Лекция 11

Свойства некоторых аналоговых фильтров

Напомним, что частотные свойства аналогового фильтра определяются **передаточной функцией** (или **функцией передачи**) $H(s)$ где s - комплексное число.

Комплексный коэффициент передачи фильтра и **передаточная функция** $H(s)$ связаны соотношением.

$$K(\omega) = H(i\omega) \qquad (1)$$

<u>АЧХ и ФЧХ фильтра</u> находят как модуль и фазу комплексного коэффициента передачи.

$$A(\omega) = |K(\omega)|,$$
$$\varphi(\omega) = \arg(K(\omega)) \qquad (2)$$

Свойства фильтра определяются или коэффициентами a_i, b_i основного уравнения фильтра,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t) \qquad (3)$$

или нулями и полюсами zi, pi функции передачи.

Передаточная функция, выраженная через коэффициенты a_i, b_i, имеет вид.

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (4)$$

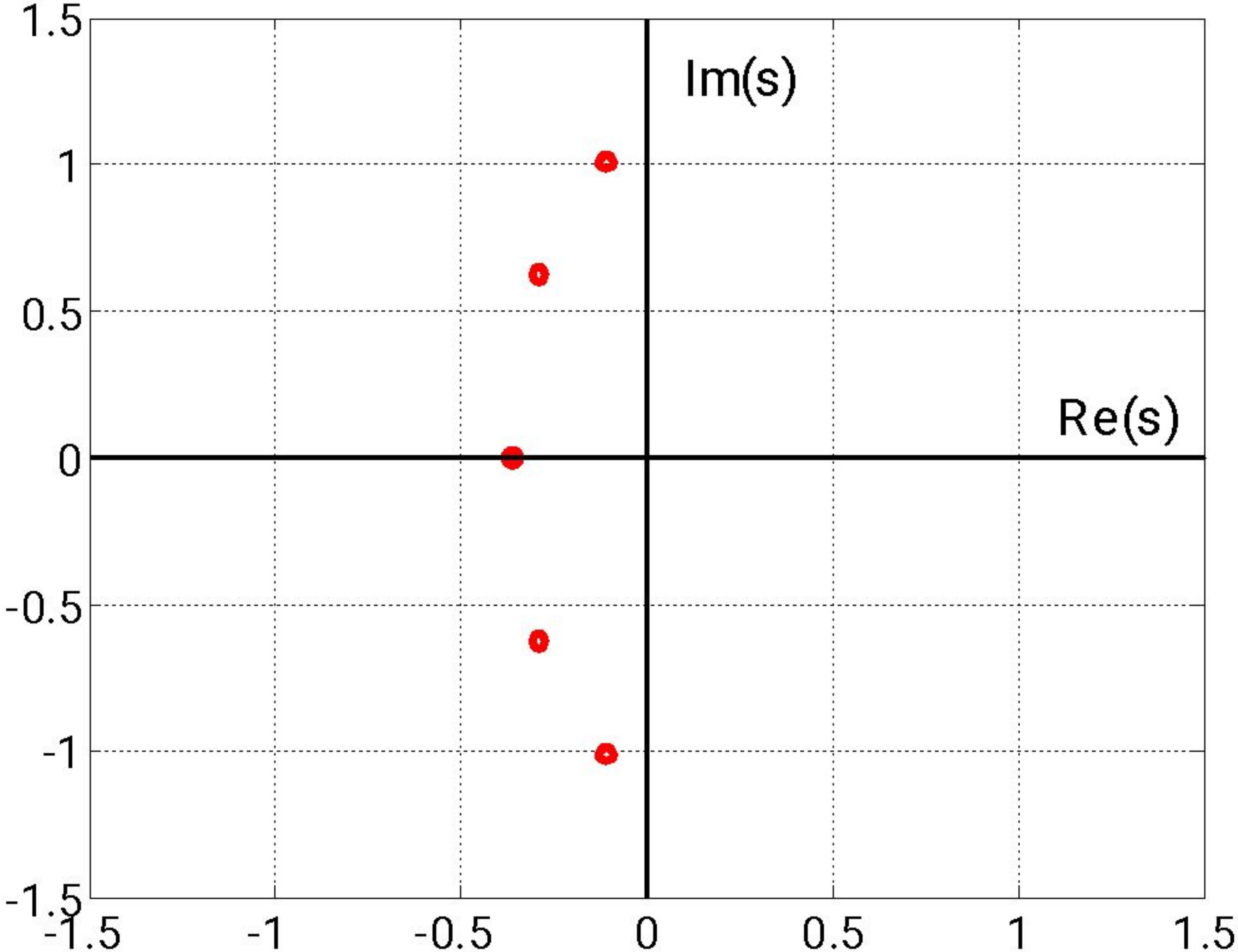
Передаточная функция, выраженная через нули и полюса, имеет вид.

$$H(s) = k\frac{(s - z_m)(s - z_{m-1})\cdots(s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1})\cdots(s - p_1)} \qquad (5)$$

Фильтр Чебышева первого рода

Фильтр Чебышева первого рода является фильтром нижних частот. Передаточная функция этого фильтра не имеет нулей, а ее полюсы расположены в левой половине эллипса на комплексной s - плоскости.

На рисунке показаны полюсы фильтра Чебышева первого рода 5 – го порядка.



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
Im(s)
Re(s)

Фильтр Чебышева первого рода имеет простые полюсы в точках

$$p_k = p'_k + ip''_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (6)$$

Здесь штрихи обозначают действительную и мнимую части комплексного числа p .

$$p' = \mathrm{Re}(p), \quad p'' = \mathrm{Im}(p) \qquad (7)$$

Полюсы определяются следующими формулами.

$$p'_k = -a\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad p''_k = b\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right),$$

$$a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \quad b = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \qquad (8)$$

$$\gamma = \left(\frac{1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Параметр ε определяет **величину пульсаций АЧХ в полосе пропускания**. Число n определяет **порядок фильтра**. Легко проверить, что полюса (6) лежат в комплексной плоскости на эллипсе, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{(p'_k)^2}{a^2} + \frac{(p''_k)^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

Используя связь (1) между **передаточной функцией** $H(s)$ и **комплексным коэффициентом передачи** K(ω), находим комплексный коэффициент передачи.

$$K(\omega) = H(i\omega) = \frac{k_0}{(i\omega - p_1)(i\omega - p_2)\cdots(i\omega - p_n)} \quad (10)$$

Нормировочный коэффициент k_0 выбирается из условия, чтобы АЧХ фильтра в точке ω=0 равнялась единице A(0) = 1.

Простые, но громоздкие вычисления позволяют получить для АЧХ фильтра Чебышева первого рода простую аналитическую формулу.

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega / \omega_0)}} \qquad (11)$$

Здесь ω_0 - частота среза, $T_n(x)$ - полином Чебышева n - го порядка.

Полином Чебышева n -го порядка определяется следующими формулами.

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)), & |x| \le 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch}(x)), & |x| > 1 \end{cases} \qquad (12)$$

Для полиномов Чебышева существует также рекуррентная формула.

$$T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \qquad (13)$$

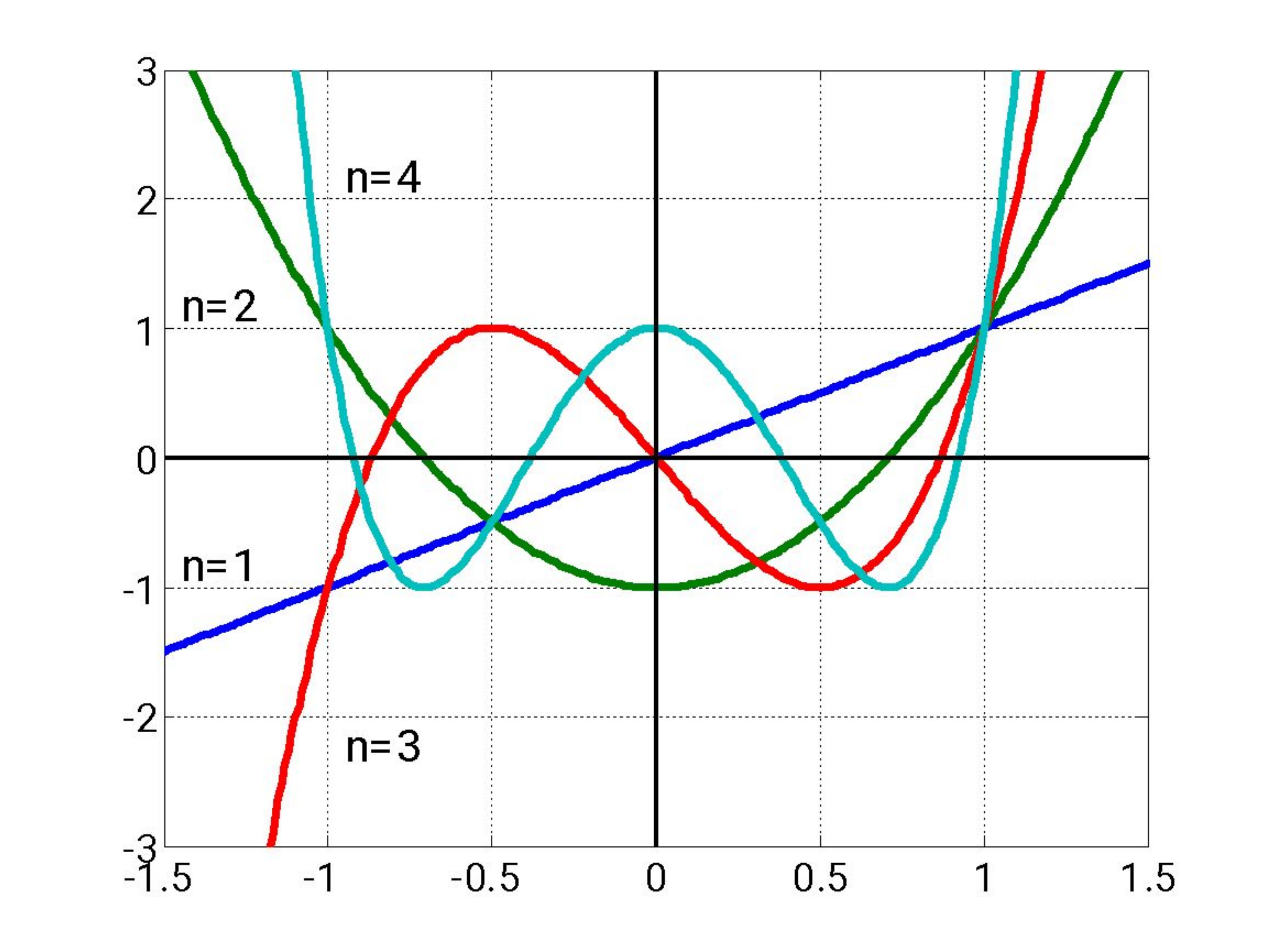
С помощью рекуррентной формулы (13) найдем некоторые из полиномов Чебышева.

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \qquad (14)$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

На рисунке показаны графики четырех полиномов Чебышева, порядков 1, 2, 3, 4.



Из формул (12) и из графиков, можно увидеть **интересное свойство полиномов Чебышева**.

Полиномы Чебышева $T_n(x)$ при изменении аргумента в интервале $-1 \leq x \leq 1$ имеют колебательный характер. Величина полиномов в этом интервале по модулю не превышает единицы

$$\left|T_n(x)\right| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \qquad (15)$$

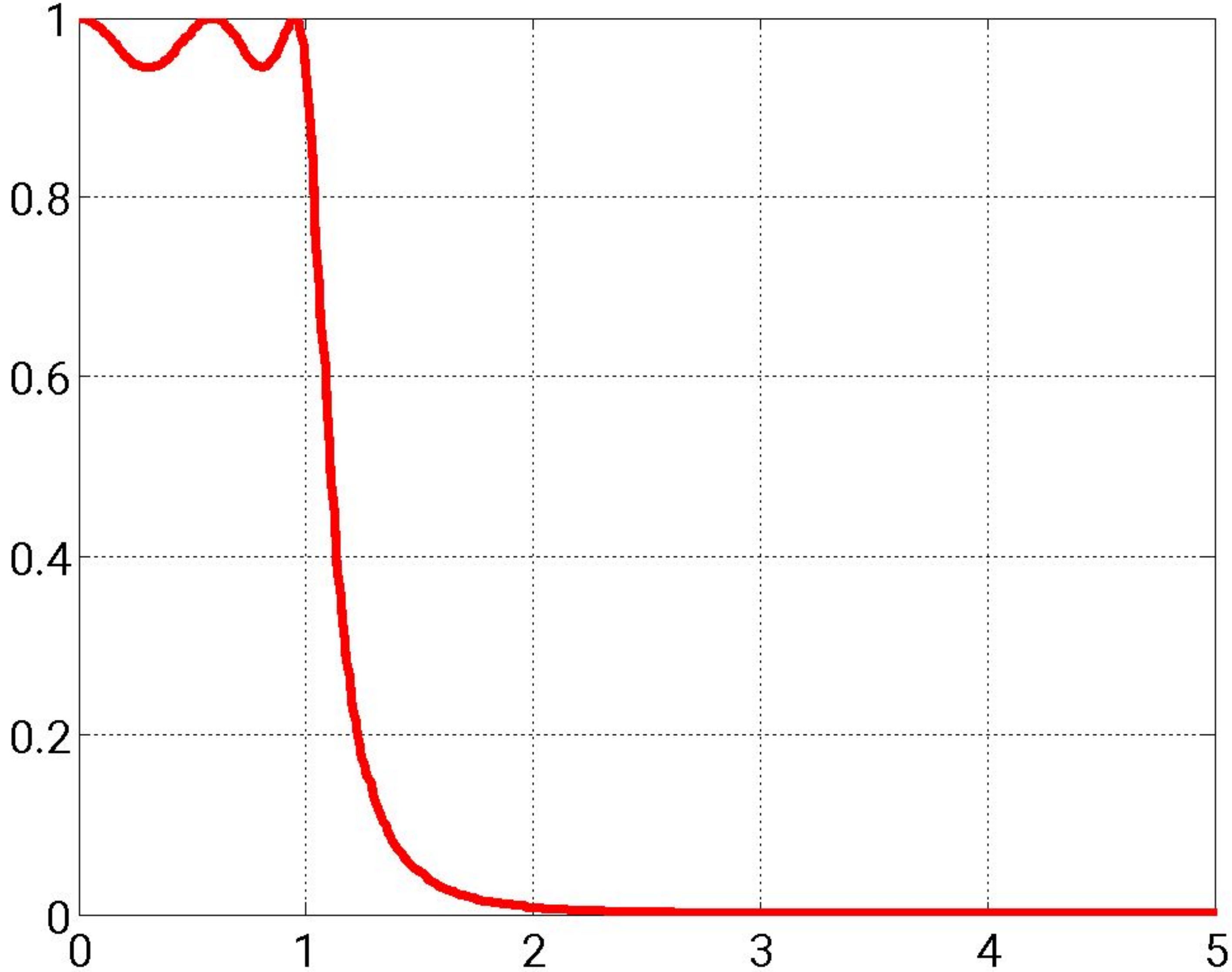
Вне интервала $-1 \leq x \leq 1$ полиномы Чебышева неограниченно возрастают по абсолютной величине.

Благодаря этому свойству полиномов Чебышева, АЧХ фильтра Чебышева первого рода (11) в полосе пропускания $|\omega| \le \omega_0$ колеблется между значениями $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ и 1.

$$1/\sqrt{1+\varepsilon^2} \le A(\omega) \le 1, \quad if \quad |\omega| \le \omega_0 \qquad (16)$$

Вне полосы пропускания $|\omega| \ge \omega_0$ АЧХ фильтра монотонно затухает до нуля.

На рисунке показано такое поведение АЧХ фильтра Чебышева первого рода 5-го порядка. Для простоты частота среза взята раной единице $\omega_0 = 1$.

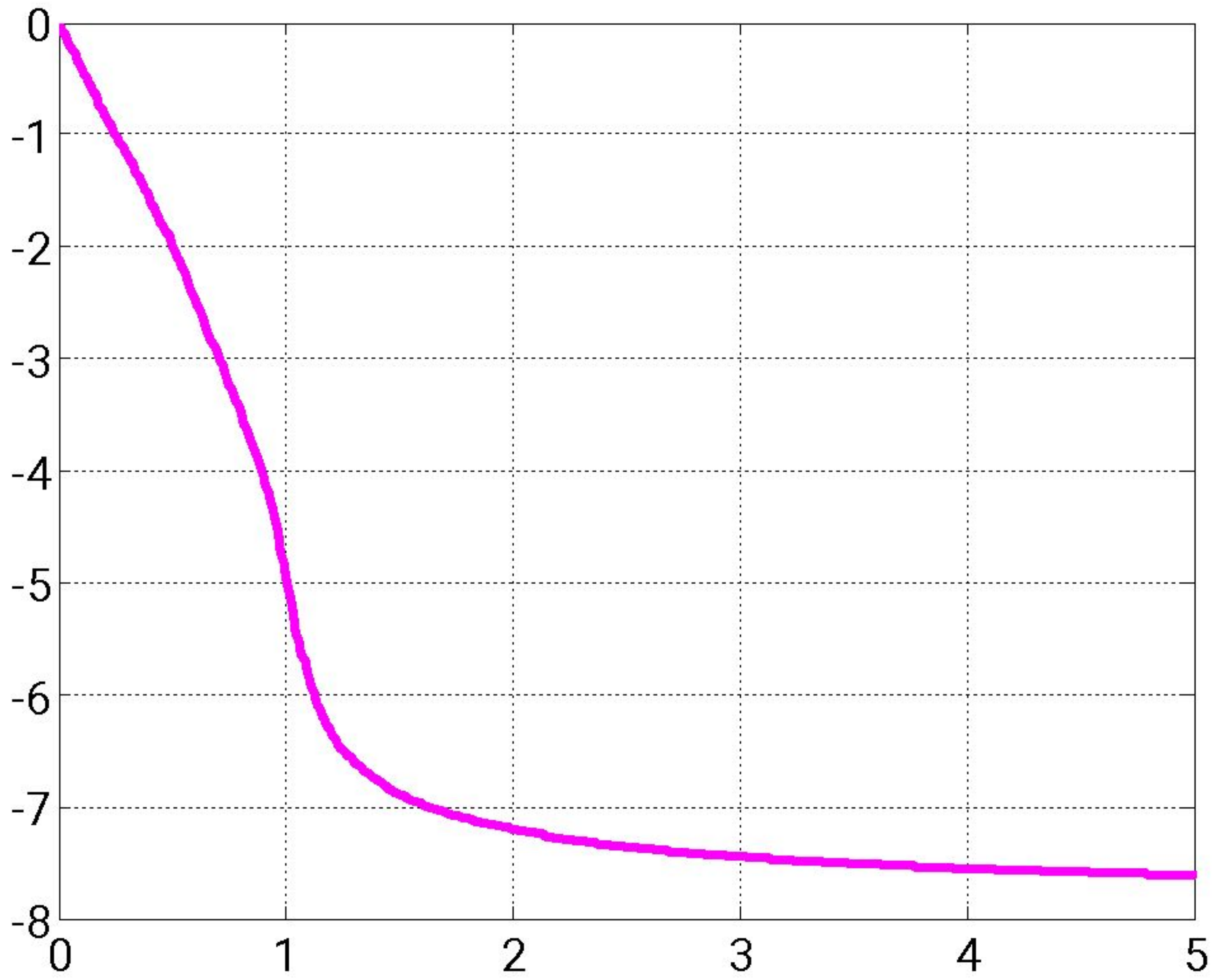

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5

Для ФЧХ фильтра не существует, такой простой аналитической формулы, как для АЧХ фильтра. Поэтому находить ФЧХ надо в лоб по формулам (2) и (10).

$$\varphi(\omega) = \arg\big(K(\omega)\big), \qquad (17)$$

$$K(\omega) = \frac{k_0}{(i\omega - p_1)(i\omega - p_2)\cdots(i\omega - p_n)}$$

<u>Пакет MATLAB имеет утилиты для нахождения АЧХ и ФЧХ фильтров</u>. Необходимо только указать, или коэффициенты a_i, b_i основного уравнения фильтра, или нули и полюсы z_i, p_i функции передачи, и MATLAB выполнит все громоздкие вычисления с комплексными числами.



На рисунке показана зависимость ФЧХ фильтра Чебышева первого рода 5-го порядка от частоты.

Значение параметра ε связывают обычно с уровнем пульсаций R_p (в децибелах) по следующей формуле.

$$R_p = 10\lg(1+\varepsilon^2) \ \ (\text{дБ})$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{R_p}{10}} - 1} \qquad (18)$$

Графики АЧХ и ФЧХ, приведенные на рисунках, получены при **<u>уровне пульсации</u>** R_p = 0.5 дБ.

Три основных условия синтеза фильтров.

Поставим вопрос, хорош ли фильтр Чебышева первого рода, как фильтр низких частот.

Для этого вспомним, как выглядит АЧХ идеального фильтра низких частот.

На рисунке показана АЧХ идеального фильтра нижних частот.

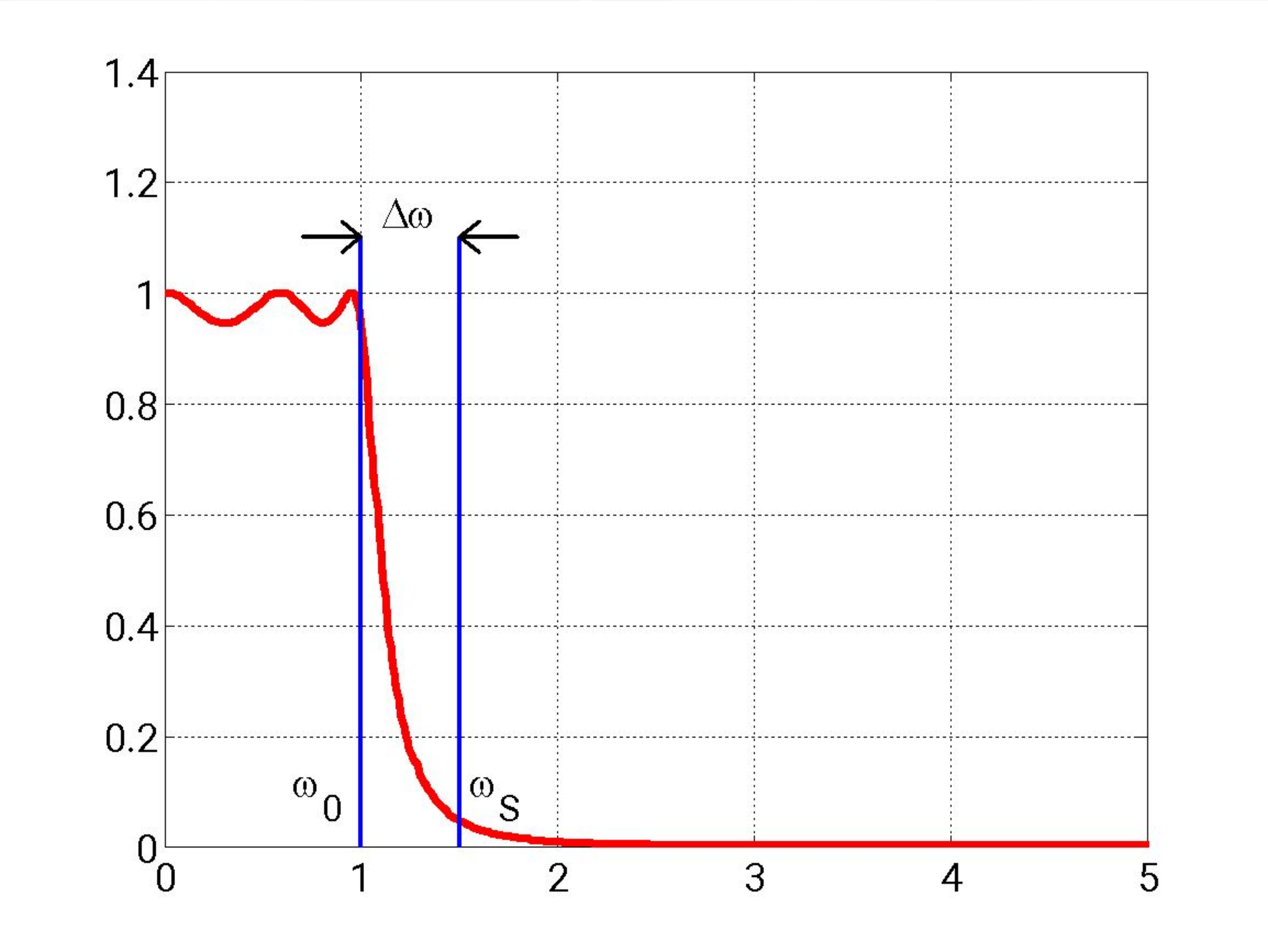

A(ω)

Сравнивая АЧХ идеального фильтра и АЧХ фильтра Чебышева, мы видим, что частотном спектре имеются три области, на которые следует обратить внимание.

1) Во-первых, **<u>это полоса пропускания</u>** $0 \leq \omega \leq \omega_0$.
У идеального фильтра в этой полосе АЧХ максимально плоская и равная единице. У фильтра Чебышева АЧХ имеет равновеликие пульсации, которые лежат в диапазоне
$1/\sqrt{1+\varepsilon^2} \leq A(\omega) \leq 1$.
Отсюда возникает задача, **<u>сделать эти пульсации как можно меньше</u>**. Другими словами хорошо бы сделать ε как можно меньшей величиной.

2) Во-вторых, **<u>это полоса задерживания</u>** $\omega > \omega_0$. У идеального фильтра в этой полосе АЧХ максимально плоская и равная нулю. У фильтра Чебышева АЧХ имеет вид похожий на АЧХ идеального фильтра только для больших частот. Поэтому полоса задерживания у фильтра Чебышева начинается не с частоты ω_0, а немного дальше с частоты $\omega_S = \omega_0 + \Delta\omega$. Для фильтра Чебышева эту частоту можно примерно положить равной $\omega_S = 1.5\omega_0$. Но и в полосе задерживания $\omega > \omega_S$ АЧХ фильтра Чебышева точно не равна нулю. Отсюда возникает задача, **<u>сделать АЧХ фильтра в полосе задерживания как можно ближе к нулю</u>** .

3) В-третьих, это **полоса перехода** от полосы пропускания к полосе задерживания. У идеального фильтра ширина этой полосы равна нулю. АЧХ идеального фильтра меняется скачком от единицы до нуля в точке ω_0. У реальных фильтров ширина переходной области **всегда отлична от нуля** и равна некоторой величине $\Delta\omega$. Так для фильтра Чебышева ширина полосы перехода примерно равна $\Delta\omega = 0.5\ \omega_0$. Отсюда возникает задача, **сделать переходную область АЧХ фильтра как можно меньше** .



На рисунке показана АЧХ фильтра Чебышева, где явно указана полоса пропускания, полоса перехода и полоса задерживания.

Таким образом, при конструировании (при синтезе) реального фильтра приходится одновременно решать три задачи.

1. В **<u>полосе пропускания</u>**, необходимо сделать АЧХ фильтра как можно **<u>ближе к единице</u>**.

$$A(\omega) \to 1, \quad 0 \le \omega < \omega_0 \qquad (19)$$

2. В **<u>полосе задерживания</u>**, необходимо сделать АЧХ фильтра как можно **<u>ближе к нулю</u>**.

$$A(\omega) \to 0, \quad \omega > \omega_S \qquad (20)$$

3. **Полосу перехода** АЧХ фильтра, необходимо сделать как можно **меньше**.

$$\Delta\omega \to 0 \qquad (21)$$

Как правило, три условия (19), (20), (21) **противоречат друг другу**. Улучшение АЧХ фильтра в одной части спектра приводит к ухудшению АЧХ фильтра в другой части спектра. Поэтому проблема нахождения реального фильтра с оптимальной АЧХ (а также и ФЧХ) остается актуальной и сегодня.

Теперь посмотрим, чем хорош фильтр Чебышева первого рода.

<u>**Фильтр Чебышева**</u> первого рода *n*-го порядка является <u>**оптимальным фильтром**</u>, среди фильтров, <u>**содержащих только полюсы**</u>, и не имеющих нулей.

Свойство оптимальности фильтра Чебышева первого рода порядка *n* заключается в том, что не существует другой фильтр *n* -го порядка, содержащего только полюсы, который имел бы такие же или лучшие характеристики и в полосе пропускания, и в полосе задерживания.

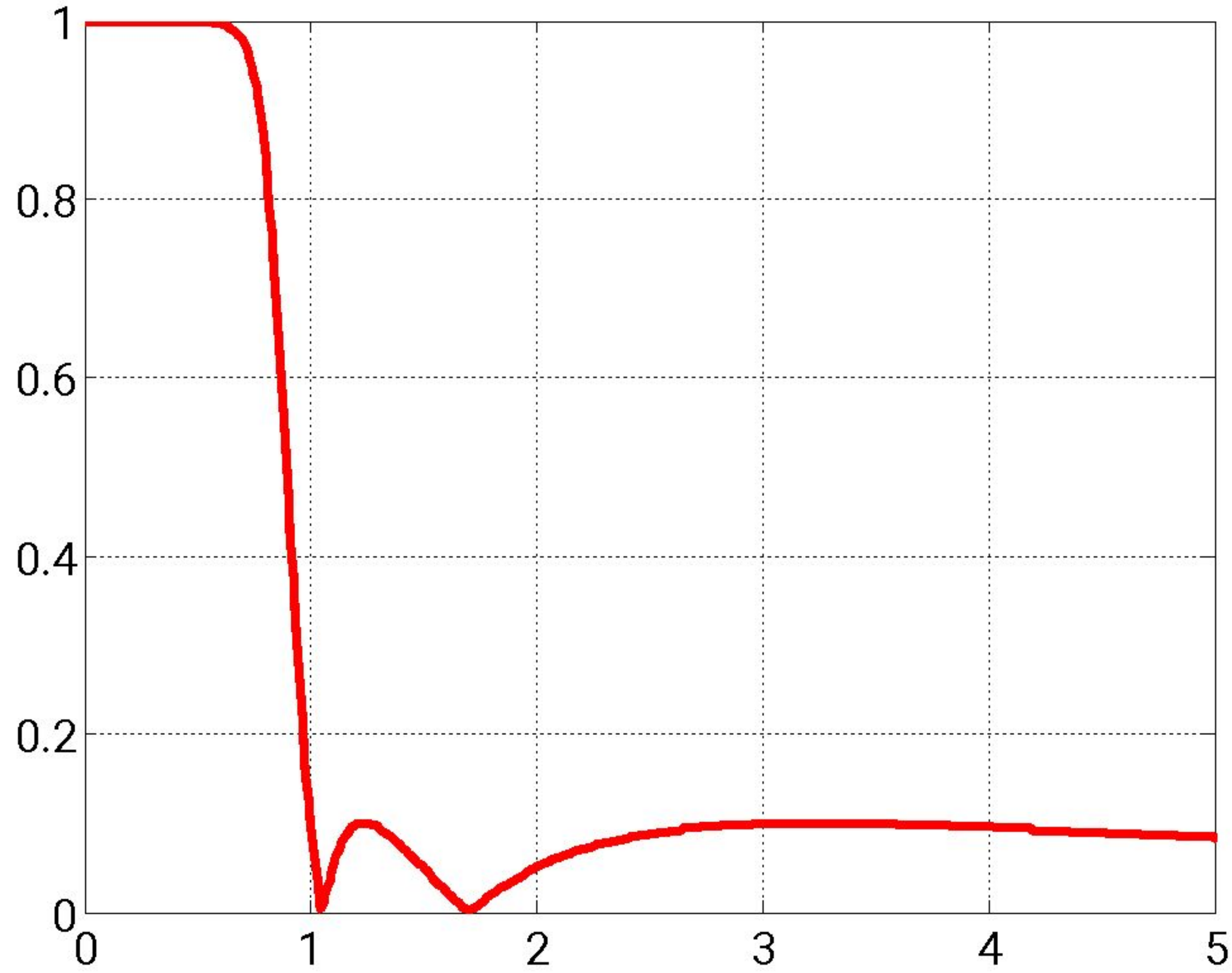
Другими словами, если какой-либо фильтр *n* -го порядка, содержащий только полюсы, имеет в полосе пропускания <u>**лучшие характеристики**</u> по сравнению с фильтром Чебышева первого рода порядка *n* , то в полосе задержки характеристики этого фильтра наверняка <u>**будут хуже**</u>, чем у фильтра Чебышева.

Фильтр Чебышева второго рода

Фильтр Чебышева второго рода обеспечивает монотонное изменение АЧХ в полосе пропускания и равновеликие пульсации в полосе задерживания. Иногда фильтр Чебышева второго рода называют обратным к фильтру Чебышева первого рода.

Это свойство фильтра Чебышева второго рода демонстрируется на рисунке.

На рисунке показано поведение АЧХ фильтра Чебышева второго рода 5-го порядка. Для простоты частота среза взята раной единице $\omega_0 = 1$.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5

Передаточная функция фильтра Чебышева второго рода имеет и нули и полюсы. Она связана с передаточной функцией фильтра Чебышева первого рода следующим образом.

$$H_2(s) = 1 - H_1\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (22)$$

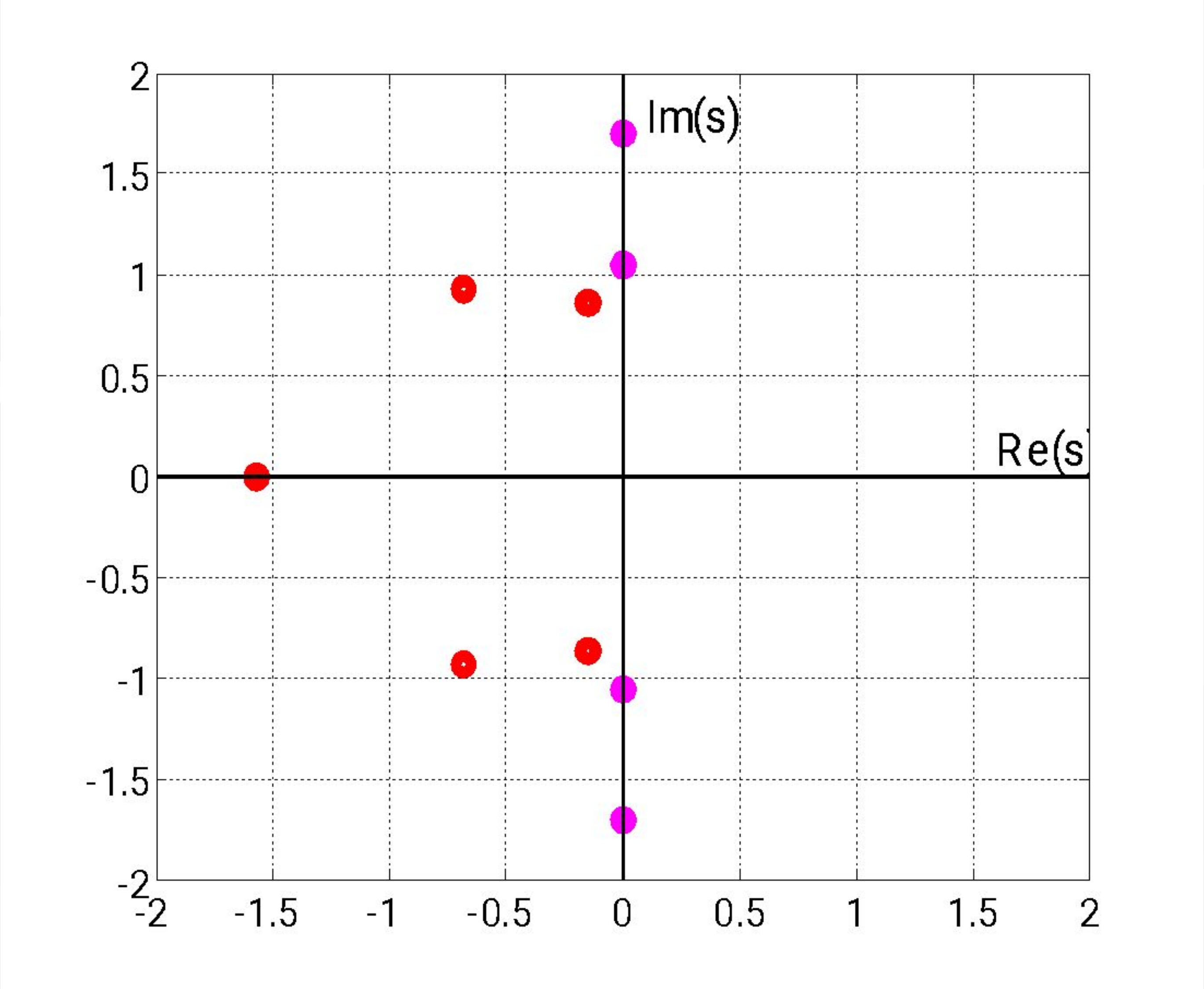
Здесь $H_1(s)$ и $H_2(s)$ - передаточные функции фильтров Чебышева первого и второго рода соответственно.

Полюсы передаточной функции фильтра Чебышева второго рода p_{2i} и полюсы передаточной функции фильтра Чебышева первого рода p_{1i} связаны простым соотношением:

$$p_{2i} = \frac{1}{p_{1i}} \qquad (23)$$

Другими словами полюсы этих фильтров Чебышева являются обратными друг другу. По этой причине фильтр Чебышева второго рода называют еще **инверсным фильтром** Чебышева (inverse Chebyshev filter).

На рисунке показаны полюсы и нули фильтра Чебышева второго рода 5 – го порядка в комплексной *s* - плоскости.



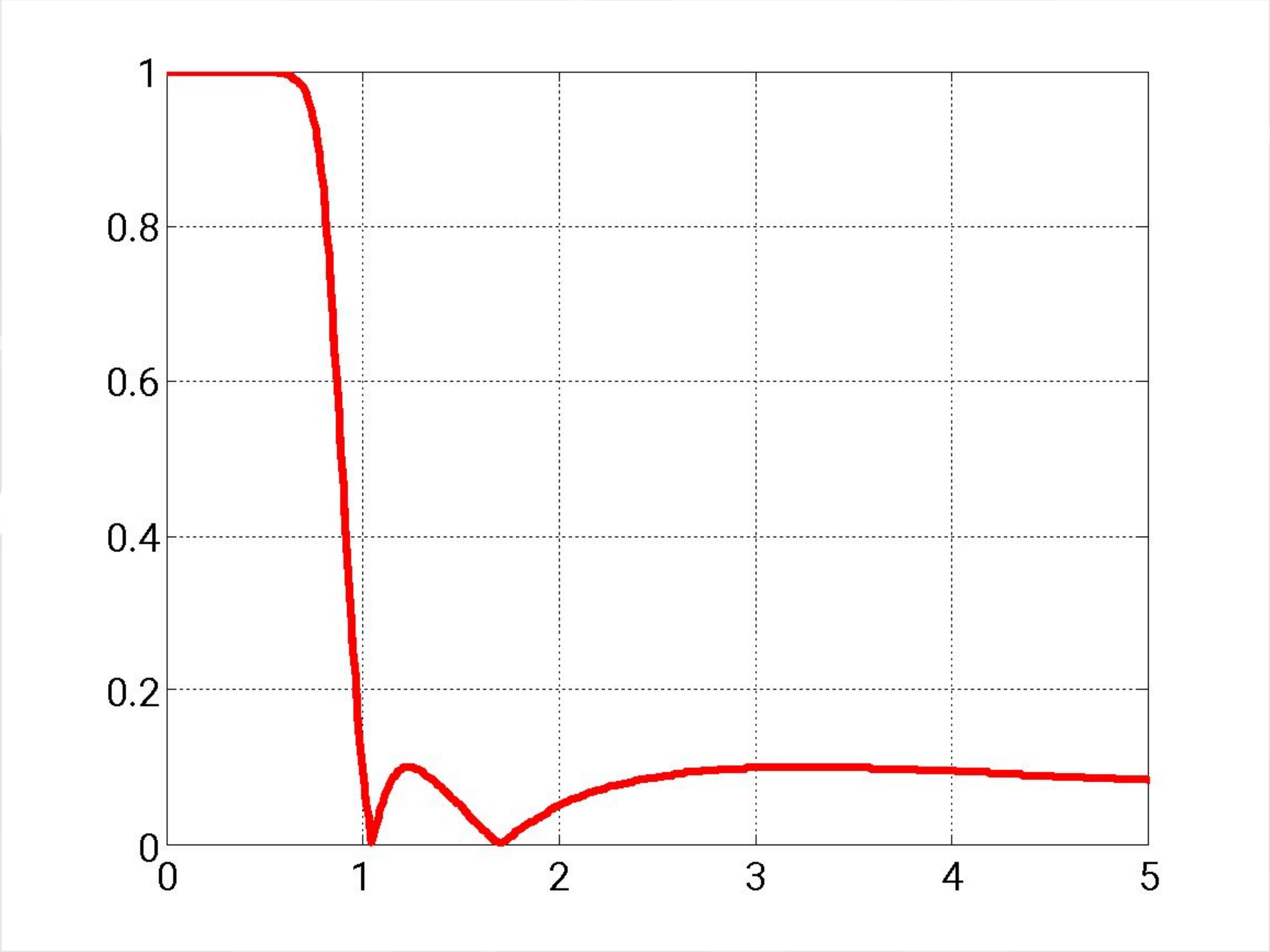
Здесь полюсы показаны красными точками, а нули фиолетовыми точкам. Отметим, что все нули являются мнимыми числами и расположены на мнимой оси.

АЧХ фильтра Чебышева второго рода выражается простой аналитической формулой.

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{T_n^2\left(\omega_0 / \omega\right)}}} \qquad (24)$$

Здесь ε - параметр, определяющий величину пульсаций АЧХ в полосе задерживания.

На приведенном выше рисунке была показана АЧХ, рассчитанная по формуле (24).



Как видно их рисунка АЧХ фильтра Чебышева второго рода ведет себя следующим образом – в полосе пропускания она монотонно затухает, а в полосе задерживания колеблется между нулем и значением $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$.

$$0 \le A(\omega) \le 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}, \quad if \quad \omega \ge \omega_0 \qquad (25)$$

Значение параметра ε связывают обычно с уровнем пульсаций R_s в полосе задерживания (в децибелах) по следующей формуле.

$$R_S = 10\lg(1+\varepsilon^2) \ \ (\text{дБ})$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{R_S}{10}} - 1} \qquad (26)$$

В данном примере уровень пульсации в полосе задерживания был выбран в 20 дБ.

$$R_S = 20 \text{ дБ}$$

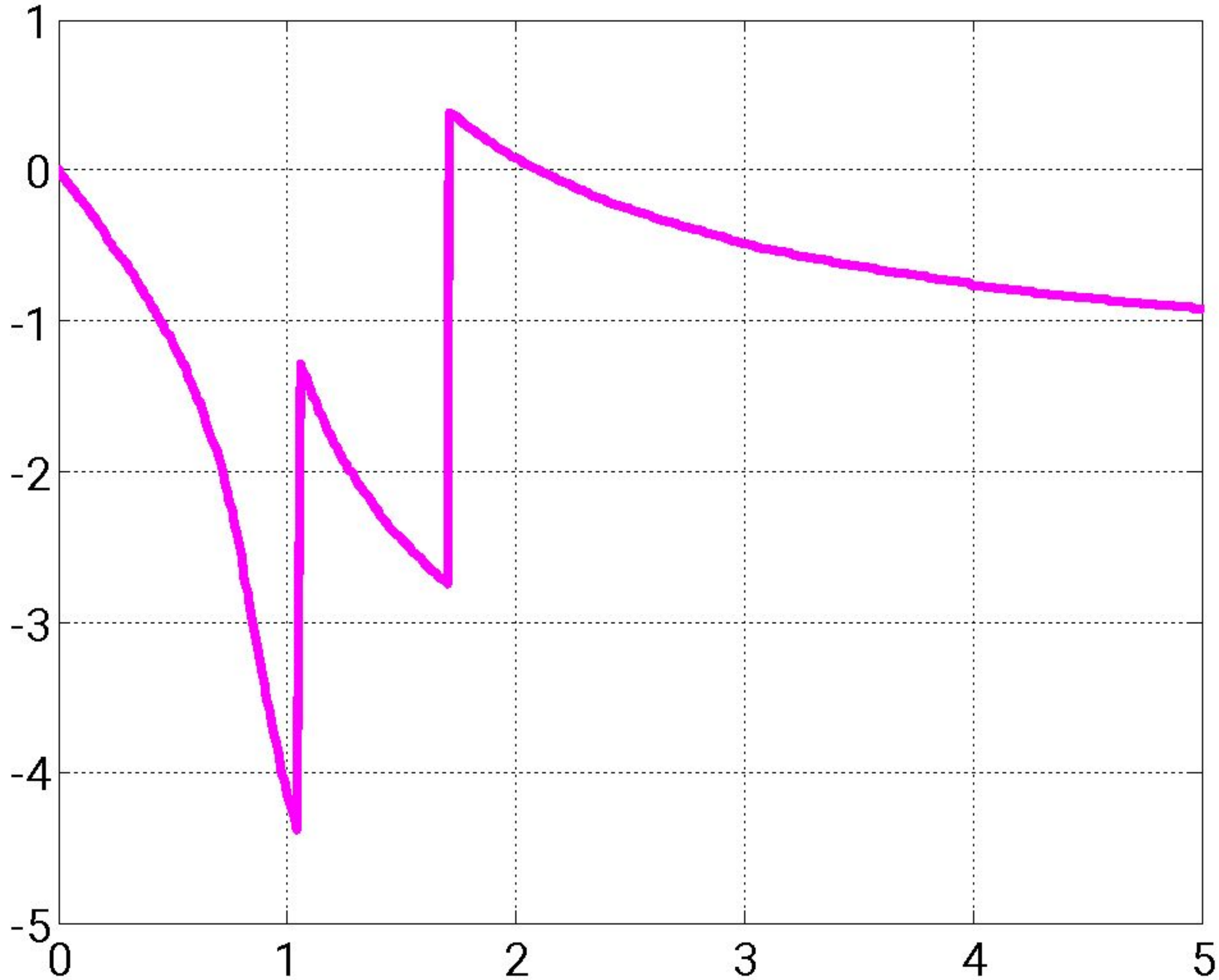
Это значит, что самое большое значение АЧХ в полосе задерживания равнялось 0.1

$$1/\sqrt{1+\varepsilon^2} = 0.1$$

Это и видно на рисунке.

Используя пакет MATLAB, приведем ФЧХ фильтра Чебышева второго рода.

На рисунке показана ФЧХ фильтра Чебышева второго рода 5-го порядка при уровне пульсации в полосе задерживания в 20 дБ.


1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
1
2
3
4
5