Лекция 16.

§ 2.11.

§2.11.

Применение

теоремы Гильберта – Шмидта

к задаче

Штурма – Лиувилля.

Дифференциальный ***оператор Штурма – Лиувилля*** M

каждой функции из области определения ставит в соответствие функцию , определенную формулой

где

.

Оператор действует в пространстве и определен на его плотном подпространстве , состоящем из функций класса , удовлетворяющих краевым условиям

, .

Нетрудно доказать, что собственные значения оператора M, если они имеются, неотрицательны, и что собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, попарно ортогональны в $L_{2,\rho}[0,l]$, то есть, ортогональны относительно скалярного произведения $(f,g)=\int\limits_0^l f(t)g(t)\rho(t)\,dt$ *) .

Сложнее доказать сам факт существования собственных значений у оператора M и другие важные положения.

Сейчас мы восполним этот пробел.

---

*) См., например, первую лекцию в пособии №1459: Гопенгауз И. Е., Методы математической физики. Курс лекций.

Для того чтобы изучить свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма – Лиувилля, мы ниже построим интегральный оператор A, являющийся правым обратным по отношению к M. Но сначала выясним, что это нам даст.

Итак, пусть $MA = \mathrm{Id}$. Из этого равенства, прежде всего, будет ясно, что A не может иметь нулевого собственного значения. Далее, окажется, что A – самосопряженный вполне непрерывный линейный оператор

В таком случае из теоремы Гильберта – Шмидта следует, что все его собственные значения μ_n положительны и имеют конечную кратность, что из соответствующих собственных функций $x_n(t)$ можно составить ортонормированный базис в пространстве $L_{2,\rho}[0,l]$, и, наконец, что при упорядочении μ_n по убыванию $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как $x_n = MAx_n = \mu_n Mx_n$, то x_n являются одновременно и собственными функциями оператора Штурма – Лиувилля M с собственными значениями, равными $\lambda_n = \left(\mu_n\right)^{-1}$. Поэтому из собственных функций оператора Штурма - Лиувилля можно составить ортонормированный базис в пространстве $L_{2,\rho}[0,l]$. Из сказанного следует также, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mu_n\right)^{-1} = +\infty$.

Замечание. В рассматриваемом случае, когда оператор действует в пространстве функций одного переменного, кратность собственных значений равна единице.

В самом деле, если u и v – собственные функции оператора M, отвечающие одному и тому же собственному значению λ, то ввиду краевых условий их определитель Вронского $W(u,v;t)$ тождественно равен нулю на отрезке $[0,l]$. А так как u и v удовлетворяют одному и тому же линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка, то эти функции линейно зависимы на отрезке $[0,l]$.

Займемся теперь построением оператора A.

Мы будем считать, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора M (если прибавить $\varepsilon \geq 0$ к функции $q(t)$ в определении M, то его собственные значения увеличатся на ε, а собственные функции не изменятся).

Рассмотрим решение следующих двух задач Коши:

1) $Mu=0; \quad u(0)=B,\ u'(0)=A$; 2). $Mv=0; \quad v(l)=D,\ v'(l)=-C$. Ясно, что

$Au(0)-Bu'(0)=0$ и $Cv(l)+Dv'(l)=0$. Эти решения линейно независимы**).

Поэтому $W(u,v;t)\neq 0$. В то же время

$$\frac{d}{dt}\{p(t)W(u,v;t)\}=p'\left(uv'-u'v\right)+p\left(uv''-u''v\right)=-v\left(pu'\right)'+u\left(pv'\right)'=$$

$$=v\rho\left[-\frac{1}{\rho}\left(pu'\right)'+qu\right]-u\rho\left[-\frac{1}{\rho}\left(pv'\right)'+qv\right]=v\rho Mu-u\rho Mv\equiv 0$$

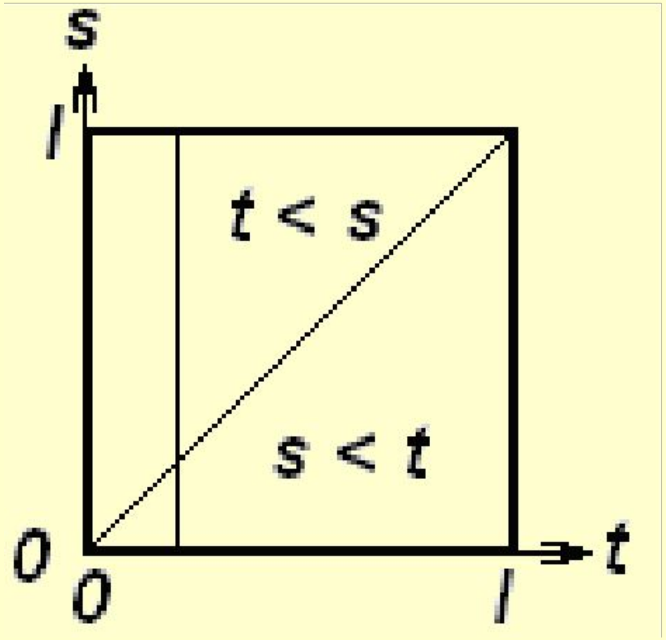
Следовательно, $p(t)W(u,v;t)=N=Const\neq 0$.

**) Иначе, функция u была бы пропорциональна v и, значит, u была бы собственной функцией оператора M, соответствующей нулевому собственному значению, так как в этом случае $Mu=0$ и $\begin{cases} Au(0)-Bu'(0)=0 \\ Cu(l)+Du'(l)=0 \end{cases}$.

Обозначим $G(t,s) = -\frac{1}{N} \cdot \begin{cases} u(t)v(s), & 0 \le t \le s \le l, \\ v(t)u(s), & 0 \le s \le t \le l. \end{cases}$

и определим оператор A с помощью формулы:

$$x(t) = Ay(t) = \int_0^l G(t,s)\rho(s)y(s)\,ds.$$



Ядро $G(t,s)$ интегрального оператора A называется ***функцией Грина оператора*** M. Функция $G(t,s)$ симметрична и непрерывна на квадрате $Q=[0,l]\times[0,l]$. Отсюда следует, что A – самосопряженный вполне непрерывный линейный оператор (см. лекцию 15 или раздел 2.9 “Курса”).

Проверим, что $MA=\mathrm{Id}$.

[Fa 2_11_10.doc]

Замечание. Из доказанного равенства $MA = \mathrm{Id}$ видно, что M сюръективен, а так как по предположению $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора M, то этот оператор одновременно еще и инъективен. Таким образом, M – биекция, значит, у него есть двусторонний обратный. Этот обратный оператор, очевидно, равен A.

Тесты:

1. Пусть $y = Ax$ − линейный оператор, действующий в пространстве l_2 по формуле $y_k = \lambda_k x_k$. Является ли этот оператор непрерывным, вполне непрерывным, если

а) $\lambda_k = k,\ \forall k \in \mathbb{N}$, б) $\lambda_k = 1 - \dfrac{1}{k},\ \forall k \in \mathbb{N}$, в) $\lambda_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \forall k \in \mathbb{N}$?

2. Необходимо ли условие вполне непрерывности оператора A, потребованное в теореме Гильберта − Шмидта, для существования ортонормированного базиса в H, состоящего из собственных векторов этого оператора?

Тесты:

3. Пусть A − интегральный оператор с ядром $K(t,s)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$. Является ли этот оператор непрерывным, вполне непрерывным, если

а) $K(t,s)=|t-s|$, б) $K(t,s)=|t-s|^{-\frac{1}{3}}$?

4. Удовлетворяют ли операторы из задания 3 условиям теоремы Гильберта − Шмидта?

Являются ли ядра этих интегральных операторов функциями Грина каких-либо задач Штурма − Лиувилля?