Лекция 14

§§ 2.7.-2.8.

§ 2.7

Понятие сопряженного пространства.

Пусть X – линейное нормированное пространство над полем F, где F – это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение 2.10. ***Сопряженным*** (точнее, топологически сопряженным) пространством для X называется пространство X^* всех линейных непрерывных функционалов на X, т.е. $X^* = L(X, F)$.

Заметим, что в отличие от него алгебраически сопряженное пространство X' состоит из всех линейных функционалов на X, не только непрерывных.

Прежде всего, X^* нетривиально. Напротив, оно содержит достаточно много функционалов для того, чтобы с их помощью различать элементы пространства X. Действительно, для любых различных элементов $x_1, x_2 \in X$ можно указать функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Для построения такого функционала $f \in X^*$ можно применить следствие из теоремы Банаха – Хана к элементу $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$ и тривиальному подпространству $L = \{0\}$. При этом окажется, что $f(x_1) - f(x_2) = f(x_0) = \|x_0\| > 0$.

Далее, так как □ и □ – банаховы пространства, то, независимо от полноты X, пространство X^* – всегда банахово.

Упражнение 2.4. (Задача 6.13) Пусть $f \in X^*$, $f \not\equiv 0$ и пусть $N = \operatorname{Ker} f$. Доказать, что N – замкнутое подпространство X и что при любом $x_0 \in X$

$$\operatorname{dist}(x_0, N) = \frac{|f(x_0)|}{\|f\|}.$$

Упражнение 2.5. (Задача 6.14) Пусть $f \in X^*$ и $N = \operatorname{Ker} f$. Если для данного f не существует экстремального элемента, то есть такого $z \in X$, для которого $\dfrac{|f(z)|}{\|z\|} = \|f\|$, то для любого $x \notin N$

$$\|x - y\| > \operatorname{dist}(x, N), \quad \forall y \in N$$

то есть, ни у одного $x \notin N$ нет элемента наилучшего приближения в N

В X^* можно рассматривать *поточечную* сходимость и сходимость *по норме* X^*. Из сходимости по норме, как мы знаем, вытекает поточечная сходимость.

Следующий пример показывает, что и в X^* из поточечной сходимости не вытекает сходимость по норме.

[Fa 2_07_05.doc]

В свою очередь, с помощью X^* можно ввести в X еще одно понятие сходимости.

Определение 2.11. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется слабо сходящейся к элементу $x \in X$, если для любого $f \in X^*$ имеем $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Этот факт обычно записывают в виде $x_n \xrightarrow{w} x$.

Легко видеть, что из сходимости по норме X $x_n \to x$ вытекает слабая сходимость x_n к x. Обратное же утверждение неверно.

Контрпример.

Рассмотрим ортонормированную последовательность элементов $\{e_n\}$ гильбертова пространства H. Мы видели, что эта последовательность не является сходящейся по норме. Докажем, что она, тем не менее, слабо сходится к нулю. Для любого $f \in H^*$ по теореме Рисса существует элемент $y = y_f \in H$ такой, что $f(x) = (x, y), \ \forall x \in H$. В таком случае будет $f(e_n) = (e_n, y) = \overline{(y, e_n)} \to 0$ ввиду неравенства Бесселя. Следовательно, $e_n \xrightarrow{w} 0$

Отметим теперь, что любой элемент $x \in X$ порождает с помощью формулы $F_x(f) = f(x)$ линейный непрерывный функционал F_x, определенный на пространстве X^*.

Линейность F_x очевидна, ограниченность следует из неравенства $|F_x(f)| = |f(x)| \le \|x\| \cdot \|f\|$, которое показывает, что $\|F_x\| \le \|x\|$.

Легко видеть, что на самом деле $\|F_x\| = \|x\|$. Действительно, ввиду следствия из теоремы Банаха – Хана существует функционал $f = f_x \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. Но для такого f будет

$$|F_x(f)| / \|f\| = |f(x)| / \|f\| = \|x\|.$$

Это приводит к противоположной оценке: $\|F_x\| \ge \|x\|$.

Пространство всех линейных непрерывных функционалов на X^* называется ***вторым сопряженным пространством*** для X и обозначается X^{**}. Предыдущие рассмотрения показывают, что X изометрически изоморфно подпространству второго сопряженного пространства X^{**}.

Отметим, что отображение $x \mapsto F_x$ называется ***каноническим вложением*** или ***отображением двойственности***.

Определение 2.12 Линейное нормированное пространство X называется ***рефлексивным***, если оно изометрически изоморфно второму сопряженному X^{**} пространству.

Гильбертово пространство рефлексивно.

Действительно, согласно теореме Рисса существует полулинейный изометрический изоморфизм между пространствами H^* и .

Точно так же существует полулинейный изометрический изоморфизм между гильбертовыми пространствами . Композиция этих отображений – линейный изометрический изоморфизм между пространствами и .

§2.8.

Свойства самосопряженных операторов.

В этом и следующих параграфах H – гильбертово пространство над полем ￼ .

Пусть $A \in L(H)$ и $y \in H$. Рассмотрим линейный функционал F_y, определенный для всех x с помощью формулы $F_y(x) = (Ax, y)$. Его ограниченность следует из неравенства

$$|F_y(x)| \le \|Ax\| \cdot \|y\| \le \underbrace{\|A\| \cdot \|y\|}_{C} \cdot \|x\| = C\|x\|.$$

По теореме Рисса существует элемент $z_y \in H$ такой, что $F_y(x) = (x, z_y)$. Ясно, что отображение $y \mapsto z_y$ является линейным оператором. Этот оператор называется ***сопряженным*** по отношению к оператору A и обозначается A^*. По определению $(Ax, y) = (x, A^* y), \quad \forall x, y \in H$.

Так как

$$\|A^*x\|^2=(A^*x,A^*x)=(AA^*x,x)\le\|A\|\cdot\|A^*x\|\cdot\|x\|,$$

то $\|A^*x\|\le\|A\|\cdot\|x\|$. Следовательно, A^* – ограниченный оператор, причем $\|A^*\|\le\|A\|$.

В то же время

$$\|Ax\|^2=(Ax,Ax)=(x,A^*Ax)\le\|x\|\cdot\|A^*\|\cdot\|Ax\|,$$

поэтому $\|Ax\|\le\|A^*\|\cdot\|x\|$ и, значит, $\|A\|\le\|A^*\|$.

Таким образом, $\|A^*\|=\|A\|$.

Определение 2.13 $A \in L(H)$ называется ***самосопряженным*** оператором (ССО), если $A^* = A$, т.е. $(Ax, y) = (x, Ay)$, $\forall x, y \in H$.

Теорема 2.13. Оператор $A \in L(H)$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда квадратичная форма (Ax, x) принимает действительные значения при всех $x \in H$.

Fa 2_08_04.doc

Упражнение 2.6. Доказать, что для любого $A \in L(H)$

$$\| A \| = \sup_{x, y \in S_1(0)} |(Ax, y)|$$

(ср. с задачей 7.11 в сборнике [3]).

Теорема 2.14. Если A – ССО, то $\| A \| = \sup\limits_{x \in S_1(0)} |(Ax, x)|$.

Fa 2_08_06.doc

Тесты:

1. Пусть $X = C_1[0,1]$. Полно ли пространство X^*?

2. Пусть $X = C_2[0,1]$. Найти пространство X^*.

3. Рефлексивны ли пространства $l_p,\ \ p \geq 1$?

Тесты:

В заданиях 4-6 рассматриваются функции класса $C^2[0,1]$ со скалярным произведением $(x,y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$.

4. Найти A^*, если $Ax(t)=x''(t)$ и функции $x\in D_A$ удовлетворяют краевым условиям $x(0)=x(1)=0$.

5. Найти A^*, если $Ax(t)=x''(t)$ и функции $x\in D_A$ удовлетворяют краевым условиям $x(0)=x(1)$, $x'(0)=x'(1)$.

6. Сохраняет ли знак квадратичная форма (Ax,x) для операторов A из заданий 4-5? Если сохраняет, то какой это знак?