называется функция вида

Матрица

называется матрицей квадратичной формы.

$A = A^{\mathrm{T}}$, т.е. матрица симметрична.

Если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то такой вид квадратичной формы называется *каноническим.*

С помощью линейного преобразования любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду. При этом справедлив следующий

ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ:

Число слагаемых с положительными (отрицательными) каноническими коэффициентами постоянно и не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Квадратичная форма называется

- *положительно (отрицательно) определенной*, если для $\forall\ x_1, x_2, \dots, x_n$ выполняется условие:

  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \ (\leq 0)$, причем $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$;
- *неопределенной*, если существуют $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $x_1', x_2', \dots, x_n'$, такие что $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ и $Q(x_1', x_2', \dots, x_n') < 0$.

Рассмотрим матрицу квадратичной формы. Обозначим

$\Delta_1 = a_{11}$, , ... , $\Delta_n = \mathit{det}\ A$.

Справедливо следующее утверждение, так называемый,

КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ:

- Квадратичная форма *положительно определенна* $\Leftrightarrow$

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 , \ldots , \Delta_n > 0 .$$

- Квадратичная форма *отрицательно определенна* $\Leftrightarrow$

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 , \ldots , (-1)^n \Delta_n > 0 .$$

Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка во всех точках $M(x,y)$ некоторой области $G \subset \mathbf{R}^2$. Тогда при фиксированных dx и dy дифференциал

есть функция от x, y, имеющая в рассматриваемой области непрерывные частные производные, следовательно, в любой точке этой области существует дифференциал от df. Вычислим его при тех же приращениях dx и dy:

Он называется вторым дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

Аналогично для функции, трижды дифференцируемой в точке $M(x, y)$, определяется третий дифференциал:

Для сокращения записи второго и последующих дифференциалов функции введем символ дифференциала d при помощи соотношения

и определим операцию возведения этого символа в степень n. Например:

Тогда второй дифференциал функции $z = f(x, y)$ можно записать в виде произведения

И вообще, дифференциал n-ого порядка функции $z = f(x, y)$ можно символически записать в следующей форме:

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots x_m)$ имеет в области $G \subset \mathbf{R}^m$ непрерывные производные первого и второго порядка по всем переменным. Тогда для нее, по аналогии с функцией двух переменных, вводится понятие второго дифференциала в точке $M(x_1, x_2, \dots x_m)$:

Заметим, что последнее выражение – квадратичная форма от переменных dx_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

По индукции определяется дифференциал n – ого порядка в предположении, что все частные производные n-ого порядка непрерывны в точке M:

Неявные функции и их дифференцирование.

Пусть функция $F(x, y)$ определена в $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим уравнение

$$\boldsymbol{F(x, y) = 0.} \qquad (1)$$

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), будем называть графиком уравнения. Будем рассматривать такие уравнения, графики которых – непустые множества.

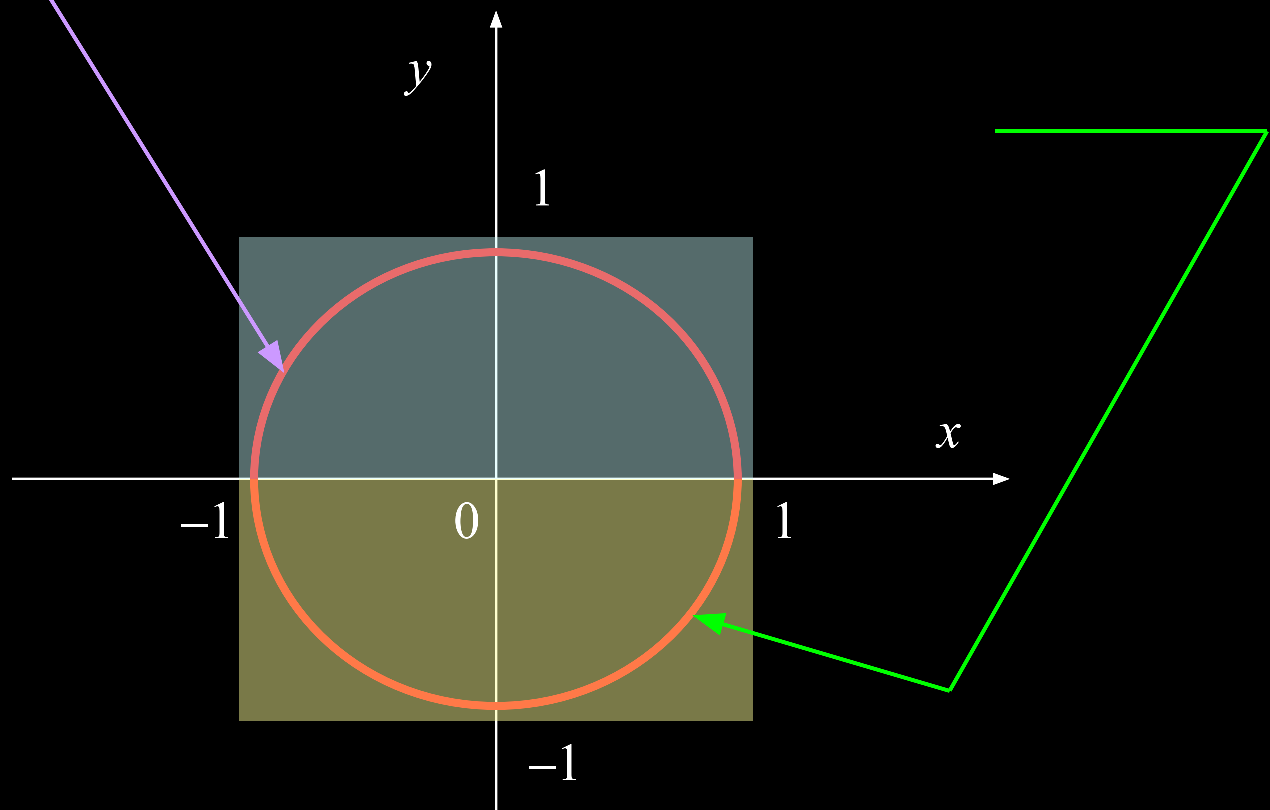
Если график уравнения (1) однозначно проектируется на отрезок оси OX, то на этом отрезке существует единственная функция $y = f(x)$, график которой совпадает с графиком уравнения (1). Эта функция каждому x ставит в соответствие тот единственный y, для которого $F(x, y(x)) = 0$. Говорят, что уравнение (1) определяет y как неявную функцию от x.

Например, уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

в прямоугольнике $x \in [-1,1],\ y \in [0,1]$ неявно определяет функцию

а в прямоугольнике $x \in [-1,1],\ y \in [-1,0]$ – функцию



ТЕОРЕМА.

Пусть

- $F(x, y)$ имеет в окрестности точки (x_0, y_0) непрерывные частные производные $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$;
- $F_y(x_0, y_0) \neq 0$;
- $F(x_0, y_0) = 0$.

Тогда существует прямоугольник

$$K = \{(x, y): x_0 - a \leq x \leq x_0 + a;\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

в котором уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x.

Функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(x_0 - a, x_0 + a)$ и

ПРИМЕР 1. Пусть требуется найти вторую производную функции $y = y(x)$, заданной неявно с помощью уравнения:

Здесь

По правилу дифференцирования неявной функции получим:

Продифференцируем полученное выражение по x с учетом того, что y есть функция от x:

Подставим сюда найденное выражение для $y\,'(x)$.

$= a^2b^2$ (согласно уравнению)

ЗАМЕЧАНИЕ.

Аналогичная теорема имеет место и в случае, когда неявная функция зависит от двух (и более) переменных, т.е. задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

С помощью формального дифференцирования получим выражения для соответствующих частных производных функции $z(x, y)$:

$= 0$

$= 0$

ПРИМЕР 2.

Пусть требуется найти второй дифференциал в точке (2, 0) для каждой дифференцируемой функции $z(x, y)$, заданной неявно с помощью уравнения:

В окрестности точки (2, 0) уравнением определяются две дифференцируемые функции $z(x, y)$. Их значения в этой точке определяются как решения уравнения

Частные производные функции

равны

По правилу дифференцирования неявной функции получим:

Вычислим вторые производные, дифференцируя полученные выражения:

1) Если $z(2, 0) = 1$, то

2) Если $z(2, 0) = 16$, то

Спасибо за внимание!

misis.ru