Лекция 11.

§ 2.3

§2.3.

Принцип равномерной ограниченности.

Лемма 2.1. Если линейный оператор $A : X \to Y$ в шаре $\overline{B}_r(a) \subset X$ удовлетворяет неравенству $\|Ax\| \leq C$, то A ограничен и $\|A\| \leq \dfrac{C}{r}$.

Доказательство. Пусть $E = \left\{ x \in X \mid \ \|Ax\| \leq C \right\}$. Так как E − центрально-симметричное выпуклое множество и $\overline{B}_r(a) \subset E$, то и $\overline{B}_r(0) \subset E$. Поэтому

$$\|A\| = \sup_{x \in S_1(0)} \|Ax\| \leq \frac{C}{r}.$$

Теорема 2.6 (Банах - Штейнгауз). Принцип равномерной ограниченности.

Пусть X – банахово пространство, Y – ЛНП. Рассмотрим семейство операторов $\{A_\lambda\} \subset L(X,Y)$, где λ пробегает произвольное индексное множество Λ. Если $\{A_\lambda\}$ поточечно ограничено (т.е. $\forall x \in X \ \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \| A_\lambda x \| = F(x) < \infty$), то это семейство ограничено и по норме (т.е. $\exists C > 0$ такое, что $\| A_\lambda \| < C, \quad \forall \lambda \in \Lambda$).

Fa 2_03_3.doc

Теорема **2.7** (Условия поточечной сходимости).

Пусть X – банахово пространство, Y – ЛНП; пусть $A \in L(X,Y)$ и $\{A_n\} \subset L(X,Y)$. Для того, чтобы последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходилась к оператору A на всем X, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1) последовательность $\{A_n\}$ ограничена по норме;

2) последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору A на некотором всюду плотном подмножестве E пространства X.

Доказательство.

Fa 2_03_5.doc

Тесты:

1. Пусть A монотонный линейный оператор, действующий в пространстве $C_{2\pi}$. Какие из следующих утверждений справедливы: 1) A − неограничен, 2) $\|A\| = 1$, 3) $\|A\| = A[1]$?

2. Рассмотрим оператор $y = Ax$, действующий в пространстве последовательностей, где $y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. A − положительный линейный оператор. При этом $Ae = e$ для $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ и

$$Ae_n = \left\{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\right\} \text{ для } e_n = \left\{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots\right\}.$$

Доказать, что 1) $A: c \to c$, 2) $\|A\| = 1$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Тесты:

3. Пусть $S_n(x,t)$ – nя частичная сумма тригонометрического ряда Фурье и $\sigma_n(x,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_n(x,t)$. Нетрудно убедиться в том, что σ_n – положительный непрерывный оператор, действующий в пространстве $C_{2\pi}$, и что $\sigma_n(x_k,t) = \left(1-\frac{k}{n+1}\right)x_k(t)$ при $n \geq k$ для функций $\cos kt$, $\sin kt$. Доказать, что $\forall x \in C_{2\pi}$ $\left\|\sigma_n(x)-x\right\|_{C_{2\pi}} \to 0$.

4. Рассмотрим последовательность линейных функционалов $F_n(x) = S_n(x,0)$. Известно, что $\left\|F_n\right\| \to \infty$при n $\to \infty$ (см. "Пособие", задача 5.25). Выберите верное из утверждений**:**

а) $\forall x \in C_{2\pi}$ $F_n(x) \to x(0)$, б) $\exists x \in C_{2\pi}$ **:** $\sup\limits_n \left|F_n(x)\right| = \infty$.