Лекция 2

Спектральное представление сигналов

Кроме **временного представления** сигналов, где сигнал это функция времени $s(t)$, при анализе и обработке сигналов, используется также **частотное представление** сигнала в виде функции частоты $S(\omega)$.

Функции $s(t)$ и $S(\omega)$ связаны друг с другом **преобразованием Фурье** (Fourier transform).

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} d\,t,$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\,\omega$$

Здесь первое выражение называется **прямое преобразование Фурье** (direct Fourier transform), а второе выражение называется **обратное преобразование Фурье** (inverse Fourier transform).

Функция $S(\omega)$ называется **<u>спектром сигнала</u>** $s(t)$, (signal spectrum). Имеются также другие названия этой функции – **<u>спектральная плотность</u>**, **<u>спектральная характеристика</u>** сигнала.

Функция $S(\omega)$ является комплексной функцией, и может быть представлена в алгебраической и показательной форме. Для простоты записи частоту ω не указываем

$$S = a + i\,b = \left| S \right| e^{i\theta}$$

Из теории комплексных чисел известно, что a и b действительные и мнимые части комплексного числа S, и обозначаются

$$a = \mathrm{Re}(S), \qquad b = \mathrm{Im}(S)$$

Величина $|S|$ называется модулем, а $\theta = \arg(S)$ аргументом комплексного числа S. Действительная и мнимая части комплексного числа могут быть выражены через модуль и аргумент комплексного числа следующими соотношениями

$$a = |S|\cos(\theta), \qquad b = |S|\sin(\theta)$$

Соответственно, модуль и аргумент комплексного числа выражаются через действительную и мнимую части комплексного числа. Эти выражения имеют вид:

$$|S| = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

$$\theta = \arg\tan\left(\frac{a}{b}\right), \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

Из спектра $S(\omega)$ можно получить **амплитудно-частотную характеристику** (АЧХ) $A(\omega)$ и **фазово-частотную характеристику** (ФЧХ) $\varphi(\omega)$ сигнала (amplitude-frequency, phase-frequency characteristic), с помощью соотношений.

$$A(\omega) = \left|S(\omega)\right|,$$

$$\varphi(\omega) = \arg(S(\omega))$$

Если использовать не круговую частоту ω, а обычную f, то формулы прямого и обратного преобразования Фурье становятся более симметричными.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i 2\pi f t} d t,$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{i 2\pi f t} d f$$

Обратим внимание на обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, e^{i\omega t} d\,\omega$$

Смысл этого выражение состоит в следующем. **Любой сложный** сигнал $s(t)$ можно представить в виде **суммы** (или интеграла) **более простых** (базисных) сигналов

$$s_\omega(t) = e^{i\omega t}$$

с весовыми множителями:

$$\frac{1}{2\pi} S(\omega)\, d\,\omega$$

Формула Эйлера связывает эти простые сигналы с гармоническими колебаниями.

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

Поэтому преобразование Фурье – это **разложение сигнала** по **гармоническим колебаниям**.

Кроме разложения по гармоническим функциям применяются и **другие типы разложения**: по функциям Уолша, Бесселя, Хаара, полиномам Чебышева, Ляггера, Лежандра и др.

В радиотехнике в качестве базисных функций разложения Фурье используют преимущественно **гармонические функции**. Это объясняется следующими причинами.

1) Гармоническое колебание **сохраняют свою форму** при прохождении через линейный преобразователь. Изменяться лишь амплитуда и фаза.

2) Для гармонических функций имеется **мощный математический аппарат**.

3) Гармоническое колебание **легко осуществить на практике.**

Свойства преобразования Фурье будут рассмотрены в отдельной лекции. Сейчас же мы отметим только некоторые из этих свойств.

Первое, если сигнал $s(t)$ вещественная функция, то для спектра $S(\omega)$ выполняются следующие соотношения четности

$$S^*(\omega) = S(-\omega),$$

$$a(-\omega) = a(\omega), \quad b(-\omega) = -b(\omega),$$

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

Здесь звездочка означает комплексное сопряжение. Из этих соотношений видно, что для вещественного сигнала, АЧХ - четная функция, а ФЧХ – нечетная функция.

! Доказать приведенные соотношения

Второе, если сигнал вещественная четная функция времени

$$s(-t) = s(t)$$

то для спектра выполняются следующие соотношения

$$S^*(\omega) = S(\omega),$$

$$a(-\omega) = a(\omega), \quad b(\omega) = 0,$$

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad \varphi(\omega) = 0, \pm\pi$$

Третье, если сигнал вещественная нечетная функция времени

$$s(-t) = -s(t)$$

то для спектра выполняются следующие соотношения

$$S^*(\omega) = -S(-\omega),$$

$$a(\omega) = 0, \quad b(-\omega) = -b(\omega),$$

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad \varphi(\omega) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Примеры спектров некоторых сигналов

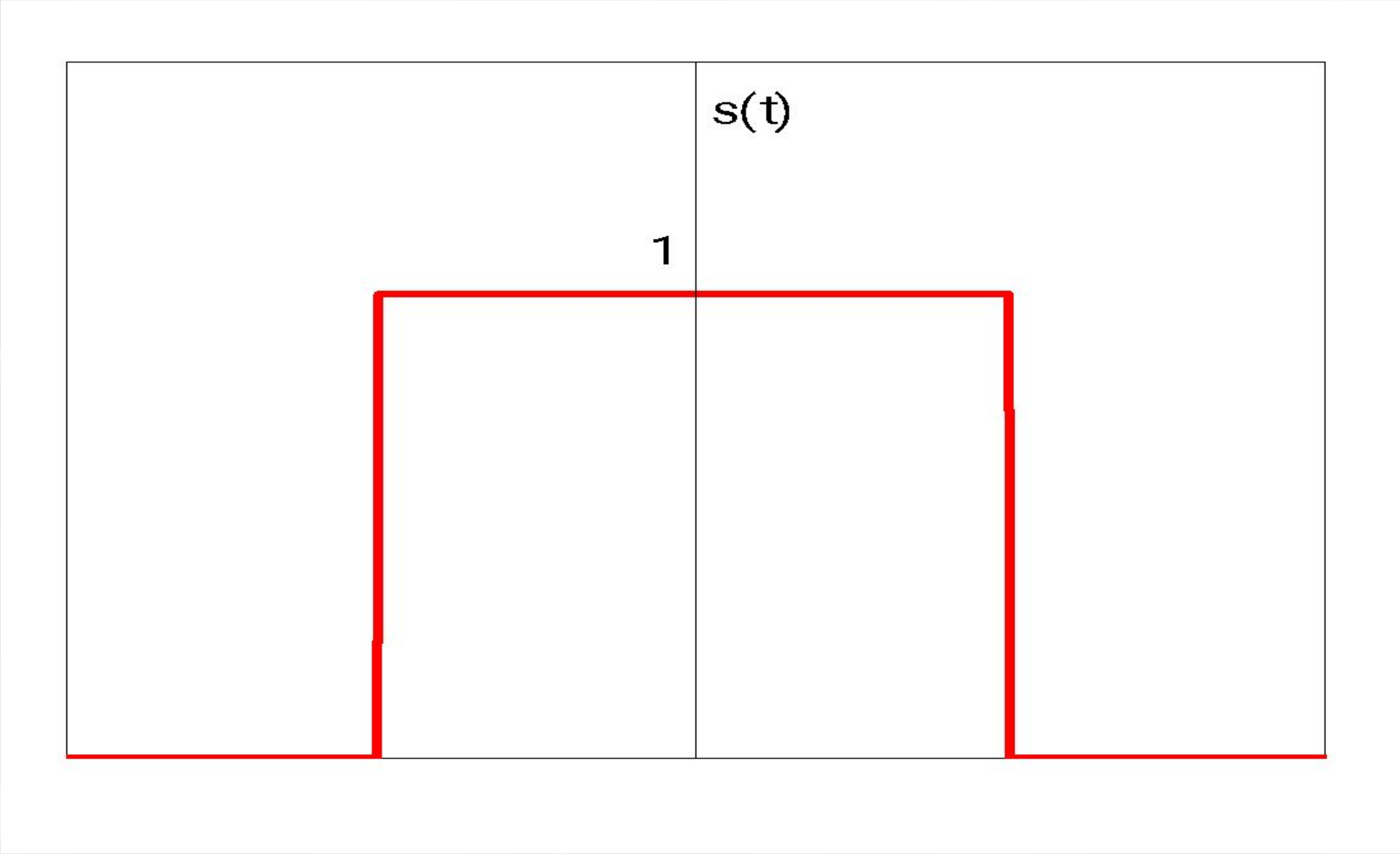
Прямоугольный импульс

Рассмотрим прямоугольный импульс, центрированный относительно начала отсчета времени и имеющий длительность τ.

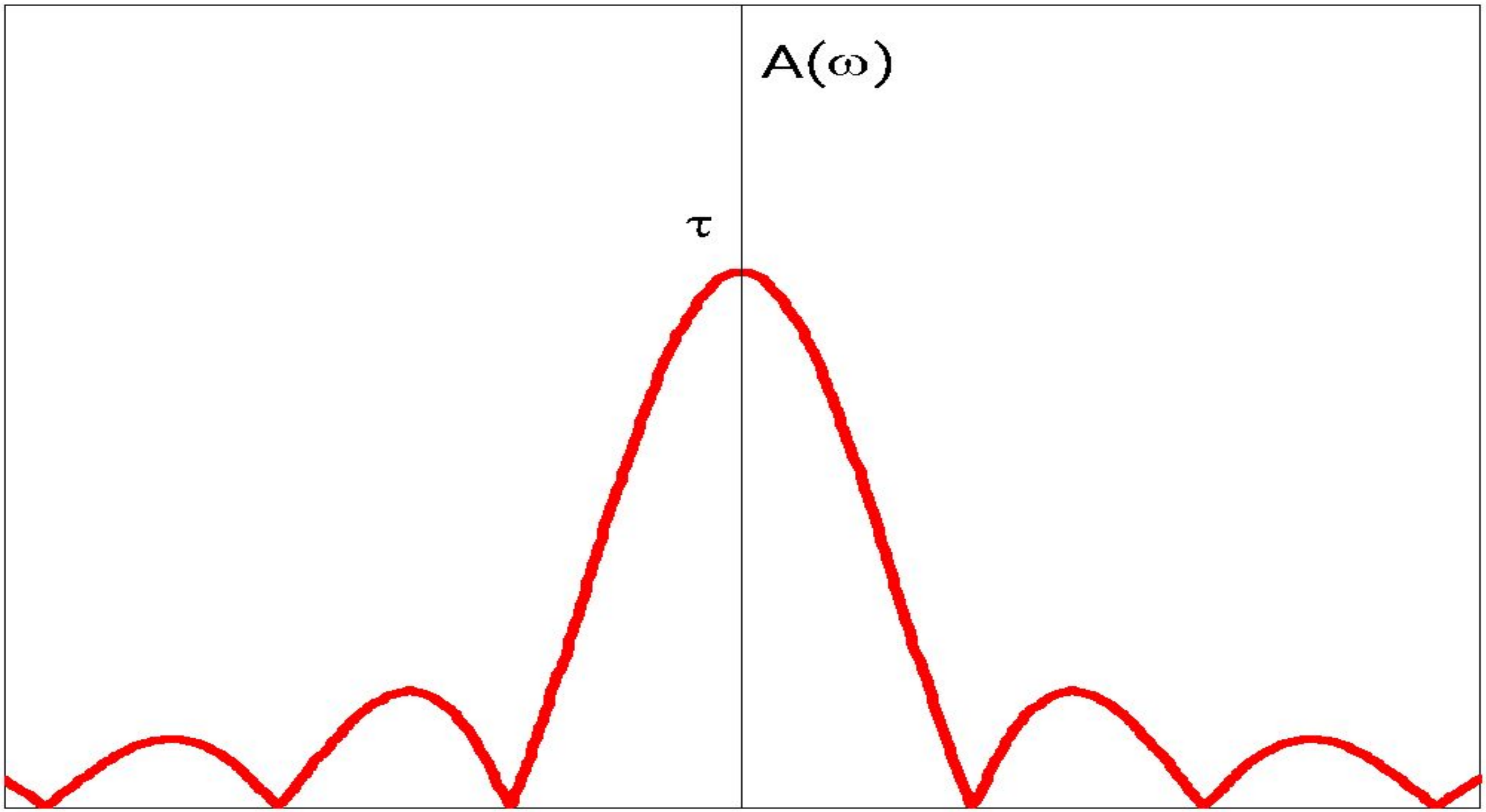
$$s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

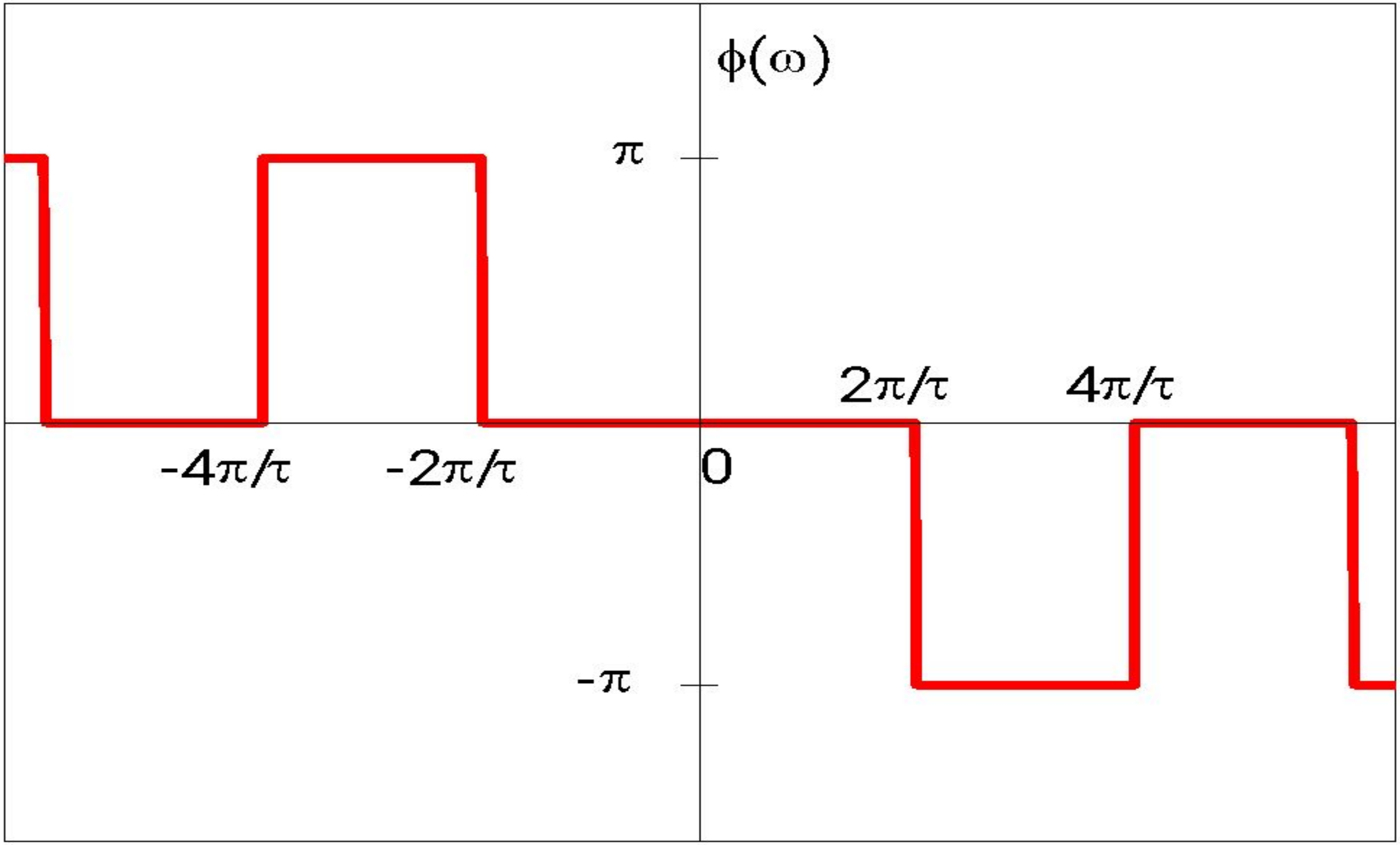
Вычисляем спектр $S(\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-i\omega t}\, dt = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$$



При нахождении АЧХ и ФЧХ надо учесть, что рассматриваемый прямоугольный импульс является действительной четной функцией времени.


A(ω)
τ



! Объяснить форму графика ФЧХ прямоугольного импульса

Спектр данного сигнала (АЧХ) простирается до бесконечности, постепенно затухая. Поэтому вводят понятие **эффективной ширины спектра**.

Как видно из графиков, спектр имеет лепестковый характер и ширина главного лепестка равна

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

При лепестковом характере спектра за эффективную ширину спектра принимают ширину главного лепестка. Длительность прямоугольного импульса равна

$$\Delta t = \tau$$

Произведение ширины спектра сигнала на длительность сигнала равна некоторому числу (это произведение называется **базой сигнала**).

В случае прямоугольного импульса это есть:

$$\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi, \qquad \Delta f\,\Delta t = 1$$

Это означает, что чем **короче сигнал**, тем **шире его спектр** и наоборот. Например

$$\Delta t = 1\,мкс = 10^{-6}\,c \quad \rightarrow \quad \Delta f = 1\,МГц = 10^{6}\,Гц$$

$$\Delta t = 1\,нс = 10^{-9}\,c \quad \rightarrow \quad \Delta f = 1\,ГГц = 10^{9}\,Гц$$

Длительность сигнала и ширина его спектра подчиняются **соотношению неопределенности**, гласящему, что произведение этих параметров не может быть меньше единицы.

$$\Delta f \, \Delta t \geq 1$$

Отсюда следует:

1) Можно сформировать сигнал большой длительности, одновременно имеющий широкий спектр. Такие сигналы называют **широкополосными**, или **сложными**, или **сигналами с большой базой**.

2) Короткий сигнал с узким спектром существовать не может.

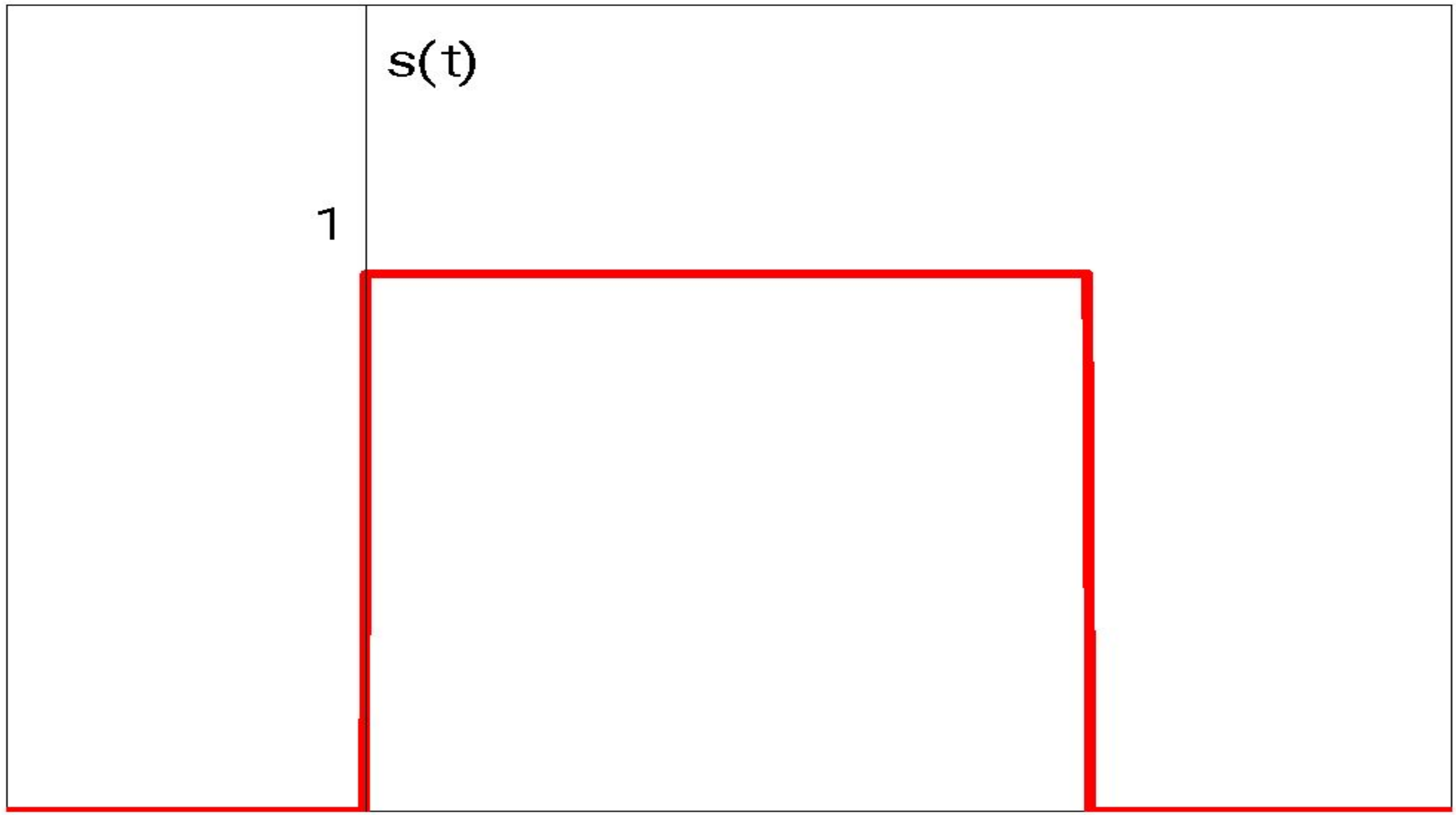
Прямоугольный импульс, задержанный во времени

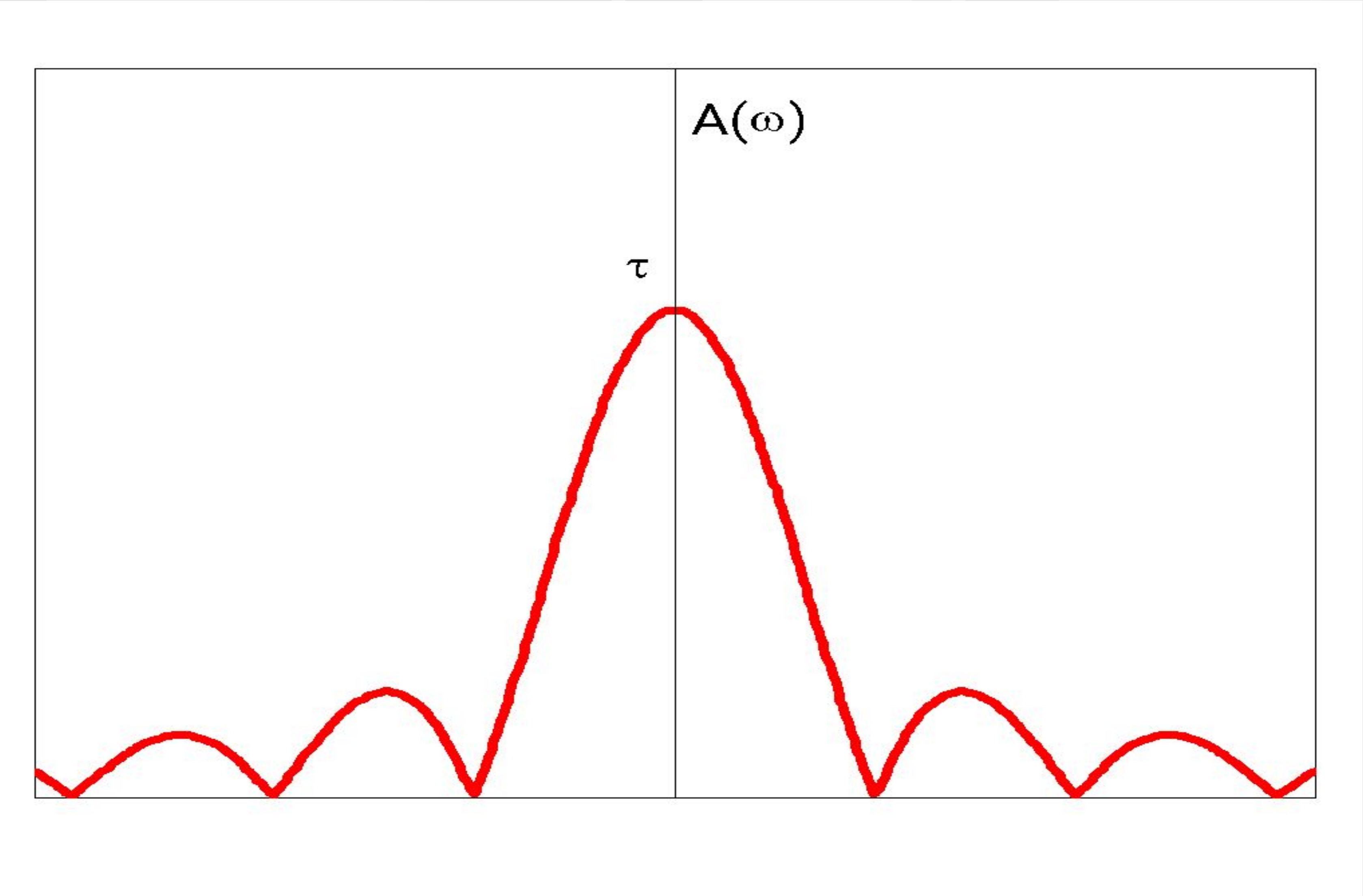
Теперь посмотрим, что измениться после сдвига прямоугольного импульса во времени. Пусть импульс начинается в нулевой момент времени.

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau], \\ 0, & t \notin [0, \tau] \end{cases}$$

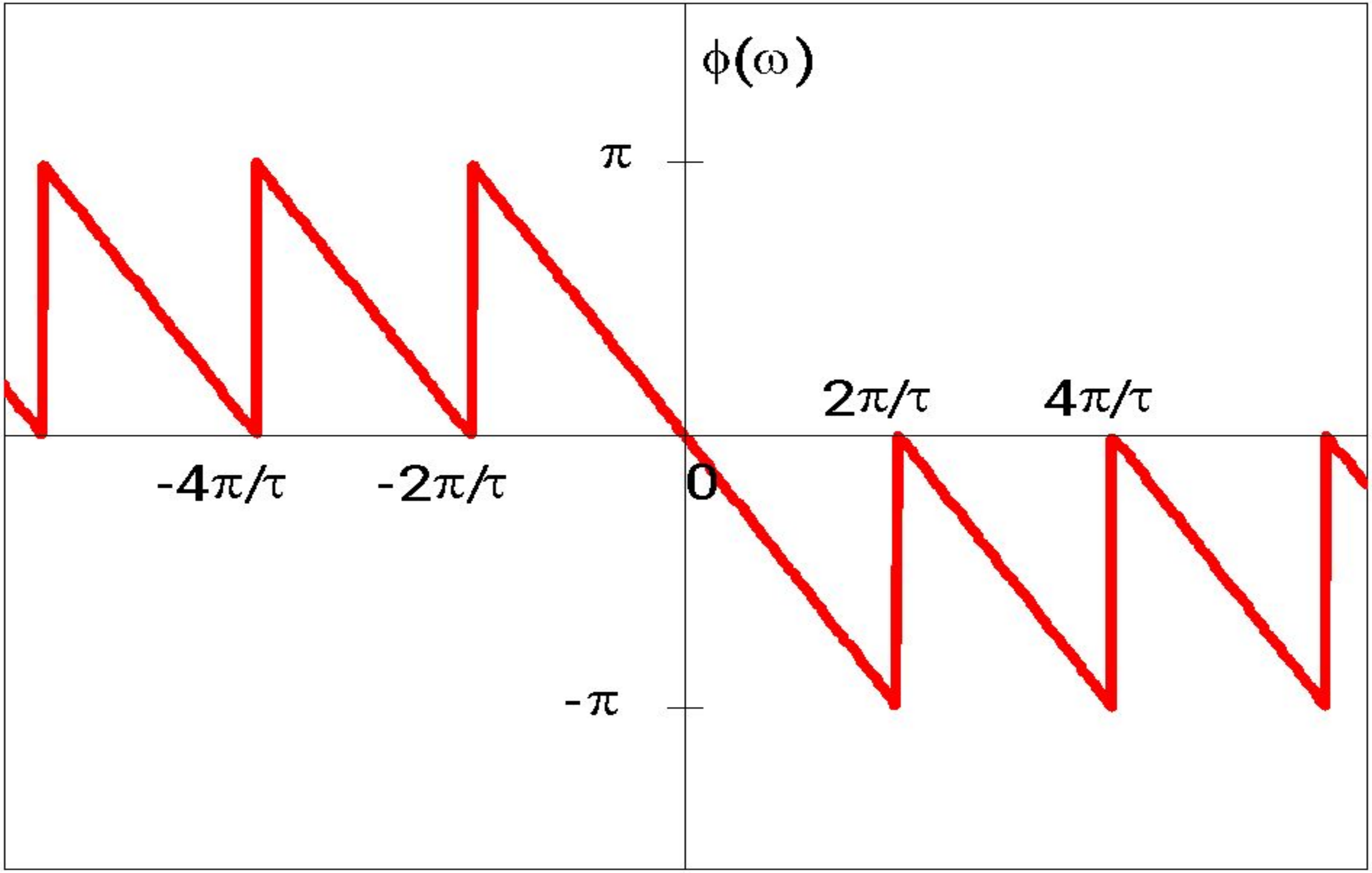
Вычисляем спектр $S(\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\omega t} d\,t = \int_{0}^{\tau} e^{-i\omega t} d\,t = \tau\, \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)} \exp\left(-i\,\frac{\omega\tau}{2}\right)$$


s(t)
1



Сравнение спектров двух импульсов **сдвинутых во времени** относительно друг друга иллюстрирует общее свойство – АЧХ **не меняется**, меняется только ФЧХ.



! Получить ФЧХ прямоугольного импульса сдвинутого во времени

Дуальность преобразования Фурье

Следующий пример демонстрирует **дуальность** преобразования Фурье. Если сравнить формулы прямого и обратного преобразования Фурье, можно заметить, что они отличаются друг от друга лишь знаком в показателе комплексной экспоненты и множителем перед интегралом.

Отсюда следует, что если функции времени $f(t)$ соответствует спектральная функция $g(\omega)$, то функции времени $g^*(t)$ будет соответствовать спектральная функция

$$\cdot 2\pi f^*(\omega)$$

Другими словами формы сигнала и его спектра поменяются местами.

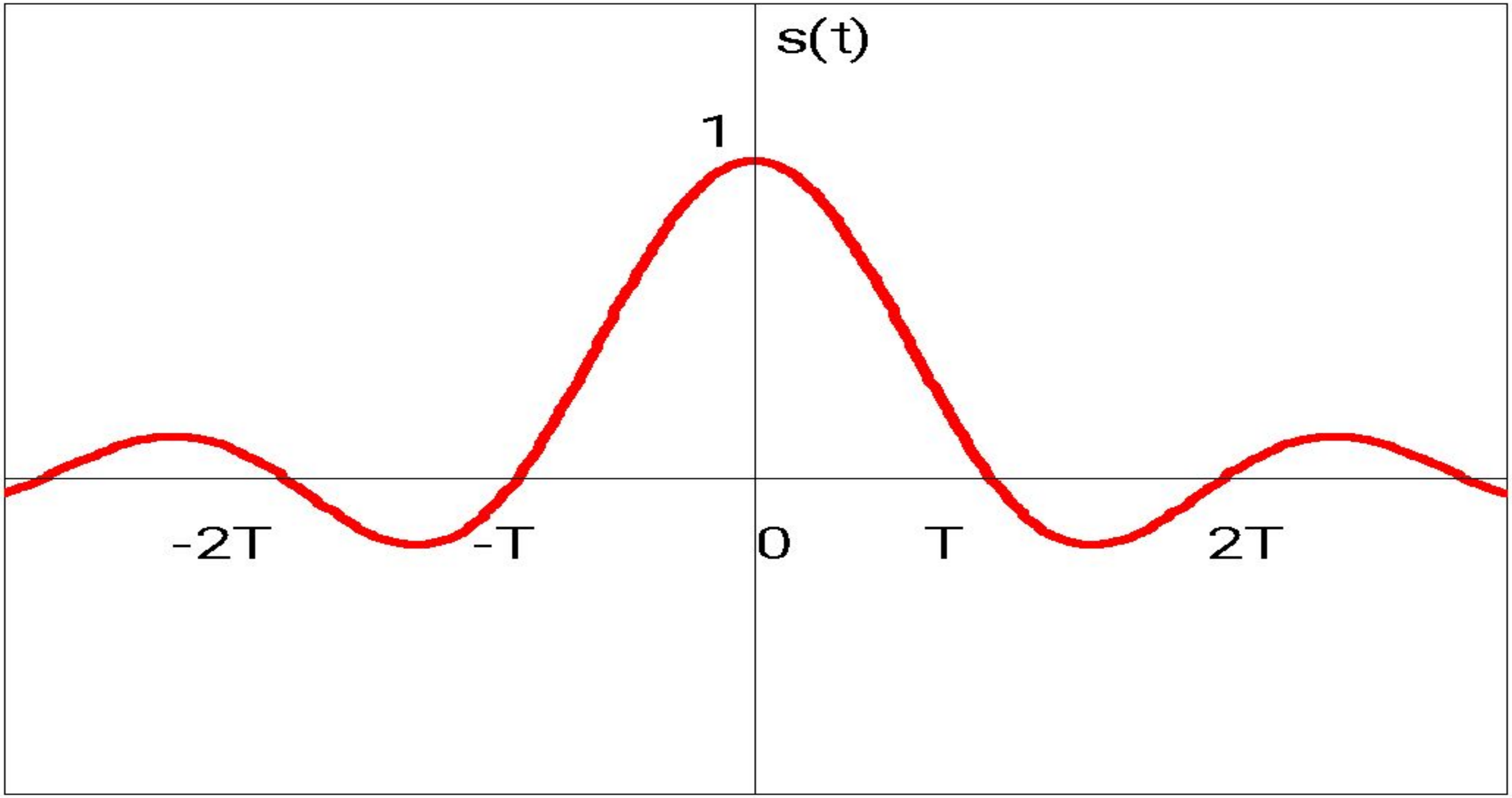
Продемонстрируем это на примере прямоугольного импульса. Рассмотрим сигнал следующего вида

$$s(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)}$$

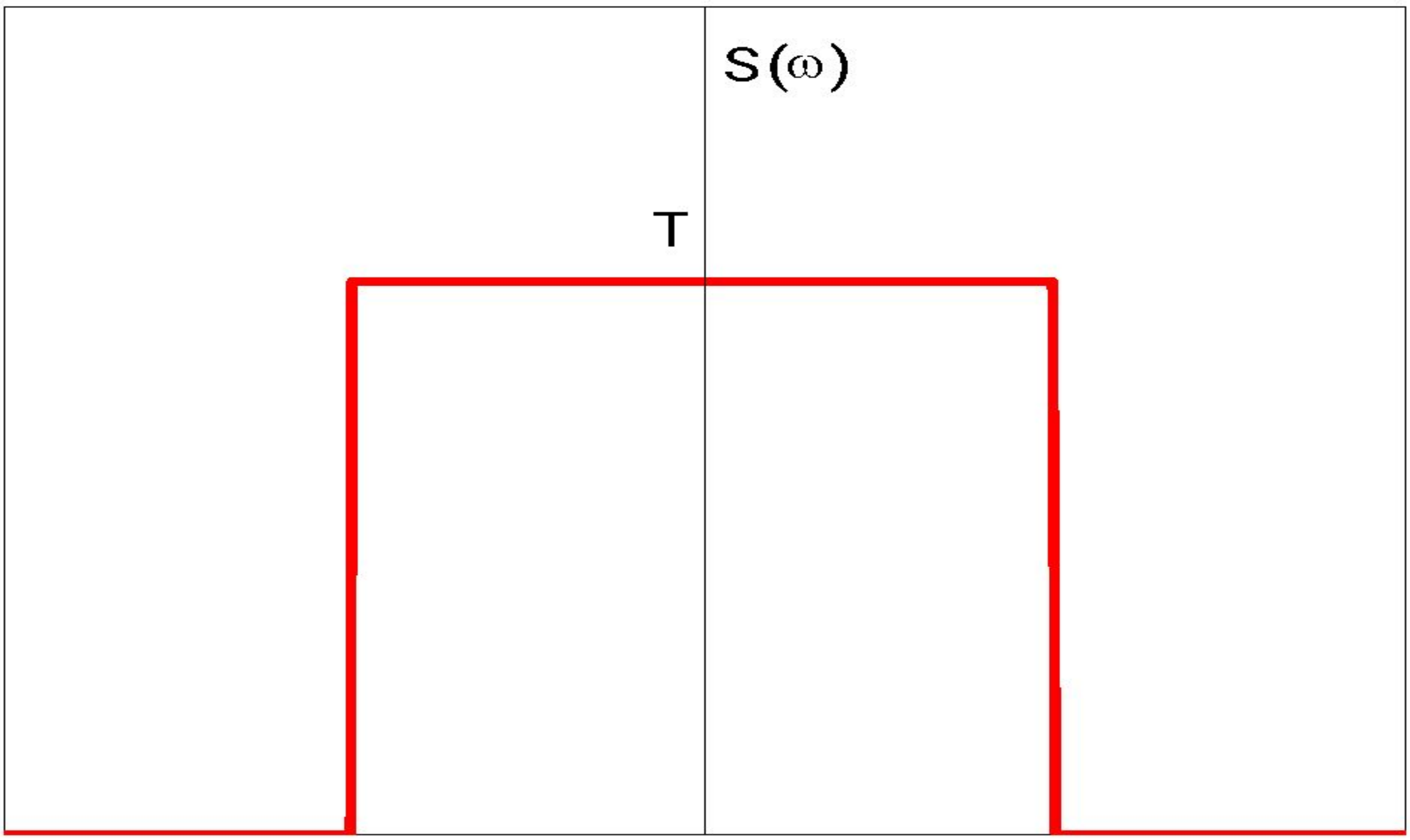
Вычисляем спектр $S(\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\omega t} d\,t = \begin{cases} T, & |\omega| \le \pi / T, \\ 0, & |\omega| > \pi / T \end{cases}$$

Следующие рисунки показывают импульс и его спектр.



! Построить АЧХ и ФЧХ данного сигнала


S(ω)
T

Несимметричный треугольный импульс

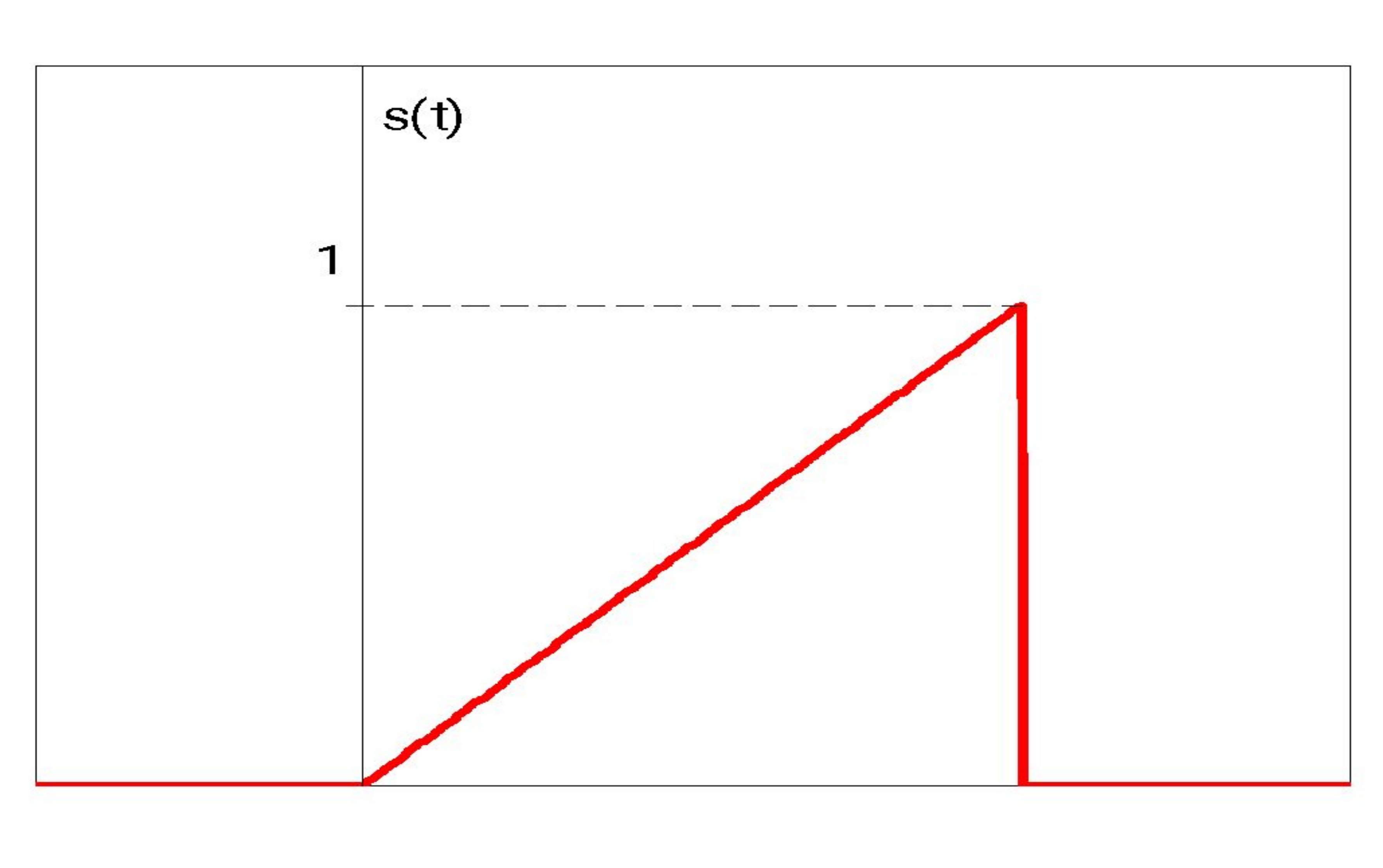
Рассмотрим несимметричный треугольный импульс.

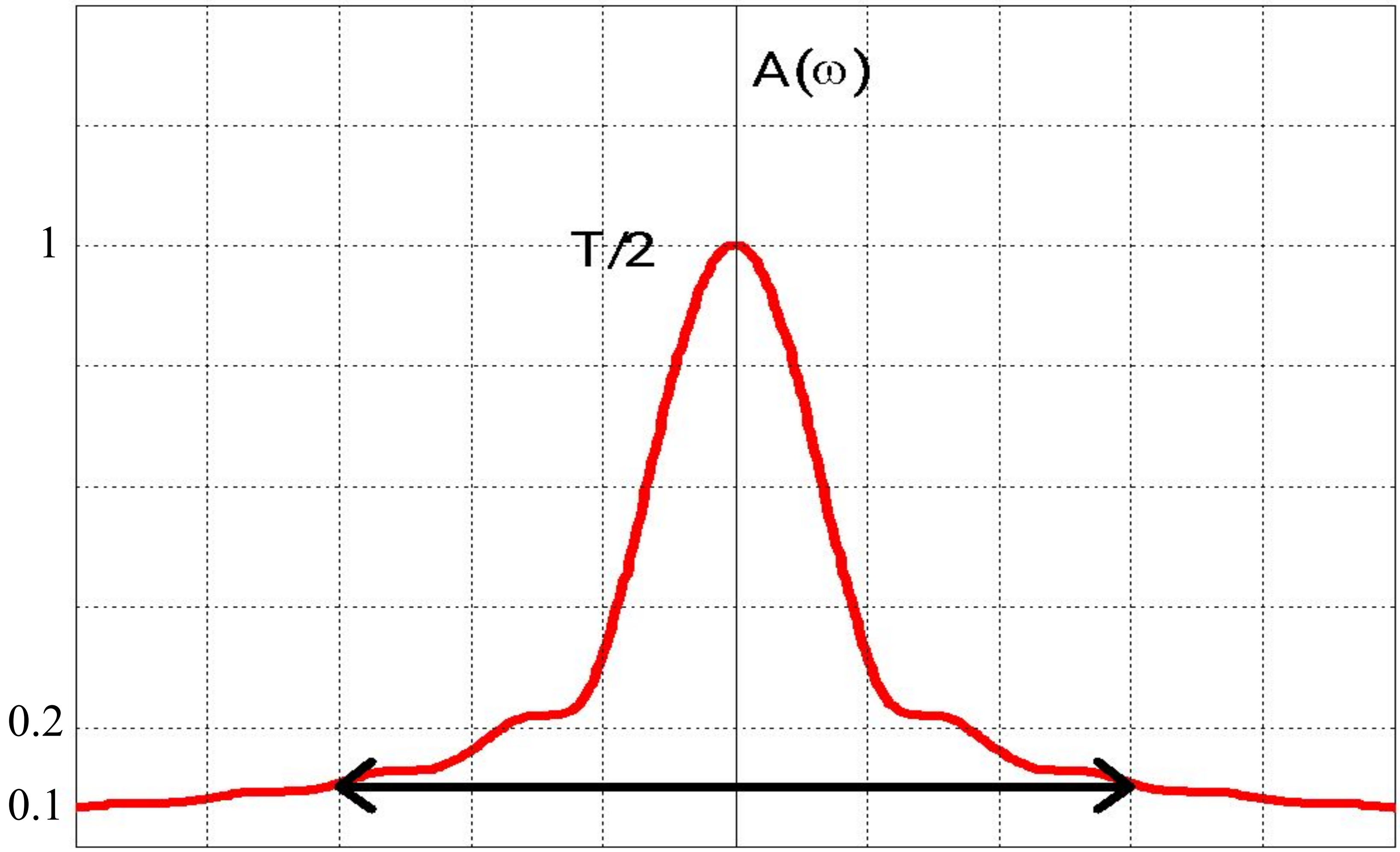
$$s(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{T}, & 0\le t\le T,\\ 0, & t<0,\ \ t>T\end{cases}$$

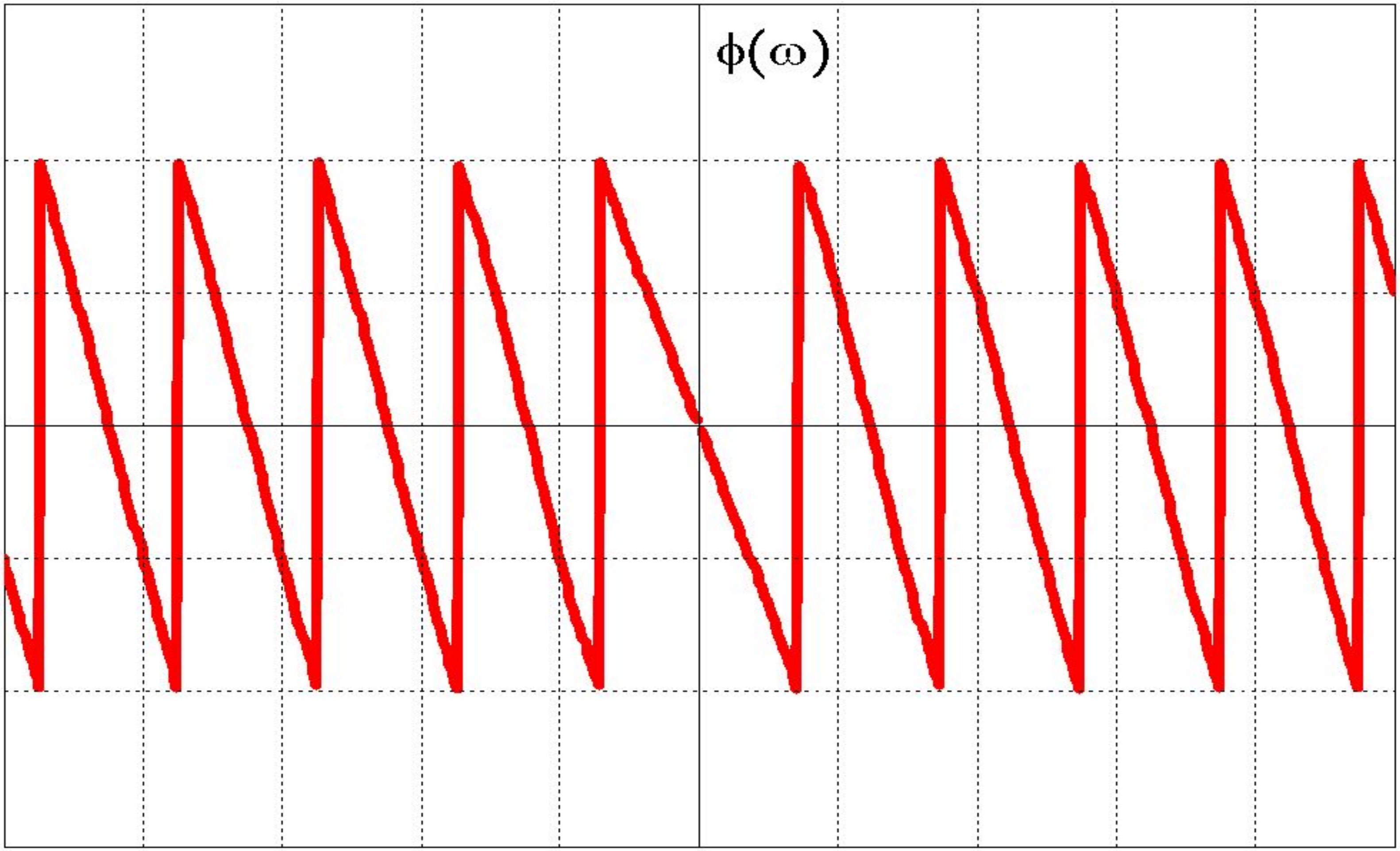
Вычисляем спектр $S(\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье

$$S(\omega)=\int_0^T \frac{t}{T}e^{-i\omega t}d\,t=\frac{1}{(i\omega)^2T}\left(1-e^{-i\omega T}\right)-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega T}$$

Следующие рисунки показывают несимметричный треугольный импульс и его АЧХ и ФЧХ


s(t)
1


A(ω)
T/2
1
0.2
0.1


φ(ω)

Этот амплитудный спектр (АЧХ) не содержит ярко выраженных лепестков, поэтому для определения эффективной ширины спектра необходим иной критерий. Будем определять эффективную ширину спектра по уровню 0.1 от максимума. Из графика видно, что эта ширина (она показана стрелкой) составляет примерно

$$\Delta\omega = 6\pi / T$$

Так как длительность треугольного сигнала равна

$$\Delta t = T \qquad ,$$

то база треугольного сигнала равна

$$\Delta\omega\,\Delta t = 6\pi$$

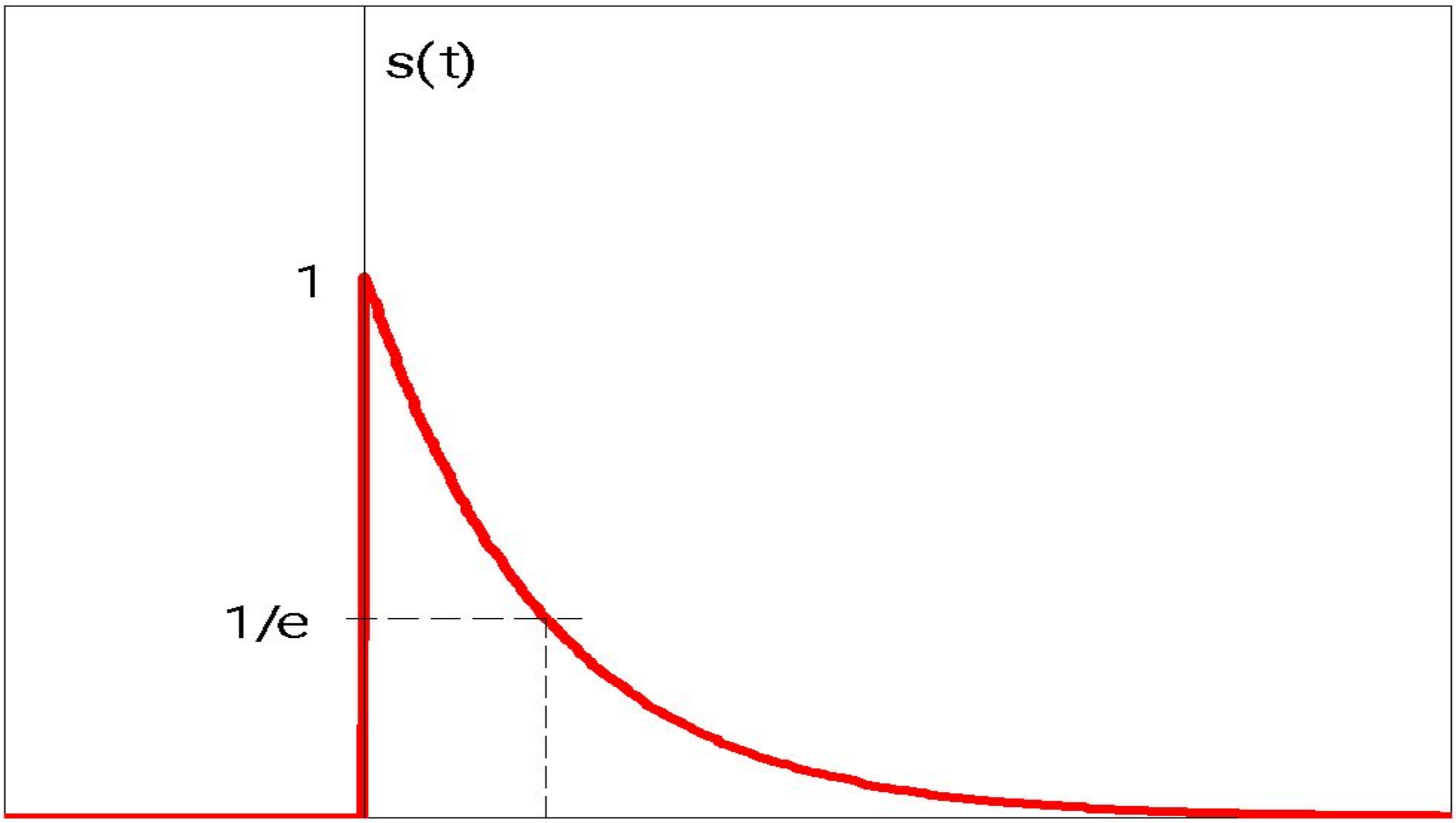
Односторонний экспоненциальный импульс

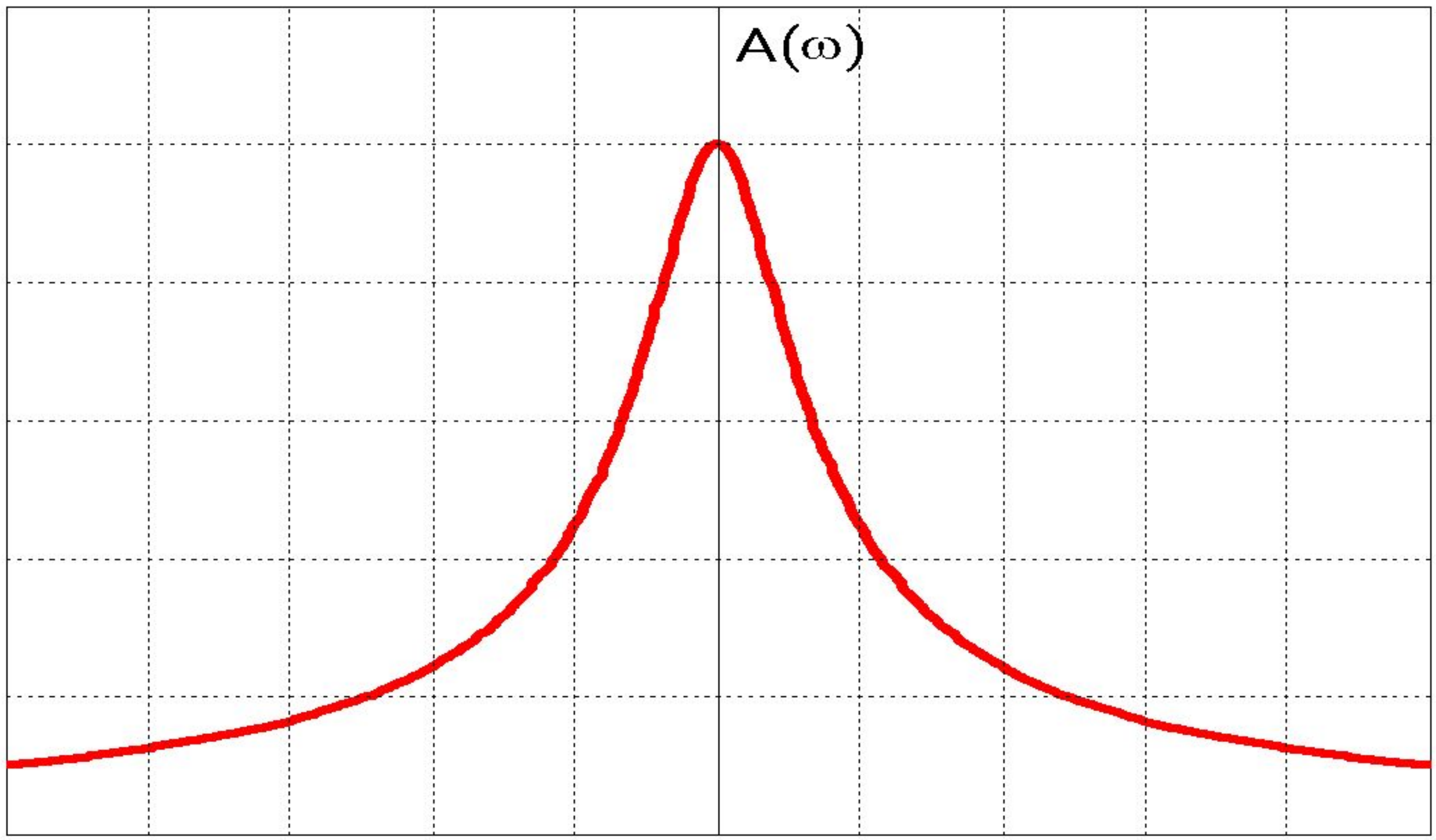
У рассмотренных импульсов ФЧХ имела резкий пилообразный характер. Мы рассмотрим сейчас импульс, у которого ФЧХ имеет гладкую зависимость. Рассмотрим односторонний экспоненциальный импульс

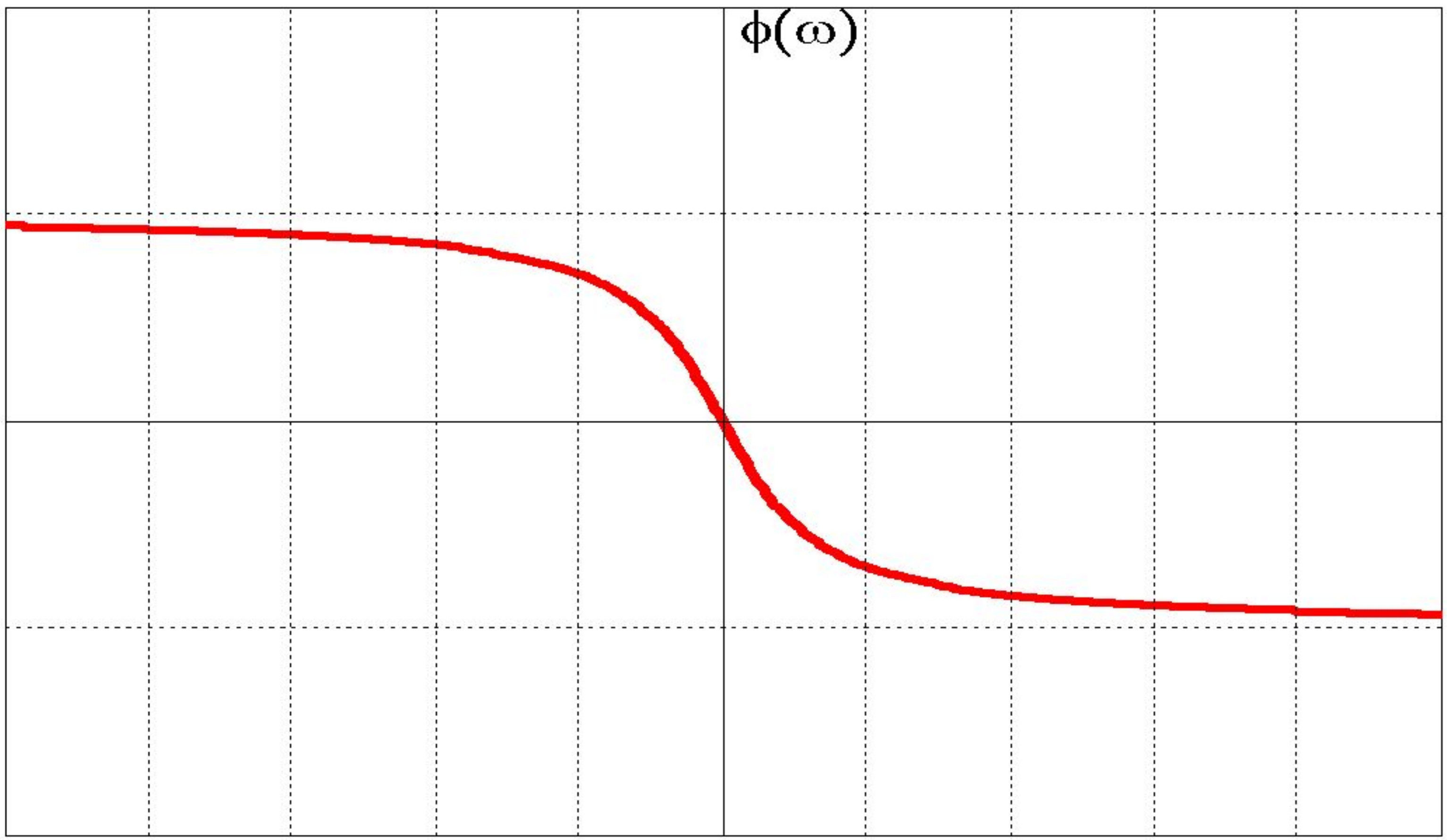
$$s(t) = \begin{cases} e^{-a\,t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

где $a > 0$ произвольное положительное число.
Вычисляем спектр $S(\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье

$$S(\omega) = \int_0^\infty e^{-a\,t}\, e^{-i\omega\,t} d\,t = \frac{1}{a + i\,\omega}$$


s(t)
1
1/e


A(ω)


ϕ(ω)

Для экспоненциальных сигналов в качестве длительности сигнала обычно берется время, при котором амплитуда сигнала убывает в $e = 2.7...$ раз. Поэтому длительность экспоненциального сигнала равна

$$\Delta t = \frac{1}{a}$$

Будем определять эффективную ширину спектра по уровню 0.1 от максимума. Из графика видно, что эта ширина составляет примерно

$$\Delta\omega = 10a$$

Таким образом, база экспоненциального сигнала равна

$$\Delta\omega\,\Delta t = 10$$

! Найти аналитическое выражение АЧХ и ФЧХ экспоненциального сигнала

Гауссов импульс

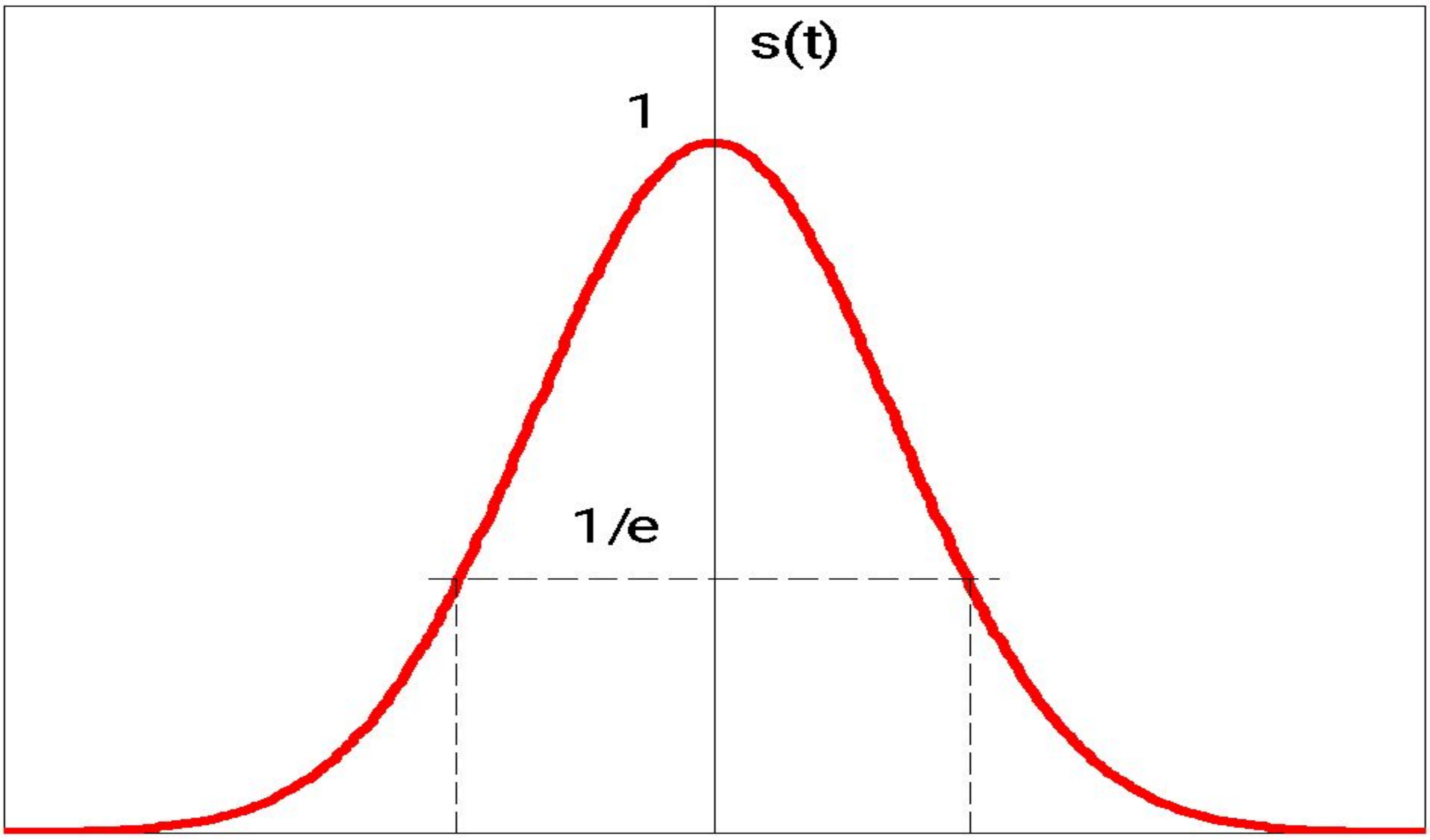
$$s(t) = \exp(-a^2 t^2)$$

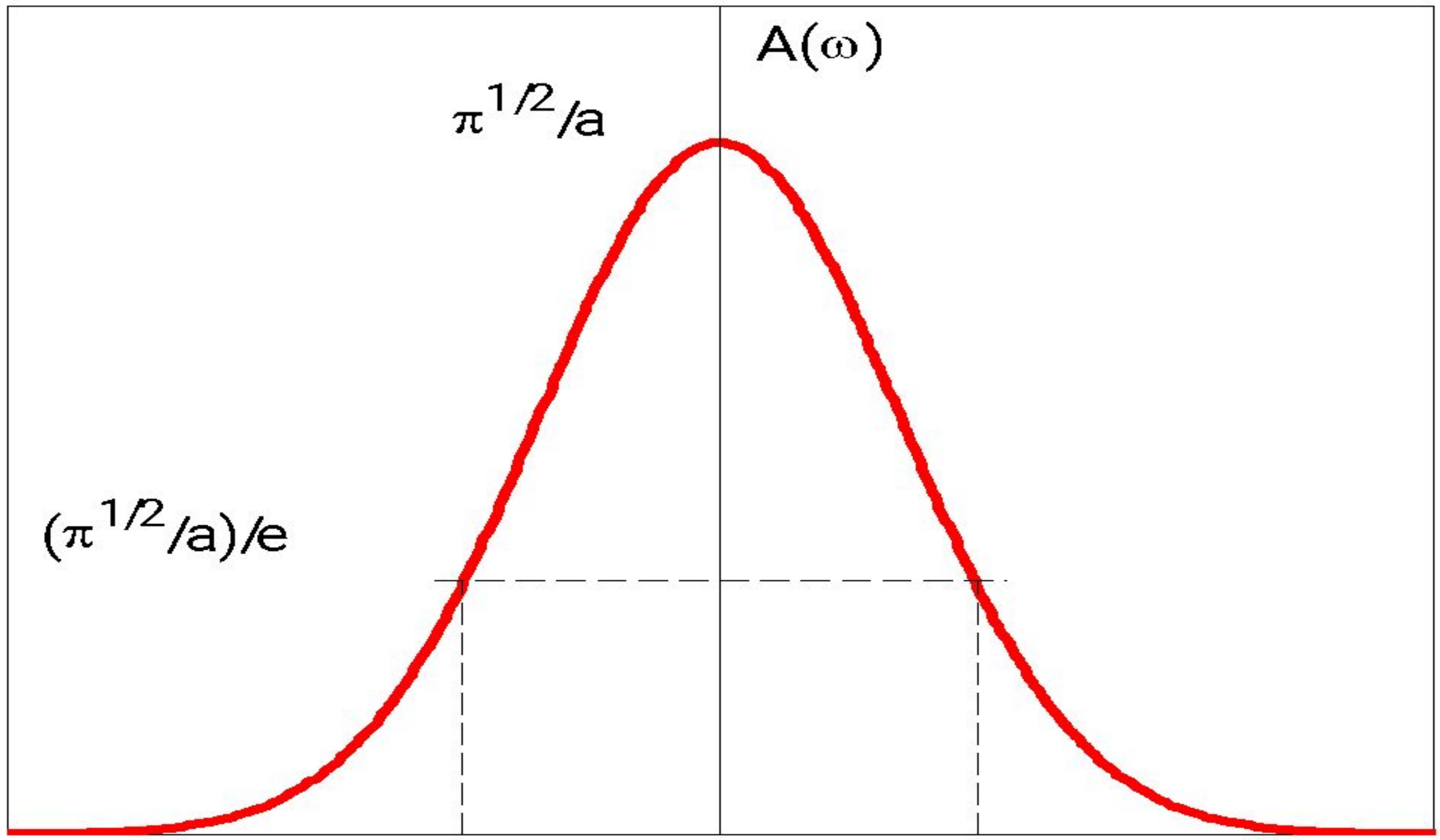
Вычисляем спектр $S(\omega)$с помощью прямого преобразования Фурье

$$S(\omega) = \int_0^\infty e^{-a^2 t^2} e^{-i\omega t} d\,t = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2} \right)$$

Поскольку сигнал является четной действительной функцией, его спектр получился чисто вещественной функцией, кроме того положительной функцией. Это означает, что амплитудно-частотная характеристика АЧХ совпадает со спектральной функцией. Фазово-частотная характеристика ФЧХ в этом случае просто равна нулю.

$$\varphi(\omega) = 0$$


s(t)
1
1/e


A(ω)
π^1/2/a
(π^1/2/a)/e

Важным свойством гауссова импульса является то, что его спектр также описывается гауссовой функцией.

Определим его эффективную длительность и ширину спектра по уровню $1/e$ от максимума. Тогда получим

$$\Delta t = \frac{2}{a}, \quad \Delta\omega = 2a$$

База гауссова сигнала, таким образом, равна четырем

$$\Delta\omega\,\Delta t = 4$$

! Провести интегрирование прямого преобразования Фурье гауссово сигнала

Основные понятия функционального анализа

Линейное пространство

Линейное пространство (ЛП) – множество элементов E произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие следующим аксиомам:

$A1.\ \forall x,\ y \in E \qquad x + y = y + x$

$A2.\ \forall x,\ y,\ z \in E \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$

$A3.\ \forall x \in E,\ \exists 0 \in E \qquad x + 0 = x$

$A4.\ \forall x \in E,\ \forall \lambda,\ \mu \in R \qquad \lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$

$A5.\ \forall x \in E,\ \forall \lambda,\ \mu \in R \qquad (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

$A6.\ \forall x \in E,\ \forall \lambda \in R \qquad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$A7.\ \forall x \in E \qquad 0 \cdot x = 0,\quad 1 \cdot x = x$

Линейное нормированное пространство

Линейное пространство называется **линейным нормированным пространством** (ЛНП), если каждому элементу , поставлено в соответствие число $\| x \|$.

Это число называется **нормой элемента**, и удовлетворяет следующим аксиомам (аксиомам нормы).

$A1.\ \forall x \in E \qquad \| x \| \geq 0, \quad \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$A2.\ \forall x \in E, \forall \lambda \in R \qquad \| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$

$A3.\ \forall x, y \in E \qquad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Энергия сигнала

Норму, которая удовлетворяет аксиомам нормы, можно определить разными способами. Для задач ЦОС наиболее подходит норма, определенная следующим образом:

$$\| s \| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\, dt}$$

Квадрат такой нормы будем называть **энергией сигнала**.

$$E_s = \| s \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\, dt$$

ЛНП с конечной нормой называется **пространством функций** с **интегрируемым квадратом**, и обозначается L_2.

Метрика (расстояние)

ЛП называется **метрическим пространством**, если каждой паре элементов (x, y) поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, называемое **метрикой** (**расстоянием**), удовлетворяющее следующим аксиомам (аксиомам метрики).

$$A1. \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$A2. \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$A3. \quad \rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Обычно метрику вводят следующим образом:

$$\rho(x, y) = \| x - y \|$$

Скалярное произведение

ЛП называется **евклидовым**, если каждой паре элементов (x, y) поставлено в соответствие вещественное число $< x, y >$, называемое **скалярным произведением**, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$A1. \quad < x, x > \geq 0, \quad < x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$A2. \quad < x, y > = < y, x >$$

$$A3. \quad < \lambda x, y > = \lambda < x, y >$$

$$A4. \quad < x + y, z > = < x, z > + < y, z >$$

Гильбертово пространство

Пространство называется **полным**, если оно содержит в себе все свои предельные точки.

Евклидово пространство, полное с нормой

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

называется **гильбертовым пространством**.