Лекция 4

§1.6

§1.6

Сепарабельные пространства. Теорема Вейерштрасса.

Определение 1.18. ЛНП X называется *сепарабельным,* если в пространстве X существует счетное всюду плотное подмножество.

Теорема 1.7. Если X_1 – подпространство сепарабельного ЛНП X, то и X_1 сепарабельно.

Fa1_6_2.doc

Упражнения

[Fa1_6_3.doc]

Примеры

[Fa1_6_4.doc]

Для изучения с этой же точки зрения пространств функций нам потребуется следующая теорема.

Теорема 1.8 (теорема Вейерштрасса). Пространство ▯ всех алгебраических многочленов одной переменной всюду плотно в $C[a;b]$.

Замечание. Мы увидим, что отсюда следует сепарабельность пространств $C[a;b]$, $C_p[a;b]$, $C^r[a;b]$ и $C_p^r[a;b]$.

1°. Подготовка к доказательству. Тождества.

Вспомним сначала "бином Ньютона":

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n.$$

Дважды применяя к этому тождеству оператор $p\dfrac{\partial}{\partial p}$, получаем $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = np(p+q)^{n-1}$ и

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np\left(np+q\right)(p+q)^{n-2}.$$

2°. Многочлены Бернштейна и их свойства.

Введем ***многочлены Бернштейна*** для функции $f(t)$,

непрерывной на отрезке $[0;1]$:

$$B_n(f(t);x)=\sum_{k=0}^{n} f(k/n)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ x\in[0,1].$$

Свойства многочленов Бернштейна:

1) $B_n : C[0;1] \to$ [illegible]$_n$;

2) B_n – линейный оператор;

3) B_n – неотрицательный оператор, т.е.

$\{f(x)\geq 0$ на $[0,1]\}\Rightarrow\{B_n f\geq 0$ на $[0,1]\}$

Свойства многочленов Бернштейна, продолжение.

Свойства 2 и 3 показывают, что при любом $x \in [0;1]$ для формы $(f, g) = B_n(fg; x)$ должно выполняться неравенство Коши:

4). $|B_n(fg;x)| \le \sqrt{B_n(f^2;x)}\sqrt{B_n(g^2;x)}$;

5). $B_n(1;x) \equiv 1$; $B_n(t;x) = x$; $B_n(t^2;x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}$.

Fa1_6_12

Следствие 1. $B_n((t-x)^2;x) = \dfrac{x(1-x)}{n} \le \dfrac{1}{4n}$.

Следствие 2. $B_n(|t-x|;x) \le \sqrt{B_n(1;x)}\sqrt{B_n((t-x)^2;x)} \le \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

3°. Модуль непрерывности и его свойства.

Определение 1.19 Модулем непрерывности функции f с шагом h называется величина

$$\omega(f;h)=\sup\{|f(x_2)-f(x_1)| \mid x_1,x_2\in[a;b],\ |x_2-x_1|\le h\}$$

Свойства модуля непрерывности:

1) $\omega(h)$ возрастает на отрезке $[0;b-a]$;

2) $\omega(0+)=0$, если $f\in C[a;b]$;

3) $\omega(h_1+h_2)\le\omega(h_1)+\omega(h_2)$.

Следствия.

$\omega(nh)\le n\omega(h)$, $\forall n\in\mathbb{N}$; $\omega(\lambda h)\le(\lambda+1)\omega(h), \lambda>0$.

4°. Завершение доказательства.

Можно считать, что $[a,b]$ – это отрезок $[0,1]$.

Пусть $f \in C[0;1]$. При любом фиксированном $x \in [0,1]$ будет

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| = |B_n(f(t);x) - B_n(f(x);x)| \le B_n(|f(t) - f(x)|;x) \le$$

$$\le B_n(\omega(|t-x|);x) = B_n\left(\omega\left(\underbrace{\sqrt{n}\,|t-x|}_{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right);x\right) \le$$

$$\le B_n\left((\sqrt{n}\,|t-x|+1)\cdot\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right);x\right) \le \left(\sqrt{n}B_n(|t-x|+1;x)\right)\cdot\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \le$$

$$\le \left(\sqrt{n}\,\frac{1}{2\sqrt{n}}+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Поэтому $\left\|B_n(f)-f\right\|_{C[0,1]} \le \dfrac{3}{2}\,\omega\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ при $n \to \infty$

Следствие.

Пространства $C[a;b]$ и $C_p[a;b]$, $1 \le p < \infty$, сепарабельны.

Fa1_6_13.doc

Вторая теорема Вейерштрасса.

В заключение отметим следующее утверждение, также принадлежащее Вейерштрассу (задачи №№ 7.9 — 7.14).

Теорема 1.9. Пространство всех тригонометрических многочленов плотно в $C_{2\pi}$ – пространстве непрерывных 2π-периодических функций, наделенном максимум-нормой.

Тесты

1. Какие из следующих множеств на плоскости счетны**:**

E_1 – множество непересекающихся букв “O”,

E_2 – множество непересекающихся букв “L”?

2. Какое из множеств плотно на отрезке $\left[0,1\right]$:

E_1 – множество десятичных дробей из 100 цифр,

E_2 – множество всех конечных десятичных дробей,

E_3 – множество десятичных дробей, запись которых не использует цифру “7”.

Тесты

3. Можно ли приблизить с любой точностью функцию $x(t) = \operatorname{sign} t$ алгебраическими многочленами по норме:

$$\|z\|_1 = \int_{-1}^{1} |z(t)| dt, \quad \|z\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} |z(t)|^2 dt}, \quad \|z\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |z(t)| ?$$

4. Какие из функций $\varphi_1(h) = \sqrt{h}$, и $\varphi_2(h) = h^2$ $\varphi_3(h) = h$, можно считать модулем непрерывности некоторой функции на отрезке $[0,1]$?