# Лекция 9

§ 1.13.

# § 1.13

Абстрактные ряды Фурье.

Изоморфизм гильбертовых пространств.

**Определение 1.40.** Последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ненулевых элементов пространства со скалярным произведением образует ***ортогональную систему*** (сокращенно $OC$), если $\left(e_i, e_j\right) = 0$, когда $i \neq j$.

**Определение 1.41.** Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется ***ортонормированной*** ***(ОНС)***, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

# Свойства ортогональных систем
# в гильбертовом пространстве.

**1.** Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ по ортогональной системе с произвольными числовыми коэффициентами $\alpha_k$ сходится в $H$ тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2\|e_k\|^2$.

**Доказательство**. Так как по теореме Пифагора

,

то частичные суммы обоих рядов могут образовывать фундаментальные последовательности только одновременно. Но пространства и оба полные, поэтому рассматриваемые ряды могут сходиться тоже только одновременно.

**2.** Если элемент $x$ представим в виде суммы ряда по ортогональной системе $x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, то при всех $k$ $c_k = \dfrac{(x,e_k)}{(e_k,e_k)}$.

**Доказательство.** Мы имеем $x=\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i e_i$. Ввиду непрерывности скалярного произведения при любом натуральном $k$ будет

$$(x,e_k)=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i e_i, e_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i (e_i,e_k)=c_k(e_k,e_k),$$

так как $\{e_k\}$ – ортогональная система. Отсюда и следует доказываемая формула.

**Определение 1.42.** Выражения $c_k = c_k(x) = \dfrac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$

называют ***коэффициентами Фурье***, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ –

***рядом Фурье*** элемента    по ортогональной системе

. Мы будем кратко записывать этот факт сле-

дующим образом:                .

3. Пусть $S_n = S_n(x)$ – $n$-я частичная сумма ряда Фурье для $x$, т.е. $S_n = \sum_{i=1}^{n} c_k(x)e_k$. В таком случае $x - S_n \perp L_n$, где $L_n = Lin\{e_1, \ldots, e_n\}$.

**Доказательство**. Достаточно доказать, что $x - S_n \perp e_k$ для всех $k \le n$. Однако при таких значениях $k$

$$(x - S_n, e_k) = (x, e_k) - c_k(e_k, e_k) = (x, e_k) - (x, e_k) = 0.$$

**4.** ***Минимальное свойство сумм Фурье:*** ***пя*** ча-стичная сумма ряда Фурье $S_n(x)$ представляет собой элемент наилучшего приближения для $x$ в $L_n$, т.е. $\| x - S_n(x) \| < \| x - T_n \|$ для любого многочлена $T_n = \sum_{1=k}^{n} \alpha_k e_k$, отличного от $S_n(x)$.

**Доказательство.** Это утверждение сразу следует из теоремы Б. Ле́ви, так как согласно свойству 3 $x - S_n(x) \perp L_n$.

5. ***Неравенство Бесселя***. Для любого $x$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2 .$$

# Доказательство неравенства Бесселя. Замечания.

[Fa 1_13_8.doc]

Замечания.

[Fa 1_13_9.doc]

**Определение 1.43.** Подмножество $E$ линейного нормированного пространства $X$ называется ***тотальным***, если $\overline{\mathrm{Lin}(E)} = X$, т.е. совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов из $E$ всюду плотна в пространстве $X$.

**Определение 1.44.** Подмножество $E$ пространства со скалярным произведением называется ***недополняемым***, если только нулевой элемент пространства ортогонален всем $y \in E$.

**Теорема 1.25.** В гильбертовом пространстве $H$ множество $E$ тотально тогда и только тогда, когда оно недополняемо.

**Доказательство**. Рассмотрим подпространство $L = \mathrm{Lin}(E)$.

Если множество $E$ тотально, то по определению $\overline{L} = H$, но тогда $L^{\perp} = \{0\}$. Элемент $x$, ортогональный всем $y$ из $E$, принадлежит $L^{\perp} = \{0\}$ и потому является нулевым элементом. Таким образом, множество $E$ недополняемо.

Наоборот, если множество $E$ недополняемо, то и подавно $L^{\perp} = \{0\}$, но тогда $\overline{L} = H$, следовательно, $E$ тотально.

**Теорема 1.26.** Пусть $\{e_k\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве $H$. В таком случае следующие условия эквивалентны:

1) $\{e_k\}$ является тотальным (недополняемым) множеством;

2) любой элемент $x \in H$ раскладывается в ряд Фурье по этой системе.

3) для любого элемента $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля.

Перед тем как переходить к доказательству, отметим один частный случай – ***равенство Парсеваля - Стеклова***, являющееся следствием этой теоремы и второй теоремы Вейерштрасса: для любой функции $f \in L_2[-\pi;\pi]$

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

где $a_k, b_k$ – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье этой функции.

# Доказательство теоремы **1.26.**

Fa 1_13_14.doc

Изоморфизм гильбертовых пространств.

**Определение 1.45** Пространства со скалярным произведением $X$ и $Y$ называются ***изометрически изоморфными***, если существует отображение $\varphi : X \to Y$, биективное и линейное в обе стороны, которое сохраняет скалярное произведение (а значит и норму). Последнее требование означает, что $(\varphi(x_1), \varphi(x_2))_Y = (x_1, x_2)_X$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

# Теорема **1.27**
# **(**об изоморфизме**).**

**Теорема 1.27.** Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства над полем □ (над полем □) изометрически изоморфны между собой.

Fa 1_13_17.doc

**Замечание.** Доказанное только что равенство $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}$ легко обобщается на случай произвольного ортогонального базиса (без условия нормировки):

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}\,\|e_k\|^2 .$$

Это соотношение называют ***обобщенным равенством Парсеваля***, так как его частный случай при $x=y$ представляет собой обычное равенство Парсеваля.

# Тесты:

**1.** Тотально ли множество $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ в пространствах $L_2[0,\pi]$, $L_2[-\pi,\pi]$?

**2.** Справедливо ли равенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$ 1) в смысле поточечной сходимости на $(0,2\pi)$, 2) в смысле равномерной сходимости на $(0,2\pi)$, 3) в смысле сходимости в $L_2[0,2\pi]$?

**3.** Найти величину наилучшего приближения функции $\frac{\pi-x}{2}$ тригонометрическими многочленами порядка $\leq n$ в $L_2[0,2\pi]$.

# Тесты:

**4.** Убедиться в том, что функция $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ представляет собой алгебраический многочлен степени $n$ ($n$-й многочлен Чебышева).

**Указание.** Преобразовать произведение $2\cos t \cos nt$ в сумму.

**5.** Доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему с весом $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в $L_{2,\rho}[-1,1]$, т.е.

$\int_{-1}^{1} T_i(x) T_j(x) \rho(x) = 0$ при $i \neq j$. Чему равна норма $T_n$?

**6.** Записать равенство Парсеваля для функции $|x|$ в пространстве $L_{2,\rho}[-1,1]$ по системе многочленов Чебышева.