И. Е. Гопенгауз

Лекции по функциональному анализу

Литература

Основная

1. Гопенгауз И.Е., Элементы функционального анализа: Курс лекций. №1657. М., МИСиС. 2011.

2. Гопенгауз И.Е., Функциональный анализ. Пособие по решению задач. №447. М., МИСиС. 2011.

3. Гопенгауз И. Е., Методы математической физики. Курс лекций. №1459. М., МИСиС, 2005.

Дополнительная

4. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.

5. Треногин В. А., Функциональный анализ. М., Наука, 1980.

6. Треногин В. А., Писаревский Б. М.: Соболева Т. С., Задачи и упражнения по функциональному анализу. М., Наука, 1984.

Лекция 1.
§1.1.
Линейные нормированные пространства.

Основные понятия.

Определение 1.1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). ***Нормой*** в пространстве X называется числовая функция $\|\cdot\|$, удовлетворяющая следующим условиям (*аксиомам нормы*):

1а $\forall\, x \in X \quad \|x\| \geq 0$ (неотрицательность);

1б $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$ (невырожденность);

2 $\quad \forall\, x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (положительная однородность);

3 $\forall\, x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Определение 1.2. Линейное пространство вместе с определенной в нем нормой называется ***линейным нормированным пространством*** (ЛНП). (Для краткости вместо $(X, \|\cdot\|)$ мы будем писать просто X.)

Определение 1.3. L называется ***подпространством*** ЛНП X, если L – линейное подпространство X и в L используется та же норма, что и в X (точнее – ее сужение).

Определение 1.4. ***Преднормой*** в пространстве X называется числовая функция $p(\cdot)$, удовлетворяющая условиям 1а, 2 и 3 (условие 1б может и не выполняться).

Всякая норма является преднормой. Обратное утверждение не верно. Рассмотрим, например, функцию p, определенную в пространстве $\mathbb{R}^2$ следующим образом: если $x=(x_1;x_2)$, то $p(x)=|x_1|$. Ясно, что функция $p=p(x)$ – преднорма, не являющаяся нормой. Так, например, для элемента $x=(0\,;1)$ $x\neq 0$, а $p(x)=0$.

Упражнение 1.1. Пусть N – ядро преднормы p, определенной в линейном пространстве X, т.е. $N=\{x\in X \mid p(x)=0\}$. Доказать, что N – линейное подпространство пространства X.

Упражнение 1.2. Доказать, что $p(x-y) \geq | p(x) - p(y) |, \forall x, y \in X$.

Решение. Так как $x = y + (x-y)$ и $y = x + (y-x)$, то неравенство треугольника дает $p(x) \leq p(y) + p(x-y)$ и $p(y) \leq p(x) + p(x-y)$. Следовательно, $-p(x-y) \leq p(x) - p(y) \leq p(x-y)$, а это и означает, что $| p(x) - p(y) | \leq p(x-y)$. Ч. и т.д.

Следствие. Преднорма $p(\cdot)$ – непрерывная (относительно $p(\cdot)$) функция, действующая из X в $\mathbb{R}_+$.

Определение 1.5. ЛНП называется ***строго нормированным***, если норма в нем кроме аксиом 1 – 3 удовлетворяет еще одной аксиоме:

4) равенство $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ для ненулевых векторов x, y возможно только в том случае, если x и y сонаправлены ($x \uparrow\uparrow y$), т.е. если существует такое $\lambda > 0$, что $y = \lambda x$.

Определение 1.6. ***Расстоянием*** $d(x, y)$ между элементами x и $y \in X$ называется норма их разности, т.е.

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Определение 1.7.

Шаром называется множество $B_r(a)=\{x\in X \mid \|x-a\|<r\}$;

сферой называется множество $S_r(a)=\{x\in X \mid \|x-a\|=r\}$.

Наконец, ***шар с границей*** $\overline{B}_r(a)$ – это объединение $B_r(a)\cup S_r(a)$.

Здесь a и r – центр и радиус шара (сферы).

Определение 1.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует элемент $a\in X$ такой, что $\|x_n-a\|\to 0$ при $n\to\infty$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Определение 1.9. Пусть $E \subset X$. Точка $x \in E$ называется ***внутренней*** точкой множества , если существует такое, что , т.е. принадлежит вместе с некоторой своей окрестностью.

Определение 1.10. Множество называется ***открытым***, если все его точки внутренние.

Определение 1.11. Точка называется ***предельной*** точкой множества , если (здесь – проколотая окрестность).

Определение 1.12. Множество называется ***замкнутым***, если содержит все свои предельные точки.

Упражнение **1.3.**

Доказать, что:

1) $B_r(a)$ – открытое множество;

2) $\overline{B}_r(a)$ – замкнутое множество;

3) x является предельной точкой множества E тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\} \subset E \setminus \{x\}$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$;

Упражнение **1.3.**

Доказать, что:

4) объединение произвольного семейства открытых множеств – открытое множество;

5) пересечение произвольного семейства замкнутых множеств – замкнутое множество;

6) дополнение открытого множества замкнуто; дополнение замкнутого множества открыто.

ТЕСТЫ

1. Какие из следующих подмножеств в $\mathbb{R}^2$ являются его линейными подпространствами:

$$E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2=1\},\ E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1=2\cdot x_2\},\ E_3=\mathbb{R}^2?$$

2. Какие из функций в $\mathbb{R}^2$ представляют собой норму (преднорму): $p_1(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $p_2(x)=|x_1+x_2|$, $p_3(x)=|x_1-x_2|$,

$$p_4(x)=\left(|x_1|^{1/2}+|x_2|^{1/2}\right)^2,\ p_5(x)=|x_1+x_2|+|x_1-x_2|\ ?$$

3. Какие функции из предыдущего вопроса порождают строго нормированные пространства?

ТЕСТЫ

4. Какие из перечисленных ниже подмножеств

$\mathbb{R}$ открыты, и какие из подмножеств замкнуты:

$$E_1 = (0,\ 1),\ E_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(0,\ 1+\frac{1}{n}\right),\ E_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\ 1+\frac{1}{n}\right);$$

$$E_4 = [0,\ 1],\ E_5 = \bigcup_{n=2}^{\infty}\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right],\ E_6 = \bigcap_{n=2}^{\infty}\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right]?$$