Лекция 4.5

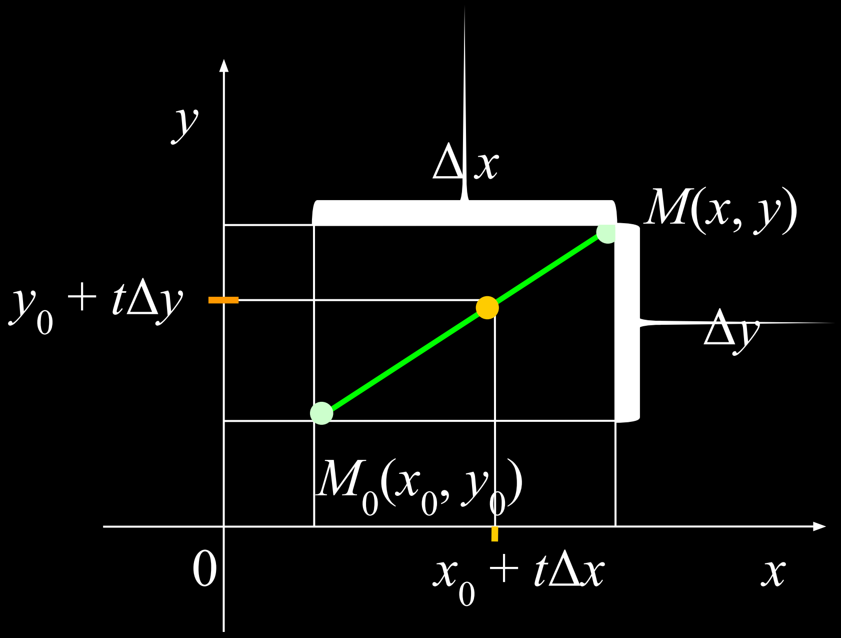
- **Формула Тейлора для функции нескольких переменных.**
- **Локальный экстремум функции нескольких переменных, условия его существования и методы поиска.**

Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

ТЕОРЕМА.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ непрерывные производные до n-ого порядка включительно. Тогда для любой точки $M(x, y)$ из этой окрестности справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

Доказательство.



Точки, лежащие на отрезке M_0M, имеют координаты

$$x = x_0 + t\Delta x,\ y = y_0 + t\Delta y, \text{ причем } 0 \le t \le 1.$$

Тогда $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ – n раз непрерывно дифференцируемая сложная функция от t, причем

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0),\ \varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Применяя правило нахождения производной сложной функции, получим:

Аналогично

По индукции получим, что

Запишем для функции $\varphi(t)$ формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

Полагая $t = 1$, получим

Заметим, что

Итак

ЗАМЕЧАНИЕ.

При соблюдении условий теоремы имеет место также формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

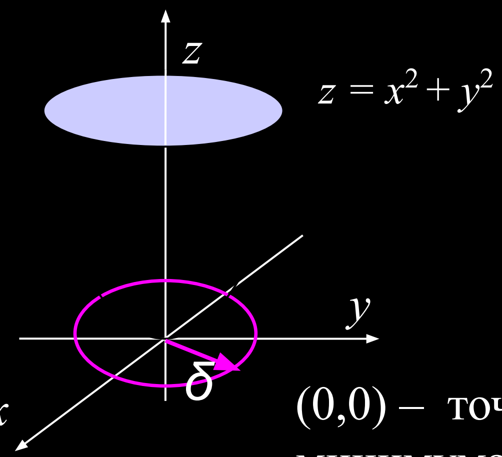
Локальные экстремумы функции нескольких переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots x_m)$ определена в области $G \subset \mathbf{R}^m$. Точка $M_0 \in G$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(M)$, если найдется такая δ-окрестность точки M_0, что для всех точек M, принадлежащих этой окрестности, выполнено неравенство

$$f(M) - f(M_0) \le 0 \ (\ge 0).$$

ПРИМЕР.



(0,0) – точка локального минимума.

Необходимое условие экстремума.

ТЕОРЕМА.

Если в точке экстремума M_0 функции $f(M)$ существует частная производная по какой-либо переменной, то эта производная равна нулю.

Доказательство.

Докажем теорему для функции двух переменных $f(x, y)$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – ее точка локального экстремума. Пусть существует, например, $f_x(x_0, y_0)$. Введем вспомогательную функцию

$$\phi(x) = f(x, y_0).$$

Точка x_0 является ее точкой экстремума, следовательно по теореме Ферма

$$\phi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0,$$

ч.т.д.

СЛЕДСТВИЕ.

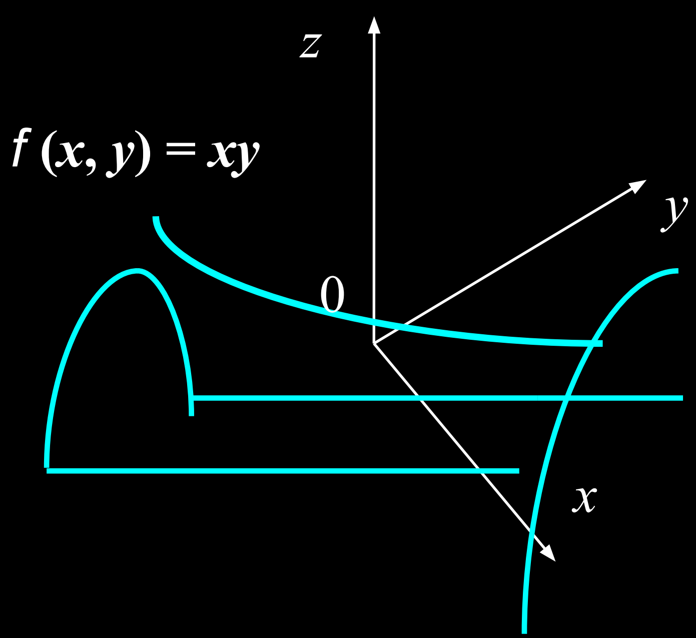
Если в точке экстремума M_0 функция $f(M)$ дифференцируема, то

$$df(M_0) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ.

Если в точке M_0 функция $f(M)$ дифференцируема и $df(M_0) = 0$, то M_0 называется стационарной точкой. Точки экстремума следует искать среди стационарных точек. Но не всякая стационарная точка будет точкой экстремума.

ПРИМЕР.



$f_x = y = 0$, $f_y = x = 0$, то есть $(0,0)$ – стационарная точка.

Возьмем произвольное $\delta > 0$.

Точки (δ, δ) и $(\delta, -\delta)$ лежат внутри круга радиуса 2δ и

$$f(\delta, \delta) = \delta^2 > f(0, 0) = 0,$$

$$f(\delta, -\delta) = -\delta^2 < f(0, 0) = 0.$$

Поэтому $(0,0)$ не является точкой экстремума функции.

Достаточные условия экстремума.

ТЕОРЕМА.

Пусть функция $f(M)$ имеет в окрестности точки M_0 непрерывные частные производные второго порядка и пусть $df(M_0) = 0$. Тогда

- если $d^2f(M_0)$ – положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма, то M_0 – точка локального минимума (максимума),
- если $d^2f(M_0)$ – неопределенная квадратичная форма, то M_0 не является точкой экстремума.

Доказательство.

Приведем доказательство для функции двух переменных $f(x, y)$.

По формуле Тейлора второго порядка с остаточным членом Пеано имеем

Так как по условию теоремы $df(x_0,y_0) = 0$, то полное приращение функции в критической точке

Пусть для определенности $d^2f(M_0)$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда

при всех значениях , не равных нулю одновременно.

В нашем случае переменные связаны соотношением

и поэтому одновременно не равны нулю. Квадратичная форма

– непрерывная функция двух переменных, принимающая только положительные значения и заданная на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Поскольку эта окружность есть компакт, то функция достигает на нем своей точной нижней грани m. Таким образом

для всех значений аргументов, удовлетворяющих условию (*), а

Следовательно в достаточно малой окрестности точки M_0 выполняется неравенство $f(M) - f(M_0) > 0$, то есть M_0 – точка локального минимума.

СЛЕДСТВИЕ.

Пусть $z = f(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка этой функции. Исследуем второй дифференциал функции в стационарной точке

Воспользуемся критерием Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. В нашем случае

Возможные возникающие здесь ситуации сведем в таблицу:

<table>
<tr><td colspan="2">$AC - B^2 > 0$</td><td>$AC - B^2 < 0$</td><td>$AC - B^2 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Есть экстремум</td><td rowspan="3">Нет экстремума</td><td rowspan="3">?</td></tr>
<tr><td>$A > 0$</td><td>$A < 0$</td></tr>
<tr><td>Локальный минимум</td><td>Локальный максимум</td></tr>
</table>

ПРИМЕР.

Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

- Найдем частные производные первого порядка

$$z_x = 3x^2 + 3y^2 - 39; \quad z_y = 6xy - 36.$$

Для нахождения стационарных точек функции получим систему уравнений:

$$M_1(3, 2),\ M_2(-3, -2),\ M_3(2, 3),\ M_4(-2, -3).$$

- Вычислим второй дифференциал функции

$$d^2f(x, y) = 6xdx^2 + 2 \cdot 6ydxdy + 6xdy^2.$$

Матрица квадратичной формы в данном случае имеет вид:

Ее главные миноры равны:

Точка	Δ_2	Экстремум?	Δ_1	Max или min?	Значение функции в точке
$M_1(3, 2)$	> 0	есть	> 0	min	$-\ 100$
$M_2(-3, -2)$	> 0	есть	< 0	max	152
$M_3(2, 3)$	< 0	нет			
$M_4(-2, -3)$	< 0	нет			

Спасибо за внимание!

misis.ru