Продолжение Лекции 5

Теорема Котельникова

Для цифровой обработки аналогового сигнала $s(t)$, прежде всего, необходимо преобразовать его в дискретный сигнал. Взяв определенный шаг дискретизации Δt можно получить дискретный сигнал s_n по формуле

$$s_n = s(t_n), \qquad t_n = n\Delta t \qquad (56)$$

Проблема восстановления непрерывного (аналогового) сигнала по заданному дискретному сигналу решается **теоремой отсчетов**.

В отечественной литературе эта теорема известна как теорема **Котельникова**, а в зарубежной – как теорема **Найквиста** или теорема **Шеннона**.

Теорема 2. (Теорема отсчетов). Если сигнал $s(t)$ имеет спектр ограниченный полосы, т.е. $S(f) = 0$ при $|f| > F$, то функция $s(t)$ может быть точно восстановлена по своим значениям в точках ,

$t_k = k\,\Delta t, \quad k \in \mathbf{Z}$ где

$$\Delta t = \frac{1}{2F} \qquad (57)$$

при помощи формулы.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin(2\pi\, F\,(t - k\,\Delta t))}{2\pi\, F\,(t - k\,\Delta t)} \qquad (58)$$

Введенная здесь частота F называется **<u>частотой Найквиста</u>**.

Доказательство. Выразим сигнал через его спектр

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, e^{i\,2\pi\, f\, t} d\,f = \int_{-F}^{F} S(f)\, e^{i\,2\pi\, f\, t} d\,f$$

Тогда с использованием формул (56, 57) получаем выражение для дискретного сигнала

$$s(k\,\Delta t) = \int_{-F}^{F} S(f)\, e^{\,i\,\frac{\pi\,k}{F}\,f}\, d\,f \qquad (60)$$

Спектр $S(f)$, принимающий ненулевые значения только на отрезке $f \in [-F, F]$, периодически продолжим (с периодом $2F$) на всю ость частот, и полученную в результате периодическую функцию $S_D(f)$ представим в виде комплексного ряда Фурье.

$$S_D(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{i\frac{\pi k}{F} f} \qquad (61)$$

$$c_n = \frac{1}{2F} \int_{-F}^{F} S(f) \, e^{-i\frac{\pi k}{F} f} \, df$$

Здесь учтено, что на интервале $[-F, F]$ спектр $S(f)$ и спектр совпадают. Сравнивая поученную запись с выражением для $s(k\Delta t)$ (60), видим, что

$$c_k = \frac{1}{2F} s(-k\,\Delta t) \qquad (62)$$

Тогда получаем

$$S_D(f) = \frac{1}{2F}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(-k\,\Delta t)\, e^{\,i\frac{\pi k}{F} f} =$$

$$= \frac{1}{2F}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\,\Delta t)\, e^{-i\,2\pi\,k\,\Delta t\,f} \qquad (63)$$

Здесь при переходе от первой суммы ко второй была совершена замена

$$k \;\rightarrow\; -k$$

Берем формулу для сигнала (59) и заменяем в ней спектр $S(f)$ на спектр $S_D(f)$ (63)

$$s(t) = \int_{-F}^{F} S_D(f)\, e^{i\,2\pi\, f\, t} d f = \qquad (64)$$

$$= \frac{1}{2F} \int_{-F}^{F} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\Delta t)\, e^{-i\,2\pi\, k\Delta t\, f} \right) e^{i\,2\pi\, f\, t} d f$$

Меняя в последнем выражении порядок интегрирования и суммирования, имеем

$$s(t) = \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\,\Delta t) \left(\int_{-F}^{F} e^{i\,2\pi\, f\,(t - k\,\Delta t)} d f \right) \qquad (65)$$

Отсюда, учитывая, что интеграл в (65) равен

$$\int_{-F}^{F} e^{i\,2\pi\, f\,(t-k\,\Delta t)}\,d\,f = \frac{\sin(2\pi\; F\;(t-k\;\Delta t))}{2\pi\; F\;(t-k\;\Delta t)} \qquad (66)$$

получаем утверждение теоремы.

! Доказать справедливость формулы (66).

Итак, шаг дискретизации Δt позволяет **точно восстановить аналоговый сигнал**, если его **спектр ограничен** условием

$$\max|f| = F_{\max} \leq \frac{1}{2\Delta t} \qquad (67)$$

Отсюда, окончательно, критерий для выбора шага дискретизации аналогового сигнала при известной максимальной частоте $F_{\max}$ спектрального представления принимает следующий вид.

$$\Delta t \leq \frac{1}{2F_{\max}} \qquad (68)$$

Это условие можно записать через частоту Найквиста F

$$F \geq F_{\max} \tag{69}$$

Другими словами, при дискретизации аналогового сигнала частоту Найквиста надо выбирать **большей максимальной частоты спектра** аналогового сигнала.

! Написать программу в пакете MATLAB для восстановления сигнала с помощью ряда Котельникова . Проведя интегрирование, доказать справедливость формулы (58).

Дискретное преобразование Фурье

Введем два числовых вектора **x** и **X** размерности *N*.

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \qquad (1)$$

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_{N-1})$$

Компоненты этих векторов могут быть комплексными числами. Выразим компоненты вектора **X** через компоненты вектора **x** с помощью следующей суммы

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (2)$$

Соотношение (2) носит название **<u>дискретного преобразования Фурье</u>** (ДПФ). Иногда говорят, что вектор $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_{N-1})$ является дискретным преобразованием вектора

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$$

Дискретное преобразование Фурье (2) можно рассматривать как систему N линейных уравнений для N неизвестных x_n. Если решить эту систему, то вектор $\mathbf{x}$ можно выразить через вектор $\mathbf{X}$.

Теорема 1. Вектор $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ можно восстановить при помощи **обратного дискретного преобразования Фурье** (ОДПФ), которое определяется формулой.

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

Доказательство. Подставим ДПФ (2) в формулу (3)

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\right) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \tag{4}$$

В выражении (4) поменяем порядок суммирования.

$$x_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \right) \qquad (5)$$

Вычислим сумму, стоящую в скобках в формуле (5)

$$\lambda_{n,m} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \qquad (6)$$

Сумма в формуле (6) является суммой геометрической прогрессии.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q} \qquad (7)$$

Используем формулу суммы геометрической прогрессии (7) для вычисления суммы (6).

$$\lambda_{n,m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)}\right)^{k} = \frac{1}{N}\,\frac{1-e^{i\,2\pi\,(n-m)}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)}} = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{e^{i\pi(n-m)}\left(e^{i\pi(n-m)}-e^{-i\pi(n-m)}\right)}{e^{i\frac{\pi}{N}(n-m)}\left(e^{i\frac{\pi}{N}(n-m)}-e^{-i\frac{\pi}{N}(n-m)}\right)}$$

В последнем выражении применяем формулу Эйлера для синуса

$$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

В результате формула (8) принимает вид.

$$\lambda_{n,m} = \frac{e^{i\pi\left(1-\frac{1}{N}\right)(n-m)}}{N}\frac{\sin(\pi\ (n-m))}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\ (n-m)\right)} \qquad (9)$$

В выражении (9) n и m целые числа принимают следующие значения

$$n, m = 0, 1, \ldots, N-1$$

Поэтому если $n \neq m$, то синус в числителе равен нулю, а в знаменателе нет.

$$if \quad n \neq m, \quad then \quad \begin{cases} \sin(\pi\ (n-m)) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{N}\ (n-m)\right) \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, если $n \neq m$, сумма в выражении (6) равна нулю.

$$\lambda_{n,m} = 0, \quad if \quad n \neq m \qquad (10)$$

Если же индексы равны друг другу $n = m$, то сумма (6) вычисляется очень просто. В этом случае экспоненты в сумме (6) будут равны единице. Поэтому получаем:

$$\lambda_{n,m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{1}{N} N = 1, \quad if \quad n = m \qquad (11)$$

Объединяя формулы (10) и (11), мы видим что сумма (6) равна символу Кронекера

$$\lambda_{n,m} = \delta_{n,m} \qquad (12)$$

Подставляем (12) в формулу (5), и используем свойство символа Кронекера, сворачивать сумму. В результате получаем

$$x_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \, \delta_{n,m} = x_n \qquad (13)$$

Итак, **Теорема доказана**.

Таким образом, дискретное преобразование Фурье определятся формулами (2) и (3), которые мы объединим вместе.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{-i \frac{2\pi}{N} k n}, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \, e^{i \frac{2\pi}{N} k n}, \qquad n = 0, 1, \dots, N-1 \qquad (14)$$

Можно сказать, что вектор $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ и вектор $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$, связаны между собой дискретным преобразованием Фурье, что обычно изображают в виде знака.

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}$$

Дискретное преобразование Фурье и пакет MATLAB

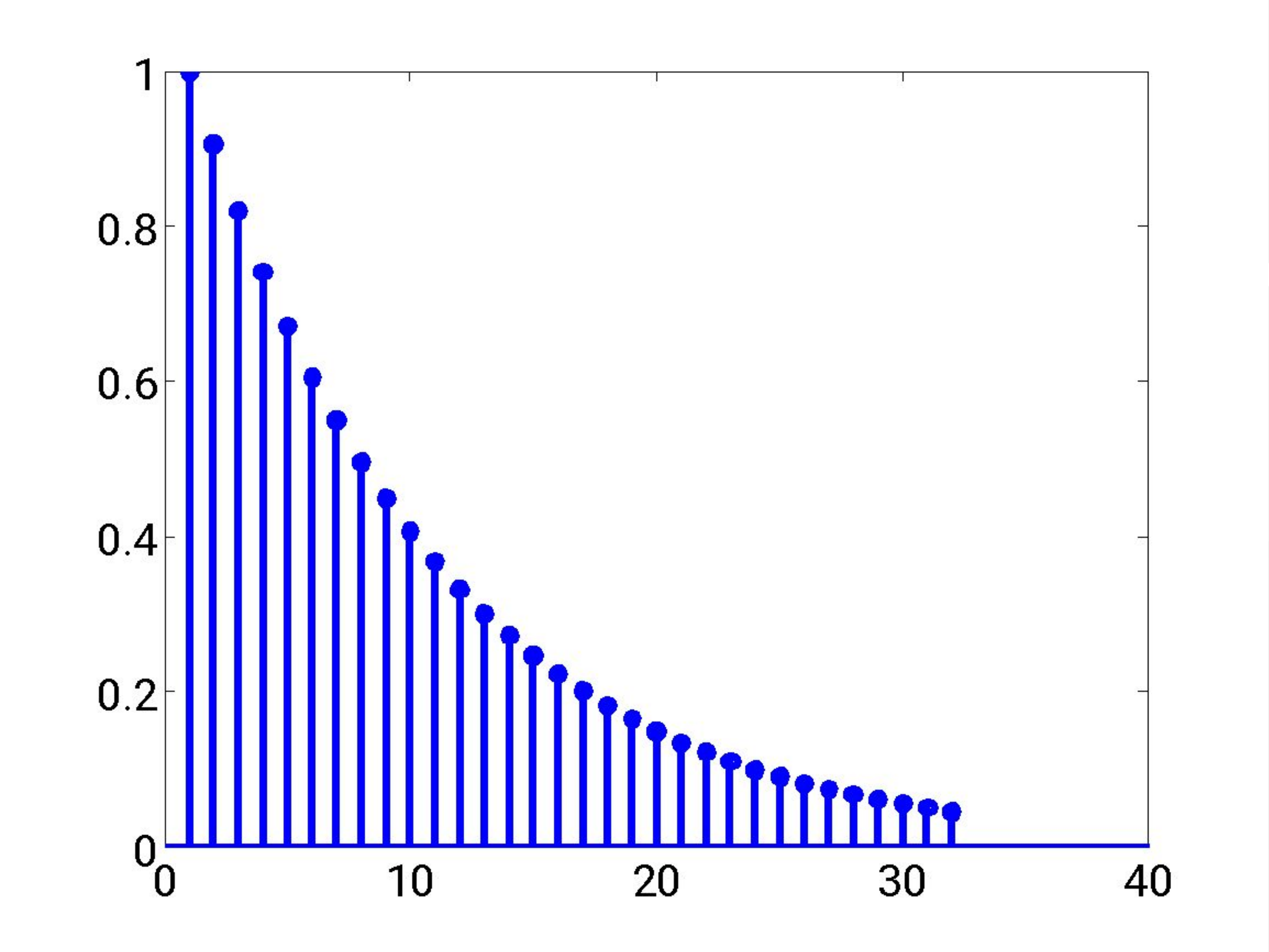
В пакете MATLAB имеются средства для вычисления дискретного преобразования Фурье. Преобразование ДПФ, например, выполняет функция fft(x) . Вызов этой функции осуществляется следующим образом.

```
X = fft(x);
```

Фрагмент кода программы показывает, как можно получить ДПФ для заданного вектора *x* , компоненты которого убывают по экспоненциальному закону.

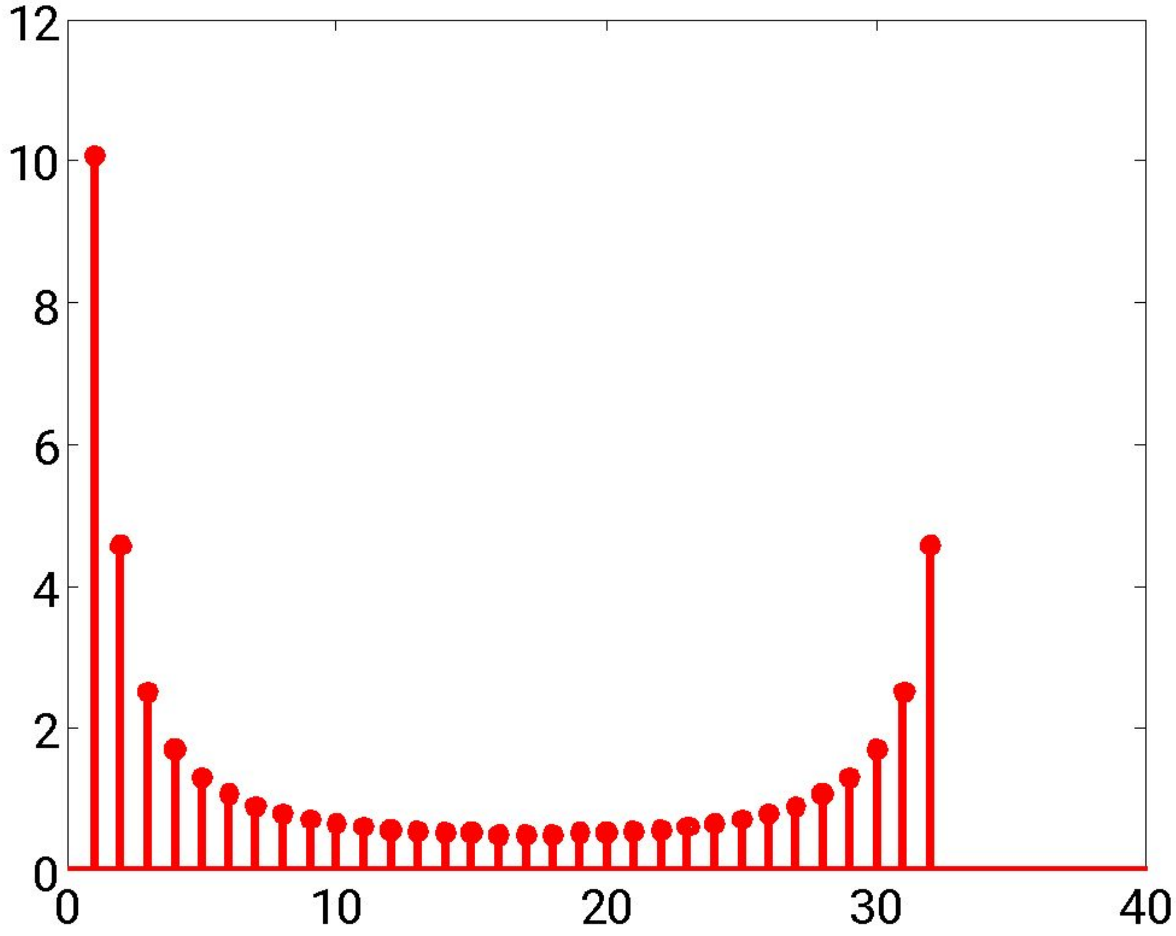
```
N = 32;
n = 1 : N;
x = exp(-0.1*n);
X = fft(x);

stem(x);
stem(abs(X));
stem(angle(X));
```

На рисунках показан результат работы программы.

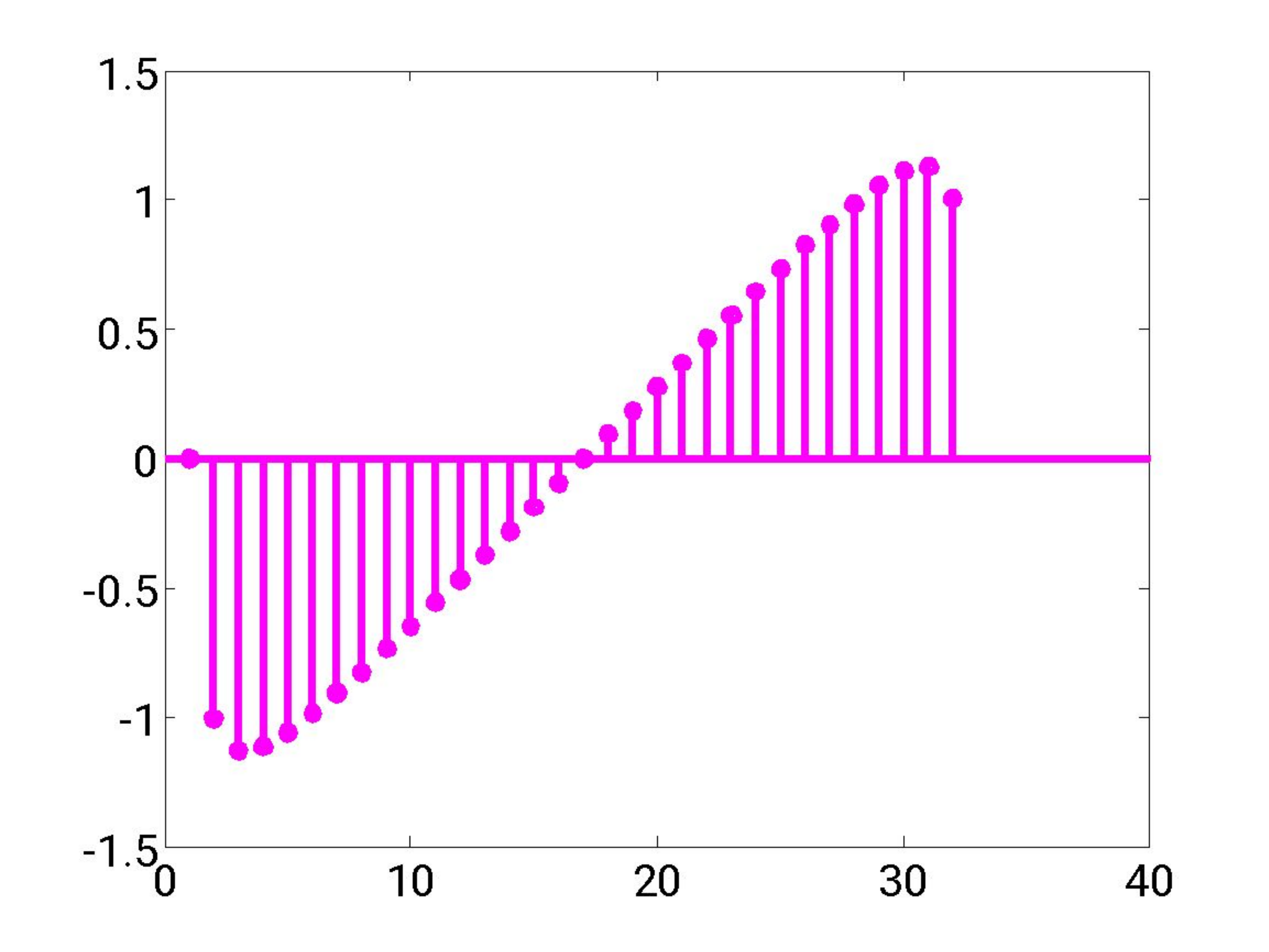


На первом рисунке выводятся компоненты входящего вектора *x* . Видно, что компоненты этого вектора убывают по экспоненциальному закону.

На горизонтальной оси отложены номера компонентов.



Так как выходящий вектор *X* является комплексным, то на втором рисунке выводится абсолютные значения его компонентов (аналог АЧХ).



На третьем рисунке выводятся аргументы его компонентов (аналог ФЧХ).

Обратное дискретное преобразование Фурье ОДПФ, выполняет функция ifft(X) . Вызов этой функции осуществляется следующим образом.

x = ifft(X);

При использовании ДПФ в пакете MATLAB надо обратить внимание на следующее обстоятельство. Указанные функции производят вычисления по формулам, которые немного отличаются от классических формул (14). Эти формулы в пакете MATLAB выглядят следующим образом.

$$X_k = \sum_{n=1}^{N} x_n \, e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-1)(n-1)}, \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k \, e^{i\frac{2\pi}{N}(k-1)(n-1)}, \qquad n = 1, \ldots, N \qquad (15)$$

Свойства дискретное преобразование Фурье

Отметим важные свойства ДПФ, которые часто используются в приложениях. Сначала несколько слов об обозначениях. Если компоненты вектора **x** рассматривать как последовательность чисел.

$$\{x_n\}, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

то говорят, что эта **последовательность имеет длину** N. Также называют N - **периодом последовательности**. Кроме того, часто вектор **x** называют **вектором-сигналом**, а вектор ДПФ **X** называют **вектором-спектром**.

1. **<u>Свойства симметрии</u>**. Если **<u>вещественный</u>** вектор **x** с периодом N имеет в качестве ДПФ вектор **X** , то выполняются следующие условия симметрии.

$$
\begin{aligned}
&\textit{if} \quad \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X} \quad \textit{then} \\
&X_0^* = X_0, \\
&X_n^* = X_{N-n}, \qquad n = 1, \ldots, N-1
\end{aligned}
\tag{16}
$$

!Доказать самим соотношения (16).

Из соотношений (16) вытекают условия симметрии для действительных и мнимых частей компонент вектора $\mathbf{X}$.

$$
if \quad \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X} \quad then \quad \begin{cases} \operatorname{Re} X_n = \operatorname{Re} X_{N-n}, \\ \operatorname{Im} X_n = -\operatorname{Im} X_{N-n}, \\ |X_n| = |X_{N-n}|, \\ \arg X_n = -\arg X_{N-n} \end{cases} \qquad (17)
$$

! Доказать самим соотношения (17).

2. **Линейность**. Линейной комбинации векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ соответствует линейная комбинация ДПФ.

$$\begin{aligned}
&\textit{if} \\
&\quad \mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{x}(t) = a\,\mathbf{x}_1 + b\,\mathbf{x}_2, \\
&\textit{then} \\
&\quad \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}, \\
&\textit{where} \\
&\quad \mathbf{X} = a\,\mathbf{X}_1 + b\,\mathbf{X}_2
\end{aligned} \tag{18}$$

! Доказать самим соотношения (18).

3. **<u>Циклический сдвиг влево</u>**. Циклическому сдвигу влево компонент вектора-сигнала, соответствует умножение компонент вектора-сигнала на фазовый множитель.

$$\begin{aligned}
&\mathit{if} \\
&\qquad \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \to \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_0), \\
&\qquad\qquad \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}, \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{Y}, \\
&\mathit{then} \\
&\qquad\qquad Y_n = e^{i\frac{2\pi}{N}n} X_n
\end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. Запишем ДПФ для векторов $\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{Y}$, и затем разобью сумму на два члена.

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-2} y_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} + y_{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}k(N-1)} \tag{20}$$

Заменим в формуле (20) компоненты вектора **y** на компоненты вектора **x** с помощью условия (19.)

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-2} x_{n+1}\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} + x_0\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k(N-1)} = \tag{21}$$

$$= \sum_{m=1}^{N-1} x_m\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k(m-1)} + x_0\, e^{i\frac{2\pi}{N}k} e^{-i\,2\,\pi\,k}$$

В сумме (21) была сделана замена индексов $n+1=m$. Учитываем с помощью формулы Эйлера что.

$$e^{-i\,2\,\pi\,k} = 1$$

Далее выполняем в выражении (21) следующие преобразования.

$$Y_k = \sum_{m=1}^{N-1} x_m e^{-i\frac{2\pi}{N}km} e^{i\frac{2\pi}{N}k} + x_0 e^{i\frac{2\pi}{N}k} = e^{i\frac{2\pi}{N}k}\left(\sum_{m=1}^{N-1} x_m e^{-i\frac{2\pi}{N}km} + x_0\right) =$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{N}k}\left(x_0 + \sum_{m=1}^{N-1} x_m e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\right) = e^{i\frac{2\pi}{N}k} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i\frac{2\pi}{N}km} \qquad (22)$$

Последняя сумма в выражении (22) является ДПФ для векторов $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}$. Поэтому окончательно получаем.

$$Y_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k} X_k$$

Свойство доказано.

Следствие. **<u>Циклический сдвиг влево на *m* позиций</u>**.

Циклическому сдвигу влево на *m* позиций компонент вектора-сигнала, соответствует умножение компонент вектора-сигнала на фазовый множитель.

if

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \to \mathbf{y} = (x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{N-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}),$$

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}, \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{Y},$$

(23)

then

$$Y_n = e^{i\frac{2\pi}{N}nm} X_n$$

! Доказать самим соотношения (23).

4. **<u>Циклический сдвиг вправо на *m* позиций</u>**. Циклическому сдвигу вправо на *m* позиций компонент вектора-сигнала, соответствует умножение компонент вектора-сигнала на фазовый множитель.

$$
\begin{aligned}
&\textit{if} \\
&\qquad \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \to \mathbf{y} = (x_{N-m}, \ldots, x_{N-2}, x_{N-1}, x_0, \ldots, x_{N-m-1}), \\
&\qquad\qquad \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}, \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{Y}, \\
&\textit{then} \\
&\qquad\qquad Y_n = e^{-i\frac{2\pi}{N}nm} X_n
\end{aligned}
\tag{24}
$$

! Доказать самим соотношения (24).

Следствие из свойств 3, 4. **Инвариантность амплитудного спектра относительно циклических сдвигов.** При любом циклическом сдвиге амплитуда компонентов ДПФ не меняется.

$$\left|Y_n\right| = \left|X_n\right|$$

Доказательство. Используем результаты циклических сдвигов, отмеченные в формулах (19), (23), (24). Объединим эти результаты в виде формулы.

$$Y_n = e^{\pm i \frac{2\pi}{N} n m} X_n, \quad m \in \mathbf{Z} \qquad (25)$$

Теперь вычислим модуль от выражения (25).

$$\left|Y_n\right| = \left|e^{\pm i\frac{2\pi}{N}nm} X_n\right| = \left|e^{\pm i\frac{2\pi}{N}nm}\right|\left|X_n\right| = \left|X_n\right|, \quad m \in \mathbf{Z} \qquad (26)$$

В формуле (26) учтено, модуль фазового множителя равен единице. Действительно по определению модуля комплексного числа имеем.

$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}e^{-ix} = 1$$

Следствие доказано.

Определение. Под сверткой двух векторов $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ с периодом N, будем понимать вектор $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ с периодом $2N$ вдвое большим. Причем компоненты вектора-сверки определяются следующими формулами.

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n b_{k-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{k-n} b_n, \quad k = 1, \ldots, 2N-1 \qquad (27)$$

5. <u>ДПФ свертки векторов</u>. Вектор являющийся сверткой двух других векторов имеет ДПФ равный произведению ДПФ исходных векторов.

$$\textit{if} \quad \mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{A}, \quad \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{B}, \quad c_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n b_{k-n},$$

then

$$\mathbf{c} \leftrightarrow \mathbf{C}, \qquad (28)$$

where

$$C_k = A_k B_k$$

Доказательство. Дополним векторы **a** и **b** нулями, чтобы они имели период $2N$.

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N}), \quad \mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N})$$

Выпишем ДПФ для этих векторов.

$$A_k = \sum_{n=0}^{2N-1} a_n e^{-i\frac{2\pi}{2N}kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N-1,$$

$$B_k = \sum_{n=0}^{2N-1} b_n e^{-i\frac{2\pi}{2N}kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N-1 \qquad (29)$$

Для удобства введем обозначение

$$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{2N}} \qquad (30)$$

Выпишем ДПФ вектора-свертки с использованием формул (28), (29), (30).

$$C_k = \sum_{n=0}^{2N-1} c_n e^{-i\frac{2\pi}{2N}kn} = \sum_{n=0}^{2N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} a_m b_{n-m}\right)\omega^{kn} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} a_m \left(\sum_{n=0}^{2N-1} b_{n-m}\right)\omega^{kn} \qquad (31)$$

В формуле (31) изменен порядок суммирования. В сумме в скобках (31) сделаем замену индексов

$$n - m = l,$$

$$n = 0, 1, \ldots, 2N - 1 \quad \to \quad l = -m, 1 - m, \ldots, 2N - 1 - m$$

В результате получи выражение:

$$C_k = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \left(\sum_{n=-m}^{2N-1-m} b_l \right) \omega^{k\,(m+l)} = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \omega^{k\,m} \left(\sum_{l=-m}^{2N-1-m} b_l \omega^{k\,l} \right) \qquad (32)$$

Теперь учтем, что компоненты векторов **a** и **b** отличны от нуля только для следующих значений индексов *l*.

$$a_l \neq 0,\ b_l \neq 0, \qquad l = 0, \dots, N-1$$

Поэтому $b_l = 0$ для $l < 0$ или для $l > N - 1$. Таким образом, формула (32) принимает вид.

$$C_k = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \omega^{km} \sum_{l=0}^{N-1} b_l \omega^{kl} \qquad (33)$$

Далее, так как $a_l = 0, b_l = 0$ для $l > N - 1$, то суммы в (33) не изменяться, если в них добавить нулевые члены. Поэтому в этих суммах верхние пределы можно увеличить до $2N - 1$. Выпишем эти суммы. При этом учтем, чему равен параметр ω (30), и явный вид ДПФ векторов **a** и **b** (29) .

$$\sum_{m=0}^{N-1} a_m \, \omega^{km} = \sum_{m=0}^{2N-1} a_m \, e^{-i\frac{2\pi}{2N}km} = A_k$$

(34)

$$\sum_{l=0}^{N-1} b_l \, \omega^{kl} = \sum_{l=0}^{2N-1} b_l \, e^{-i\frac{2\pi}{2N}kl} = B_k$$

С учетом формул (34) выражение (33) принимает искомый вид.

$$C_k = A_k\, B_k$$

Свойство доказано.

Дискретное преобразование Фурье и спектр сигналов

Рассмотрим, какую роль играет дискретное преобразование Фурье в спектральном описании сигналов. Начнем с дискретного сигнала. Как мы знаем, спектр дискретного сигнала выражается формулой.

$$S_D(f) = \frac{1}{2F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n\, e^{-i \frac{\pi\, n}{F} f} \qquad (35)$$

Здесь F - частота Найквиста, а s_n отсчеты дискретного сигнала. Предположим, что дискретный сигнал определен конечным набором отсчетов.

$$\{s_n\}, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

Другими словами для $n < 0$ или для $n > N - 1$ можно считать $s_n = 0$. Поэтому ряд (35) заменяется конечной суммой.

$$S_D(f) = \frac{1}{2F} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \, e^{-i \frac{\pi n}{F} f} \qquad (36)$$

Спектр дискретного сигнала (36) является непрерывной периодической функцией с периодом $2F$. На периоде $[0, 2F]$ выберем N дискретных значений частоты f. Эти значения определим следующим образом.

$$f_k = k\,\Delta f, \quad \Delta f = \frac{2F}{N}, \qquad k = 0, \ldots, N-1 \qquad (37)$$

В формуле (37) величина Δf называется **<u>шагом частотной дискретизации</u>**. Подставим дискретные значения частоты (37) в формулу спектра (36). В результате получим.

$$S_D(f_k) = \frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{N-1} s_n\, e^{-i\frac{\pi n}{F} f_k} = \frac{1}{2F}\sum_{n=0}^{N-1} s_n\, e^{-i\frac{2\pi}{N} n k} \qquad (38)$$

Мы видим, что сумма, стоящая в формуле (38) является ДПФ для последовательности s_n .

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, \ldots, N-1 \qquad (39)$$

Сравнивая формулы (38) и (39) получаем соотношение.

$$S_D(f_k) = \frac{1}{2F} S_k \qquad (40)$$

Таким образом, **<u>дискретный спектр</u>** $S_D(f_k)$ **<u>дискретного сигнала</u>** s_n выражается через ДПФ S_k от дискретного сигнала s_n по формуле (40). Если ввести векторы дискретного сигнала и его дискретного спектра с периодом N .

$$\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}),$$

$$\mathbf{S}_D = (S_D(f_0), S_D(f_1), \ldots, S_D(f_{N-1}),)$$

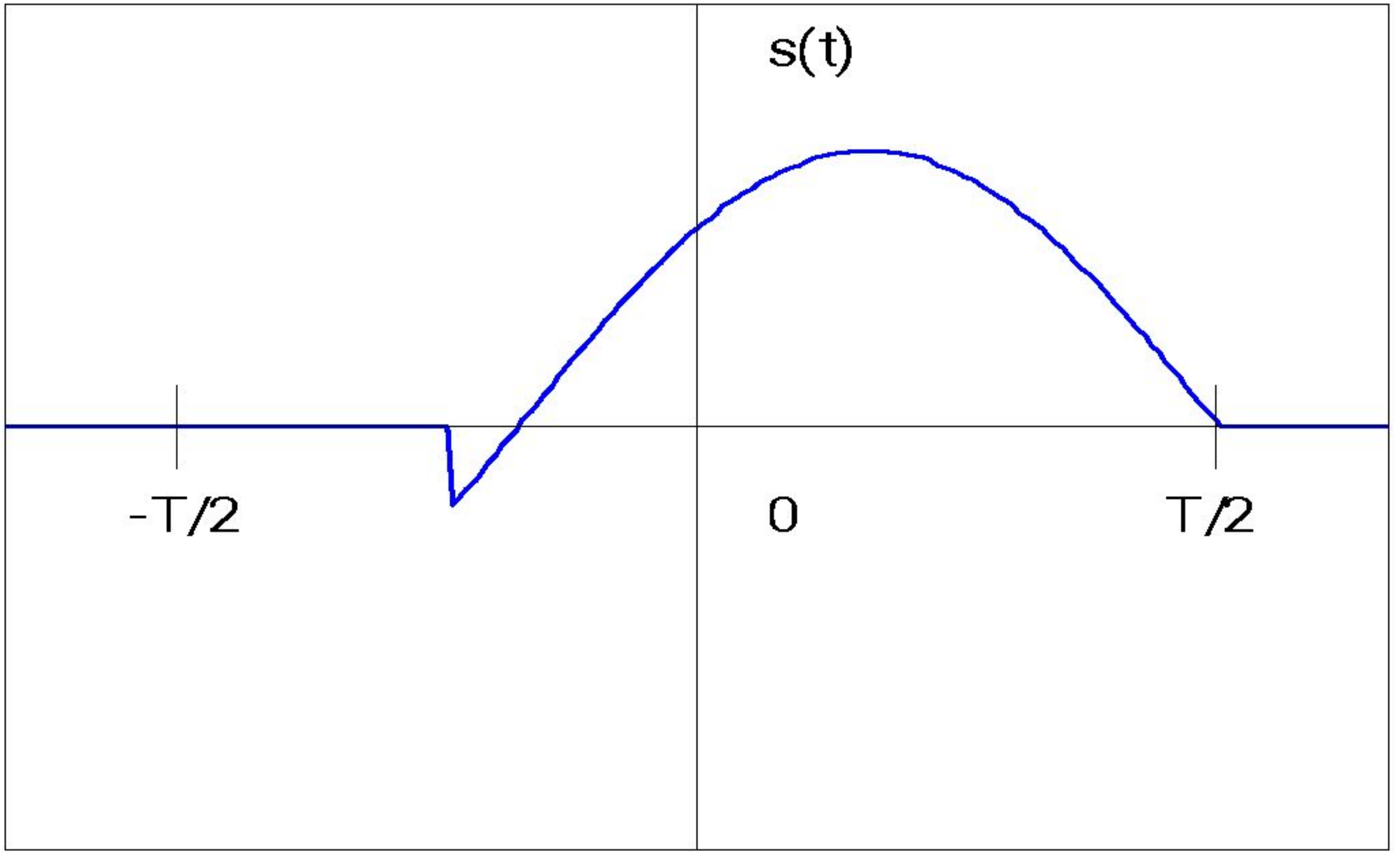
то связь (40) можно изобразить в виде.

$$\mathbf{s} \leftrightarrow 2F\,\mathbf{S}_D \qquad (41)$$

Теперь рассмотрим, как связано дискретное преобразование Фурье со спектром **непрерывных сигналов**. Спектр непрерывного сигнала определяется преобразованием Фурье.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i2\pi f t} d\, t, \qquad (44)$$

Рассмотрим финитный сигнал $s(\ t\ )$. Выберем временной интервал $t \in [\ -T/2,\ \ T/2\ ]$ такой, чтобы вне этого интервала сигнал равнялся нулю $s(\ t\ ) = 0$.


s(t)
-T/2
0
T/2

Тогда спектр $S(f)$ такого сигнала будет равен интегралу с конечными пределами.

$$S(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\, e^{-i 2\pi f t} d t \qquad (45)$$

Проведем дискретизацию сигнала с шагом дискретизации

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

где N для удобства четное число. Отсчеты сигнала $s_n = s(t_n)$ берем в дискретные моменты времени

$$t_n = n \Delta t, \qquad n = -\frac{N}{2} + 1, \ldots -1, 0, 1, \ldots \frac{N}{2}$$

В методе прямоугольников интеграл (3) заменяем следующей суммой

$$S(f) = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} s_n \, e^{-i 2\pi n f \Delta t} \, \Delta t \qquad (46)$$

Выразим шаг дискретизации через частоту Найквиста

$$\Delta t = \frac{1}{2F}$$

Тогда формула (46) примет вид

$$S(f) = \frac{1}{2F} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} s_n \, e^{-i \frac{\pi n}{F} f} \qquad (47)$$

Сравним формулу (47) с выражением (36) для спектра дискретного сигнала. Мы видим, что формулы очень похожи.

Отличие в способе нумерации отсчетов дискретного сигнала. В формуле (36) отсчеты нумеруются следующим образом.

$$\boldsymbol{s}_0,\ \boldsymbol{s}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{s}_{N-1} \qquad (48)$$

В формуле (47) нумерация другая.

$$\boldsymbol{s}_{-\frac{N}{2}+1},\ \boldsymbol{s}_{-\frac{N}{2}+2},\ \ldots,\ \boldsymbol{s}_{\frac{N}{2}} \qquad (49)$$

Обычно нас интересует спектр, как для положительных значений частоты $f > 0$,так и для отрицательных значений частоты $f < 0$. Поэтому, определим дискретные значения частоты следующим образом:

$$f_k = k\,\Delta f, \quad \Delta f = \frac{2F}{N}, \qquad k = -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2} \qquad (50)$$

Подставляем дискретные частоты (50) в формулу (47) и получаем:

$$S(f_k) = \frac{1}{2F}\sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} s_n\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad k = -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2} \qquad (51)$$

Чтобы сумме в выражении (51) придать вид ДПФ, сделаем замену индексов.

$$n+\frac{N}{2}-1=m,$$

$$n=-\frac{N}{2}+1,\ \ldots,\ \frac{N}{2} \quad\rightarrow\quad m=0,1,\ldots,N-1$$

В результате формула (51) примет вид

$$S(f_k)=\frac{1}{2F}\sum_{m=0}^{N-1}s_{m-\frac{N}{2}+1}\,e^{-i\frac{2\pi}{N}k\left(m-\frac{N}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2F}e^{i\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N}{2}-1\right)}\sum_{m=0}^{N-1}s_{m-\frac{N}{2}+1}\,e^{-i\frac{2\pi}{N}km} \qquad (52)$$

Заменим последовательность s_n другой последовательностью x_n по правилу.

$$s_{m-\frac{N}{2}+1} = x_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (53)$$

В этом случае спектр сигнала (52) принимает вид

$$S(f_k) = \frac{1}{2F} e^{i\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N}{2}-1\right)} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \, e^{-i\frac{2\pi}{N}km} \qquad (54)$$

Сумма в (54) внешне похожа на ДПФ для последовательности x_n. Выпишем эту сумму.

$$\widetilde{X}_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \, e^{-i \frac{2\pi}{N} k m} \qquad (55)$$

Отличие суммы (55) от **настоящего** ДПФ, приведенного в формуле (2), состоит в следующем. В настоящем ДПФ индекс k принимает следующие значения.

$$k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (56)$$

В сумме (55) индекс k принимает другие значения.

$$k = -\frac{N}{2} + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} \qquad (57)$$

Разобьем этот интервал на две части. Рассмотрим сначала правую часть этого интервала

$$k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} \qquad (58)$$

Интервал (58) содержится в интервале (56) , поэтому для значений (58) сумма (55) совпадает с ДПФ.

$$\tilde{X}_k = X_k \qquad (59)$$

Итак, для интервала (58) получаем связь между спектром и ДПФ

$$S(f_k) = \frac{1}{2F} e^{i\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N}{2}-1\right)} X_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} \qquad (60)$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления половины спектра.

Теперь рассмотрим левую часть интервала (57)

$$k = -\frac{N}{2} + 1, \ldots, -1 \qquad (61)$$

Сделаем замену индексов в уравнении (55).

$$k + N = l,$$

$$k = -\frac{N}{2} + 1, \ldots, -1 \;\rightarrow\; l = \frac{N}{2} + 1, \ldots, N - 1 \qquad (62)$$

Сумма (55) в этом случае примет вид

$$\tilde{X}_{l-N} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i\frac{2\pi}{N}(l-N)m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i\frac{2\pi}{N}l\,m} e^{i2\pi m} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i\frac{2\pi}{N}l\,m} \qquad (63)$$

Последняя сумма в (63) является ДПФ, так как интервал изменения индекса l (62) содержится в интервале (56). Поэтому формула (63) принимает вид

$$\tilde{X}_{l-N} = X_l, \qquad l = \frac{N}{2}+1, \ldots, N-1 \qquad (64)$$

Подставляя (64) в формулы (55), (54) для интервала (61) получаем связь между спектром и ДПФ

$$S(f_{l-N}) = \frac{1}{2F} e^{i\frac{2\pi}{N} l\left(\frac{N}{2}-1\right)} X_l, \qquad l = \frac{N}{2}+1, \ldots, N-1 \qquad (65)$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления второй половины спектра.

! Доказать самим соотношение (65).

Итак формулы (60) и (65) устанавливают связь между дискретным спектром финитного непрерывного сигнала и ДПФ.