Лекция 5

§§1.7, 1.8

§1.7

Банаховы пространства

Определение 1.20. Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства X называется ***фундаментальной*** последовательностью или последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер n_0, что для всех натуральных $m, n > n_0$ будет $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$ (иначе говоря, если $\| x_m - x_n \| \to 0$ при $m, n \to \infty$).

Упражнение 1.22.

Доказать, что:

1. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Обратное утверждение не верно.

2. Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

3. Если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то такая последовательность сходится.

Определение 1.21. ЛНП X называется ***полным***, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится. Полное линейное нормированное пространство называется ***банаховым*** пространством или, короче, – B-пространством.

Упражнение 1.23. Пусть L – линейное подпространство банахова пространства X. Доказать, что L также является B- пространством тогда и только тогда, когда L – замкнутое подмножество X.

Примеры:

1. $\mathbb{R}$ является B-пространством (критерий Коши сходимости числовых последовательностей).

2. Все l_p^n, $1 \le p \le \infty$ также B-пространства (следствие полноты $\mathbb{R}$).

3. l_p, $1 \le p < \infty$ и m – B-пространства.

[Fa1_7_5.doc]

Примеры:

4. $M[a;b]$ – B-пространство в силу критерия Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей;

5. $C[a;b]$ также B-пространство, так как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций снова непрерывная функция и, значит, $C[a;b]$ – замкнутое подмножество $M[a;b]$;

6. Нетрудно доказать, что и $C^r[a;b]$ – B-пространство;

Примеры:

7. $C_p[a;b]$, $1 \le p < \infty$ не является B-пространством.

Fa1_7_8.doc

8. Точно так же $C_p^r[a;b]$ B-пространством не является.

§1.8

Ряды в пространстве Банаха. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра.

Определение 1.22. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется ***сходящимся*** в X, если существует такой элемент $S \in X$, для которого $\| S - S_n \| \to 0$ при $n \to \infty$ (здесь S_n – *n*-я частичная сумма данного ряда).

Элемент S называют ***суммой ряда*** и пишут $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Определение 1.23. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд из норм его членов, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x_k \| < \infty$.

Теорема 1.10. В банаховом пространстве любой абсолютно сходящийся ряд сходится. Обратное утверждение неверно.

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится, то его частичные суммы образуют фундаментальную последовательность, так как $\| S_n - S_m \| = \| \sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k \| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \| x_k \| \to 0$ при $n \to \infty$. Ввиду полноты X существует предел последовательности $\{S_n\}$.

Контрпример. В банаховом пространстве $\mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$ сходится, но не абсолютно.

Теорема **1.11.**

Если в ЛНП X всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, то X – банахово пространство.

Fa1_8_4.doc

Теорема **1.12.** (Принцип вложенных шаров)

Всякая последовательность замкнутых вложенных стягивающихся шаров банахова пространства имеет единственную общую точку.

Fa1_8_6.doc

Теорема **1.13.**

Если в линейном нормированном пространстве X выполняется принцип вложенных шаров, то X – банахово пространство.

Fa1_8_8.doc

Определение 1.25. E_1 называется ***нигде не плотным*** в E, если в любом шаре B найдется шар B_1, в котором нет ни одной точки множества E_1.

Определение 1.26. E называется множеством I ***категории***, если оно представляет собой конечное или счетное объединение множеств, нигде не плотных в E. E называется множеством II ***категории***, если оно <u>не</u> <u>является</u> множеством I категории.

Теорема **1.14.**
(Теорема Бэра)

В банаховом пространстве любой шар – множество $I\,I$ категории.

Fa1_8_11.doc

Тесты:

1. Фундаментальна ли последовательность $\left\{x^{1/n}\right\}$ и сходится ли она в пространствах $C[0,1]$, $C_1[0,1]$?

2. Те же вопросы применительно к последовательности $\left\{x^n\left(1-x^n\right)\right\}$.

Тесты:

3. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k\left(1-x^k\right)$ поточечно на $[0,1]$? Сходится ли ряд по норме пространств $C[0,1]$, $C_1[0,1]$?

4. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ в пространстве $C_2[-\pi,\pi]$? Сходится ли ряд из норм в этом пространстве?