Лекция 3

§§1.4, 1.5

§1.4. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах.

Определение 1.14. Пусть X – линейное пространство и $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ – нормы в X. Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ ***подчинена*** норме $\|\cdot\|_2$, если существует такая константа $C>0$, что для любого x из X $\|x\|_1 \le C\|x\|_2$.

Определение 1.15. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ ***эквивалентны***, если каждая из них подчинена другой, иначе говоря, если существуют положительные константы A и B такие, что $A\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le B\|x\|_1$, $\forall x \in X$.

Мы будем писать в этом случае: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Упражнение 1.12. Проверить, что отношение ~ транзитивно, рефлексивно и симметрично и, следовательно, является отношением эквивалентности.

Упражнение 1.13. Доказать, что если $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, то в пространствах $(X, \|\cdot\|_1)$ и $(X, \|\cdot\|_2)$ один и тот же запас ограниченных множеств, один и тот же запас замкнутых множеств, один и тот же запас открытых множеств, один и тот же запас сходящихся последовательностей, один и тот же запас фундаментальных последовательностей (последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $\|x_n - x_m\| \to 0$, когда $n,\ m \to \infty$).

Упражнение 1.14. Пусть $X_1 = \{X, \|\cdot\|_1\}$, $X_2 = \{X, \|\cdot\|_2\}$, где $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, Y – произвольное ЛНП и $f : X \to Y$. Если f непрерывно в точке $x \in X$ как отображение из X_1 в Y, то f непрерывно в этой же точке и как отображение из X_2 в Y.

Пример. Введем в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0;1]$, две нормы:

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\,dt \quad \text{и} \quad \|x\|_2 = \max\{|x(t)|,\ t \in [0;1]\}.$$

Ясно, что первая из норм подчинена второй, так как $\|x\|_1 \le 1 \cdot \|x\|_2$. Рассмотрим теперь последовательность $x_n(t) = n\,t^{n-1}$. Так как $\|x_n\|_1 = 1$, $\|x_n\|_2 = n$, то эта последовательность ограничена по первой норме и неограниченна по второй. Согласно упражнению 1.13 эти нормы не могут быть эквивалентными.

Теорема **1.4.**

В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Fa1_4_4.doc

Fa1_4_5.doc

Следствия:

Fa1_4_6.doc

§ 1.5. Приближение элементами подпространства.

Определение 1.16. Пусть E - подмножество ЛНП X и $x \in X$. ***Расстоянием*** от точки x до подмножества E называется величина $d(x, E) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in E\}$.

Упражнение 1.15. Если E замкнуто и $d(x, E) = 0$, то $x \in E$.

Определение 1.17. Пусть L - подпространство ЛНП X. Точка $y_0 \in L$ называется ***элементом наилучшего приближения*** (***ЭНП***) для x в L, если $\|x - y_0\| = d(x, L)$.

Контрпримеры показывают, что даже в случае замкнутого подпространства L и $x \notin L$ может не существовать элемента наилучшего приближения для x в L.

Пусть $X = C[-1,1]$, $L = \left\{ y \in X \;\middle|\; \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign}(t) \cdot y(t)\,dt = 0 \right\}$.

Ясно, что L – замкнутое подпространство ЛНП X.

Возьмём $x \in X \setminus L$ и обозначим $A = \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign}(t) \cdot x(t)\,dt$.

Докажем, что $d(x, L) = \dfrac{|A|}{2}$, но $\|x - y\| > \dfrac{|A|}{2}$, $\forall y \in L$.

Fa1_5_11.doc (См. также “Курс”, стр. 96 упр. 2.4, 2.5)

Таким образом, у любого $x \in X \setminus L$ нет ЭНП в L.

Теорема **1.5.**

Если L – конечномерное подпространство ЛНП X, то для любого $x \in X$ существует хотя бы один элемент наилучшего приближения в L.

1_5_4.doc

Отметим, что в доказанной теореме не утверждается **единственность** элемента наилучшего приближения. Эта единственность, вообще говоря, не имеет места.

Пример. Пусть $X = l^2_\infty$, $L = \{\,(t,0)\mid t \in \mathbb{R}\,\}$ и пусть $x = (0,1)$. Ясно, что $d(x,L) = 1$ и что элементами наилучшего приближения для x в L будут все точки отрезка от точки $(-1,0)$ до точки $(1,0)$ (см. рис 1 2) . . .

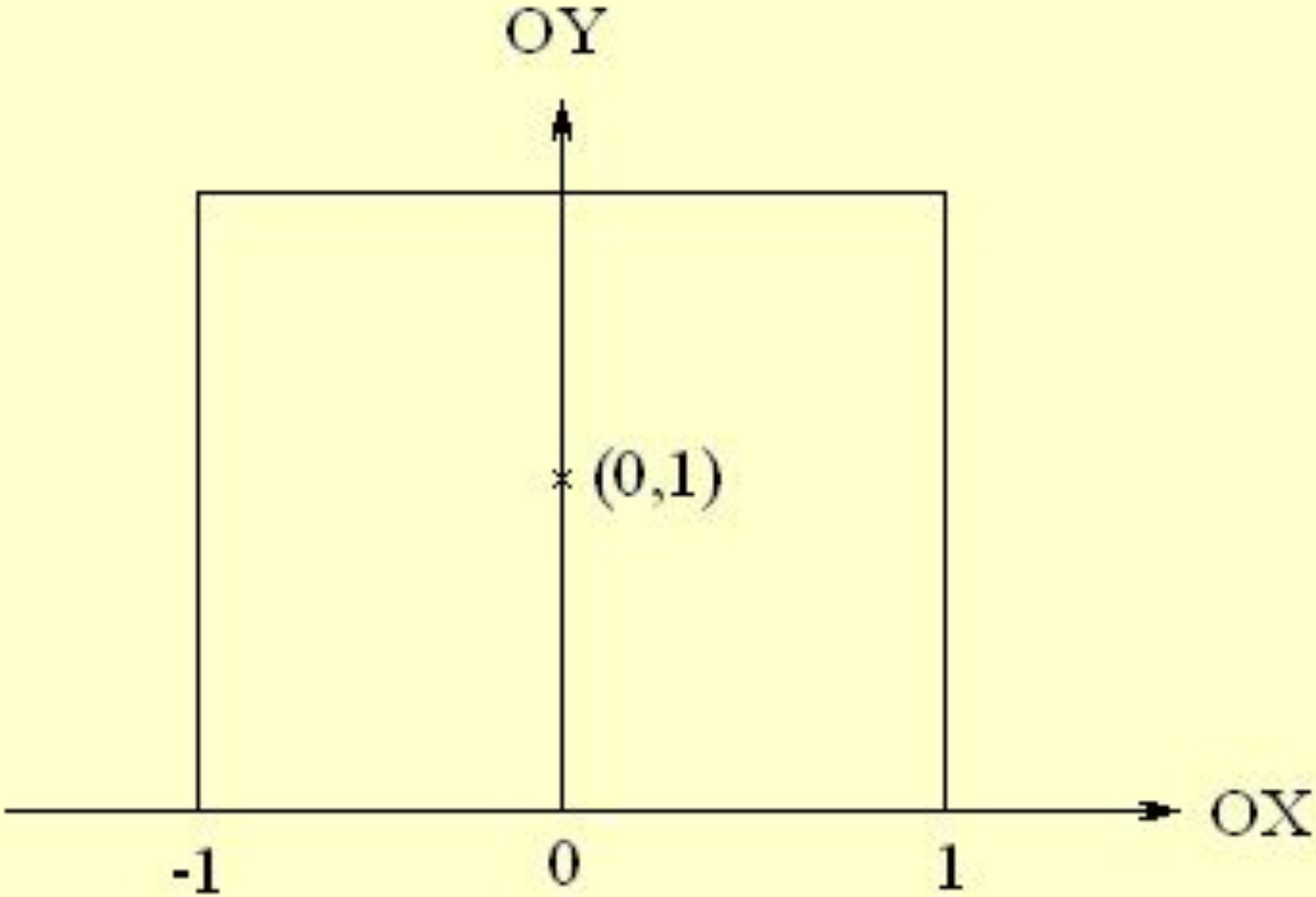

Рис. 1.2 Множество элементов наилучшего приближения

Теорема **1.6.**

Если X – строго нормированное линейное пространство и L – его подпространство, то для любого $x \in X$ существует не более одного элемента наилучшего приближения в подпространстве L.

Fa1_5_7.doc

Упражнение 1.16. Доказать, что:

1) l_p^n и l_p при $1 < p < \infty$ – строго нормированные линейные пространства;

2) l_p^n и l_p при $p = 1$ и при $p = \infty$ не являются строго нормированными;

3) $C_p[a,b]$ при $1 < p < \infty$ – строго нормированные линейные пространства;

4) пространства $C[a,b]$ и $C_1[a,b]$ не являются строго нормированными.

Тесты:

1. В пространстве функций вида $x(t)=\frac{a_0}{2}+a\cos t+b\sin t$ введем нормы: $\|x\|_1=\max\limits_t|x(t)|$ и $\|x\|_2=\sqrt{\frac{a_0}{2}+a^2+b^2}$. По теореме 1.4. $\exists A>0,\ B>0$ такие, что $\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}\le A$, $\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}\le B$. Каковы наименьшие значения констант A и B?

2. Эквивалентны ли нормы $\int\limits_0^1|x(t)|dt$ и $\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$ в про
странстве $C[0,1]$?

Тесты:

3. Эквивалентны ли нормы $|x(0)| + \int\limits_0^1 |x'(t)|dt$ и $\max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \int\limits_0^1 |x'(t)|dt$ в пространстве $C^1[0,1]$?

4. В метрике пространства l_1^3 найти ЭНП для элемента $x=(a,b,c)$ в подпространстве $L=\{(s,t,0)\}$.

5. В метрике пространства $C[-1,1]$ найти ЭНП для элемента $x(t)=|t|$ в подпространстве $L=Lin\{1,t\}$.