Лекция 2

§§ 1.2 , 1.3

§1.2. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Определение 1.13 Числа p и q называются сопряжёнными показателями, если $p,q>1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Легко видеть, что для таких p и q $(p-1)(q-1)=1$, кроме того, $q=\frac{p}{p-1}$, $p=\frac{q}{q-1}$.

Теорема 1.1. (неравенство Юнга). Если p и q – сопряжённые показатели, то при любых $a,b\geq 0$ будет

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Fa1_2_2.doc

Теорема 1.2. (**неравенство Гельдера**).

Если p и q – сопряжённые показатели, то

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q},$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

[Fa1_2_4.doc](Fa1_2_4.doc)

Следствие.

Пусть M_p обозначает среднее порядка p чисел $a_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Это означает: $M_p = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}$ при $p \neq 0$ и $M_0 = \lim_{p\to 0} M_p$, т.е. $M_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Утверждается, что величина M_p возрастает с увеличением p.

Указание. Достаточно доказать с помощью неравенства Гельдера, что

1) $M_{p_1} \le M_{p_2}$, если $0 < p_1 < p_2$ и

2) $M_{-p} \le M_p$ при $p > 0$.

Упражнение 1.5. Доказать, что неравенство Гельдера обращается в равенство, только если выполнены следующие условия:

1) при некотором $\lambda \geq 0$ $|a_k|^p = \lambda |b_k|^q$ при любом k;

2) $\arg(a_k b_k)$ не зависит от k (так будет, если, например, $\operatorname{sign}(a_k) = \operatorname{sign}(b_k)$, $\forall k$).

Упражнение 1.6. Доказать, что неравенство Гельдера справедливо для бесконечных последовательностей. Это значит, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{1/q},$$

если только ряды в правой части сходятся (p и q – сопряженные показатели).

Упражнение 1.7. Доказать неравенство Гельдера для интегралов, например, в такой формулировке: если функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$, а p и q – сопряженные показатели, то

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Теорема 1.3. **(неравенство Минковского)**. При любом $p \geq 1$, натуральном n и произвольных x_k, y_k

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Fa1_2_9.doc

Упражнение 1.9. Сформулировать и доказать неравенство Минковского для бесконечных последовательностей.

Упражнение 1.10. Сформулировать и доказать неравенство Минковского для интегралов

§1.3.
Основные пространства последовательностей и функций.

Мы будем обозначать l_p^n, $1 \le p \le \infty$, n-мерное координатное пространство с нормой порядка p. Более подробно: норма элемента $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in l_p^n$ равна по определению $\| x \| := \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p \right)^{1/p}$, если $p < \infty$ и $\| x \| := \max\{| x_k |; 1 \le k \le n\}$, если $p = \infty$.

Проверка аксиом 1.-2. не вызывает затруднений, а неравенство треугольника при $p \in [1; \infty)$ – это просто неравенство Минковского.

Упражнение 1.11. Проверить неравенство треугольника при $p = \infty$.

Пространство l_p, $1 \le p \le \infty$, – это пространство бесконечных последовательностей $x = \{x_1, x_2, ...\}$ со сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$. Норму в l_p определяют следующим образом: $\|x\| = \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

Неравенство Минковского для последовательностей показывает, что для введенной нормы справедливо неравенство треугольника (случай $p = \infty$ и здесь нужно рассмотреть отдельно).

Для l_∞ часто используется обозначение m; это – пространство всех ограниченных последовательностей с нормой $\|x\| := \sup_i |x_i|$. Пространство c – это подпространство всех сходящихся последовательностей из m.

$M[a,b]$ – пространство ограниченных функций $x(\cdot)$ с нормой $\|x\| = \sup\{|x(t)|;\ t \in [a,b]\}$.

$C[a;b]$ – подпространство $M[a;b]$, состоящее из непрерывных функций. Отметим, что по теореме Вейерштрасса функция $x \in C[a;b]$ достигает на $[a;b]$ своих крайних значений, поэтому $\sup$ в определении нормы можно здесь заменить на $\max$.

$C_p[a;b],\ 1 \le p < \infty$ – тоже пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, но с нормой

$$\| x \| = \| x \|_{C_p} := \left(\int_a^b |\, x(t)\,|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Здесь неотрицательность и положительная однородность нормы очевидны. Невырожденность этой нормы является следствием свойства локального сохранения знака непрерывной функцией. Наконец, неравенство треугольника – это просто неравенство Минковского для интегралов из предыдущего параграфа.

Точно так же определяются пространства функций $M(Q)$, $C(Q)$, $C_p(Q)$, заданных на ограниченном замкнутом (измеримом по Жордану) подмножестве $Q\in\mathbb{R}^n$.

$C^r[a;b]$ – это пространство r раз гладких функций $x(\cdot)$ с нормой $\|x\| = \|x\|_{C^r} := \|x\|_C + \|x'\|_C + \ldots + \|x^{(r)}\|_C$.

В пространстве $C_p^r[a;b]$ при $p\in[1;\infty)$ норма равна

$$\|x\| = \|x\|_{C_p^r} := \|x\|_{C_p} + \|x'\|_{C_p} + \ldots + \|x^{(r)}\|_{C_p}.$$

Тесты:

1. Обозначим $M_p = \left(0.001\cdot\left(1^p + 2^p + 3^p + \ldots + 1000^p\right)\right)^{1/p}$.

Выстроить в порядке возрастания числа $M_{\pm 1}$, $M_{\pm 1/2}$, $M_{\pm 1/4}$.

2. Что больше $I_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$ или $I_{-1} = \left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\right)^{-1}$?

3. При каких значениях p последовательность $\{k^{-1/2}\}$ принадлежит пространству l_p ?

4. Чему равно расстояние между функциями $x_1(t) = \sin x$ и $x_2(t) = \cos x$ в пространствах $C^2[0, \pi/2]$ и $C_2[0, \pi/2]$?