Лекция 15

§§ 2.9.-2.10.

§ 2.9

Вполне непрерывные операторы.

Определение 2.14. Линейный оператор, действующий из одного ЛНП в другое, называется ***вполне непрерывным*** (или ***компактным***), если он переводит любое ограниченное множество в предкомпактное множество.

Легко видеть, что всякий вполне непрерывный оператор непрерывен. <u>**Обратное утверждение не верно.**</u> Так, например, тождественный оператор, действующий в бесконечномерном пространстве, переводит шар в себя, т.е. переводит ограниченное множество во множество, не являющееся предкомпактным.

Упражнение 2.7. Всякий линейный непрерывный оператор конечного ранга (т.е. оператор A, у которого $\dim\left(R_A\right) < \infty$) вполне непрерывен.

Множество всех вполне непрерывных (компактных) операторов, действующих из X в Y, обозначают $\mathrm{Com}(X,Y)$. Так как линейная комбинация двух таких операторов снова принадлежит этому множеству, то $\mathrm{Com}(X,Y)$ – линейное подпространство пространства $L(X,Y)$.

Теорема 2.15. $\mathrm{Com}(X,Y)$ – замкнутое подмножество $L(X,Y)$ (относительно сходимости по операторной норме).

Fa 2_09_04.doc

В пространстве $L(X)$ кроме линейных операций определено также умножение (композиция): $ABx = A(Bx)$. Нетрудно проверить, что $L(X)$ – кольцо (точнее – алгебра).

Упражнение 2.8. Доказать, что подалгебра $\mathrm{Com}(X)$ – двусторонний идеал в алгебре $L(X)$, т.е., если $A \in \mathrm{Com}(X)$ и $B \in L(X)$, то $AB \in \mathrm{Com}(X)$ и $BA \in \mathrm{Com}(X)$.

Рассмотрим теперь важный пример вполне непрерывного оператора. Оператор вида

$$Ax(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt$$

называется ***интегральным оператором*** с ядром $K(s,t)$. Мы будем считать, что ядро K принадлежит $L_2(Q)$, где $Q=[a,b]\times[a,b]$.

В данном случае A – линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $L_2[a,b]$. Ограниченность A – следствие неравенства Коши. Действительно, при любом $s \in [a,b]$

$$|Ax(s)| \le \int_a^b |K(s,t)x(t)|dt \le \left(\int_a^b |K(s,t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Поэтому $\|Ax\| \le \|K\| \cdot \|x\|$, где $\|K\| = \left(\iint_Q |K(s,t)|^2 \, dsdt \right)^{1/2}$, значит

$$\|A\| \le \|K\|. \qquad (2.4).$$

Если $K(s,t)=\overline{K(t,s)}$, то A – самосопряженный оператор. Отметим еще, что интегральный оператор представляет собой непрерывный аналог матричного оператора. Только здесь роль матрицы берет на себя ядро $K(s,t)$, и суммирование заменяется интегрированием.

Докажем теперь компактность интегрального оператора.

Заметим, что согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса существует последовательность полиномиальных ядер $K_n(s,t)=\sum_{k,l=0}^{n} c_{kl}\, s^k t^l$ таких, что норма $\| K-K_n \|$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Но тогда, согласно неравенству (2.4), для оператора A_n с ядром $K_n(s,t)$ будет выполнено неравенство $\| A-A_n \| \le \| K-K_n \| \to 0$. Это значит, что A – предел по операторной норме последовательности операторов A_n.

Заметим, что оператор A_n действует из пространства $L_2[a,b]$ в конечномерное пространство $\mathcal{P}_n$, состоящее из алгебраических многочленов степени не выше n, и потому является вполне непрерывным оператором. Из замкнутости $\mathrm{Com}(X)$ по операторной норме следует, что A – вполне непрерывный оператор.

Замечание.

Приведенное рассуждение легко обобщить на случай пространств $L_{2,\rho}$ с положительной непрерывной весовой функцией $\rho(t)$ (напомним, что в этом случае $(x,y)=\int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}\rho(t)\,dt$ $\quad \|x\|=\left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\rho(t)\,dt\right)^{1/2}$).

Именно, если $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$ $\quad$ ($\|K\|=\left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(s,t)|^2\rho(s)\rho(t)\,ds\,dt\right)^{1/2}<\infty$,

то отображение $A: x \mapsto \int\limits_a^b K(s,t)x(t)\rho(t)\,dt$ задаёт самосопряженный вполне непрерывный линейный оператор, действующий в пространстве $L_{2,\rho}[a,b]$, и при этом $\|A\|\le\|K\|$.

§2.10.

Теорема Гильберта – Шмидта.

Определение 2.15. Вектор $x \in H$ называется ***собственным вектором*** оператора $A \in L(H)$, соответствующим ***собственному значению*** λ, если $x \neq 0$ и $Ax = \lambda x$. Совокупность всех таких векторов (вместе с $x = 0$) образует ***собственное подпространство*** L_λ, отвечающее собственному значению λ.

Определение 2.16. L называется ***инвариантным подпространством*** оператора A, если $A(L) \subset L$.

Упражнение 2.9. Собственные значения ССО – действительные числа. Собственные векторы ССО, отвечающие разным собственным значениям, взаимно ортогональны.

Упражнение 2.10. Если A – ССО и L – его инвариантное подпространство, то $L^{\perp}$ – также инвариантное подпространство оператора A.

Лемма 2.2. Пусть $A \in L(H)$ – ненулевой вполне непрерывный ССО. У этого оператора существует ненулевое собственное значение λ (так, число $\lambda = +\|A\|$ или $\lambda = -\|A\|$ является собственным значением A).

[Fa 2_10_04.doc]

Лемма 2.3. Пусть A – вполне непрерывный оператор и пусть $\{e_\alpha\}$ – семейство его собственных векторов и λ_α – соответствующие собственные значения. Если векторы e_α образуют ортонормированную систему, а λ_α отделены от нуля, то семейство $\{e_\alpha\}$ содержит конечное число векторов.

Fa 2_10_06.doc

Теорема **3.16.** (Теорема Гильберта – Шмидта)

Пусть A – самосопряженный вполне непрерывный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

1. Существует ортонормированный базис пространства H, состоящий из собственных векторов оператора A.
2. Множество собственных значений не может иметь предельных точек, отличных от нуля.
3. Собственные подпространства, отвечающие ненулевым собственным значениям, имеют конечную размерность.

Fa 2_10_08.doc

Тесты:

Тесты: