

Лекция 9

§ 1.13.

§ 1.13

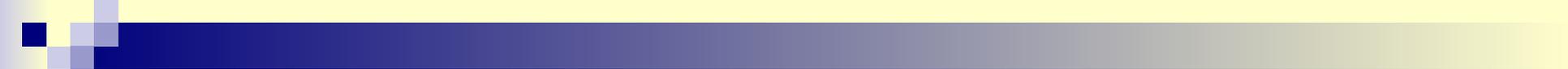
Абстрактные ряды Фурье.
Изоморфизм гильбертовых
пространств.



Определение 1.40. Последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ненулевых элементов пространства со скалярным произведением образует *ортгональную систему* (сокращенно *ОС*), если $(e_i, e_j) = 0$, когда $i \neq j$.

Определение 1.41. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *ортонормированной (ОНС)*, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$



Свойства ортогональных систем в гильбертовом пространстве.

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ по ортогональной системе с произвольными числовыми коэффициентами α_k сходится в H тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2$.

Доказательство. Так как по теореме Пифагора

то частичные суммы обоих рядов могут образовывать фундаментальные последовательности только одновременно.

Но пространства H и ℓ^2 оба полные, поэтому рассматриваемые ряды могут сходиться тоже только одновременно.

2. Если элемент x представим в виде суммы ряда по ортого-

нальной системе $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, то при всех k $c_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$.

Доказательство. Мы имеем $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i e_i$. Ввиду

непрерывности скалярного произведения при любом натуральном k будет

$$(x, e_k) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i e_i, e_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i (e_i, e_k) = c_k (e_k, e_k),$$

так как $\{e_k\}$ – ортогональная система. Отсюда и следует доказываемая формула.

Определение 1.42. Выражения $c_k = c_k(x) = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$

называют *коэффициентами Фурье*, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ —

рядом Фурье элемента по ортогональной системе

. Мы будем кратко записывать этот факт сле-

дующим образом:

3. Пусть $S_n = S_n(x)$ – n -я частичная сумма ряда Фурье

для x , т.е. $S_n = \sum_{i=1}^n c_k(x) e_k$. В таком случае $x - S_n \perp L_n$, где

$$L_n = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $x - S_n \perp e_k$

для всех $k \leq n$. Однако при таких значениях k

$$(x - S_n, e_k) = (x, e_k) - c_k(e_k, e_k) = (x, e_k) - (x, e_k) = 0.$$

4. Минимальное свойство сумм Фурье: вся частичная сумма ряда Фурье $S_n(x)$ представляет собой элемент наилучшего приближения для x в L_n , т.е. $\|x - S_n(x)\| \leq \|x - T_n\|$ для любого мно-

гочлена $T_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, отличного от $S_n(x)$.

Доказательство. Это утверждение сразу следует из теоремы Б. Лёви, так как согласно свойству 3 $x - S_n(x) \perp L_n$.

5. Неравенство Бесселя. Для любого x

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 e_k^2 \leq x^2 .$$

Доказательство неравенства Бесселя. Замечания.

[Fa 1_13_8.doc](#)

Замечания.

[Fa 1_13_9.doc](#)

Определение 1.43. Подмножество E линейного нормированного пространства X называется *тотальным*, если $\overline{\text{Lin}(E)} = X$, т.е. совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов из E всюду плотна в пространстве X .

Определение 1.44. Подмножество E пространства со скалярным произведением называется *недополняемым*, если только нулевой элемент пространства ортогонален всем $y \in E$.

Теорема 1.25. В гильбертовом пространстве H множество E тотально тогда и только тогда, когда оно недополняемо.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $L = \text{Lin}(E)$.

Если множество E тотально, то по определению $\bar{L} = H$, но тогда $L^\perp = \{0\}$. Элемент x , ортогональный всем y из E , принадлежит $L^\perp = \{0\}$ и потому является нулевым элементом.

Таким образом, множество E недополняемо.

Наоборот, если множество E недополняемо, то и подавно $L^\perp = \{0\}$, но тогда $\bar{L} = H$, следовательно, E тотально.

Теорема 1.26. Пусть $\{e_k\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H . В таком случае следующие условия эквивалентны:

- 1) $\{e_k\}$ является тотальным (недополняемым) множеством;
- 2) любой элемент $x \in H$ раскладывается в ряд Фурье по этой системе.
- 3) для любого элемента $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля.

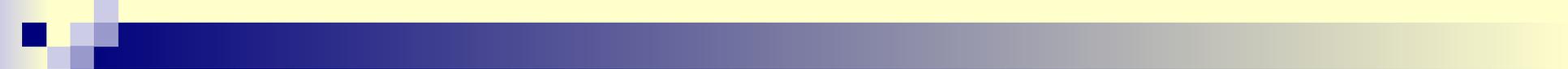
Перед тем как переходить к доказательству, отметим один частный случай – *равенство Парсеваля - Стеклова*, являющееся следствием этой теоремы и второй теоремы Вейерштрасса: для любой функции $f \in L_2[-\pi; \pi]$

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

где a_k, b_k – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье этой функции.

Доказательство теоремы **1.26.**

Фа 1_13_14.doc



Изоморфизм гильбертовых пространств.

Определение 1.45 Пространства со скалярным произведением X и Y называются *изометрически изоморфными*, если существует отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, биективное и линейное в обе стороны, которое сохраняет скалярное произведение (а значит и норму). Последнее требование означает, что $(\varphi(x_1), \varphi(x_2))_Y = (x_1, x_2)_X$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

Теорема **1.27** (об изоморфизме).

Теорема 1.27. Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства над полем \mathbb{K} (над полем \mathbb{K}) изометрически изоморфны между собой.

[Фа 1_13_17.doc](#)

Замечание. Доказанное только что равенство

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)}$$
 легко обобщается на случай произ-

вольного ортогонального базиса (без условия нормировки):

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2.$$

Это соотношение называют *обобщенным равенством Парсеваля*, так как его частный случай при $x = y$ представляет собой обычное равенство Парсеваля.

Тесты:

1. Тотально ли множество $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ в пространствах $L_2[0, \pi]$, $L_2[-\pi, \pi]$?

2. Справедливо ли равенство $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}$ 1) в смысле поточечной сходимости на $(0, 2\pi)$, 2) в смысле равномерной сходимости на $(0, 2\pi)$, 3) в смысле сходимости в $L_2[0, 2\pi]$?

3. Найти величину наилучшего приближения функции $\frac{\pi - x}{2}$ тригонометрическими многочленами порядка $\leq n$ в $L_2[0, 2\pi]$.

Тесты:

4. Убедиться в том, что функция $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ представляет собой алгебраический многочлен степени n (n -й многочлен Чебышева).

Указание. Преобразовать произведение $2 \cos t \cos nt$ в сумму.

5. Доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в $L_{2,\rho}[-1,1]$, т.е.

$\int_{-1}^1 T_i(x) T_j(x) \rho(x) dx = 0$ при $i \neq j$. Чему равна норма T_n ?

6. Записать равенство Парсеваля для функции $|x|$ в пространстве $L_{2,\rho}[-1,1]$ по системе многочленов Чебышева.