

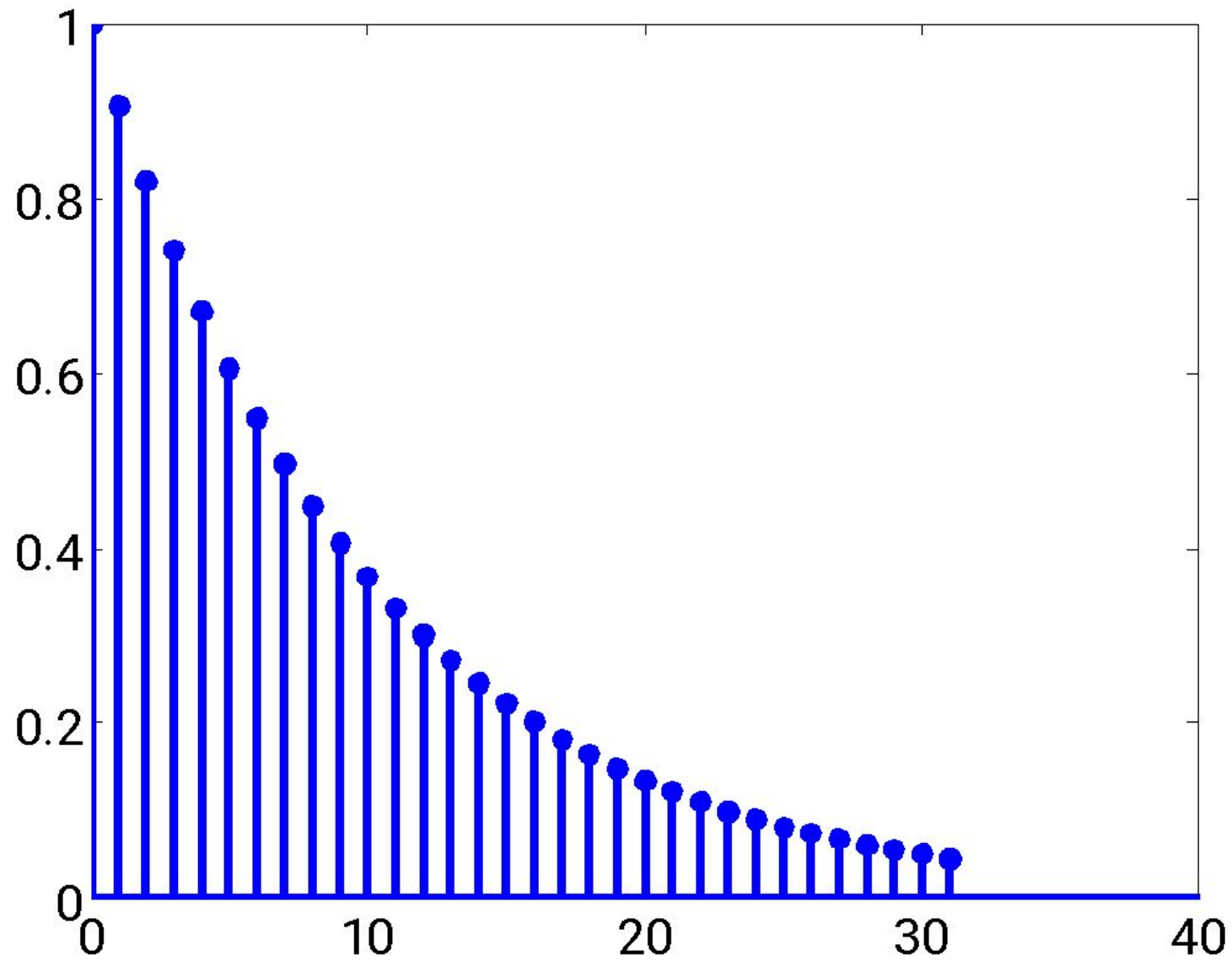
Лекция 7

Графическая иллюстрация свойств дискретного преобразование Фурье.

Для примера, рассмотрим вектор x , компоненты которого убывают по экспоненциальному закону.

$$x_n = e^{-an}, \quad a > 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

Совокупность компонент вектора, часто будем называть числовой последовательностью. Пусть период числовой последовательности x_n равен $N=32$, а коэффициент в экспоненте $a = 0.1$. График этой последовательности показан на рисунке. На горизонтальной оси отложены номера компонент.



Получим дискретное преобразование Фурье (ДПФ) для этого вектора, что символически выражается следующим образом.

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}$$

Компоненты вектора \mathbf{X} вычисляются с помощью следующей суммы

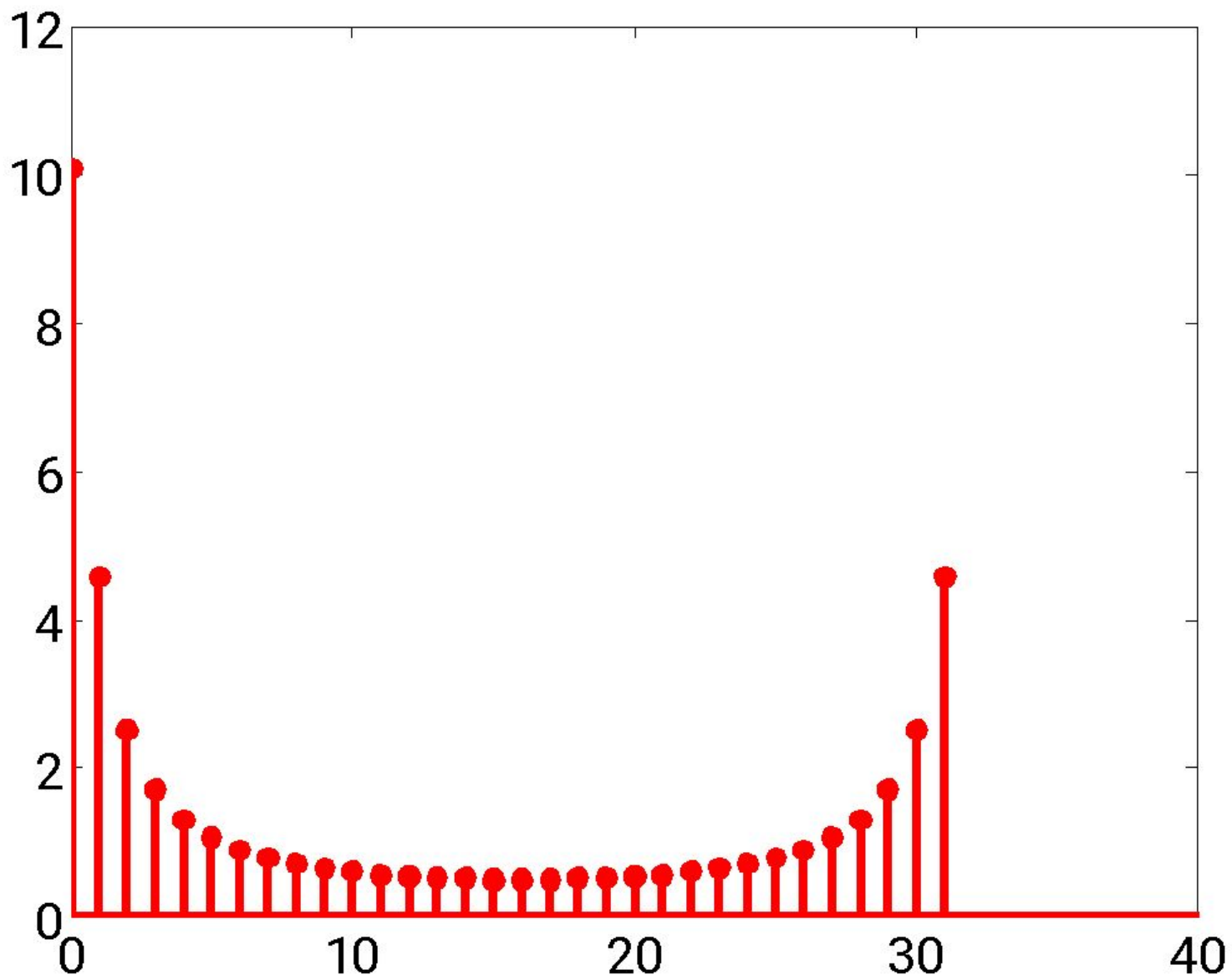
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

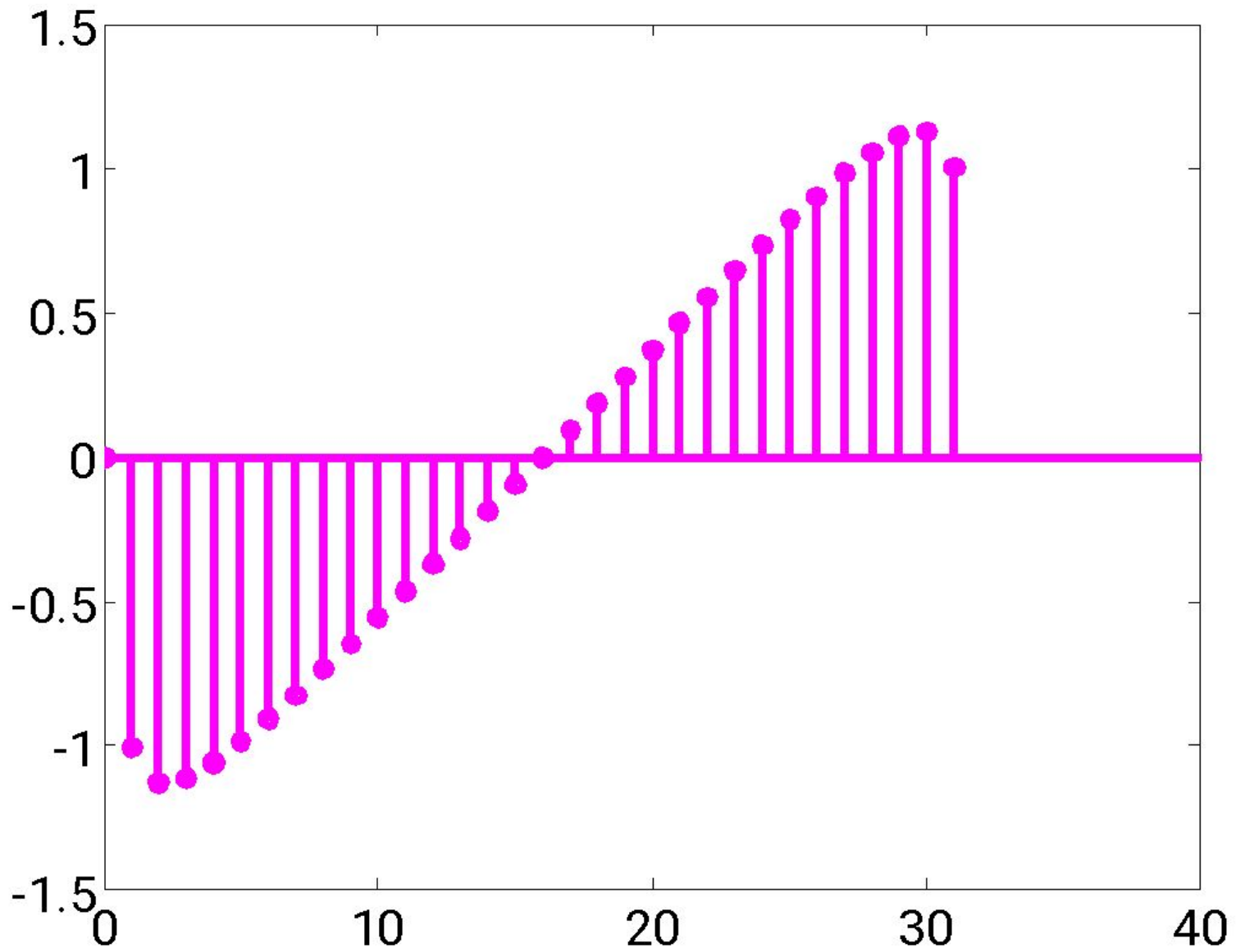
Эта сумма называется прямое ДПФ.

Последовательность X_n , является, вообще говоря, последовательностью комплексных чисел. Поэтому интересно построить графики для модуля и аргумента компонент вектора \mathbf{X} .

$$A_n = |X_n|, \quad \varphi_n = \arg X_n \quad (3)$$

В формуле (3) первое соотношение является аналогом АЧХ, а второе аналогом ФЧХ. В нашем примере графики амплитуды и аргумента показаны на рисунках.



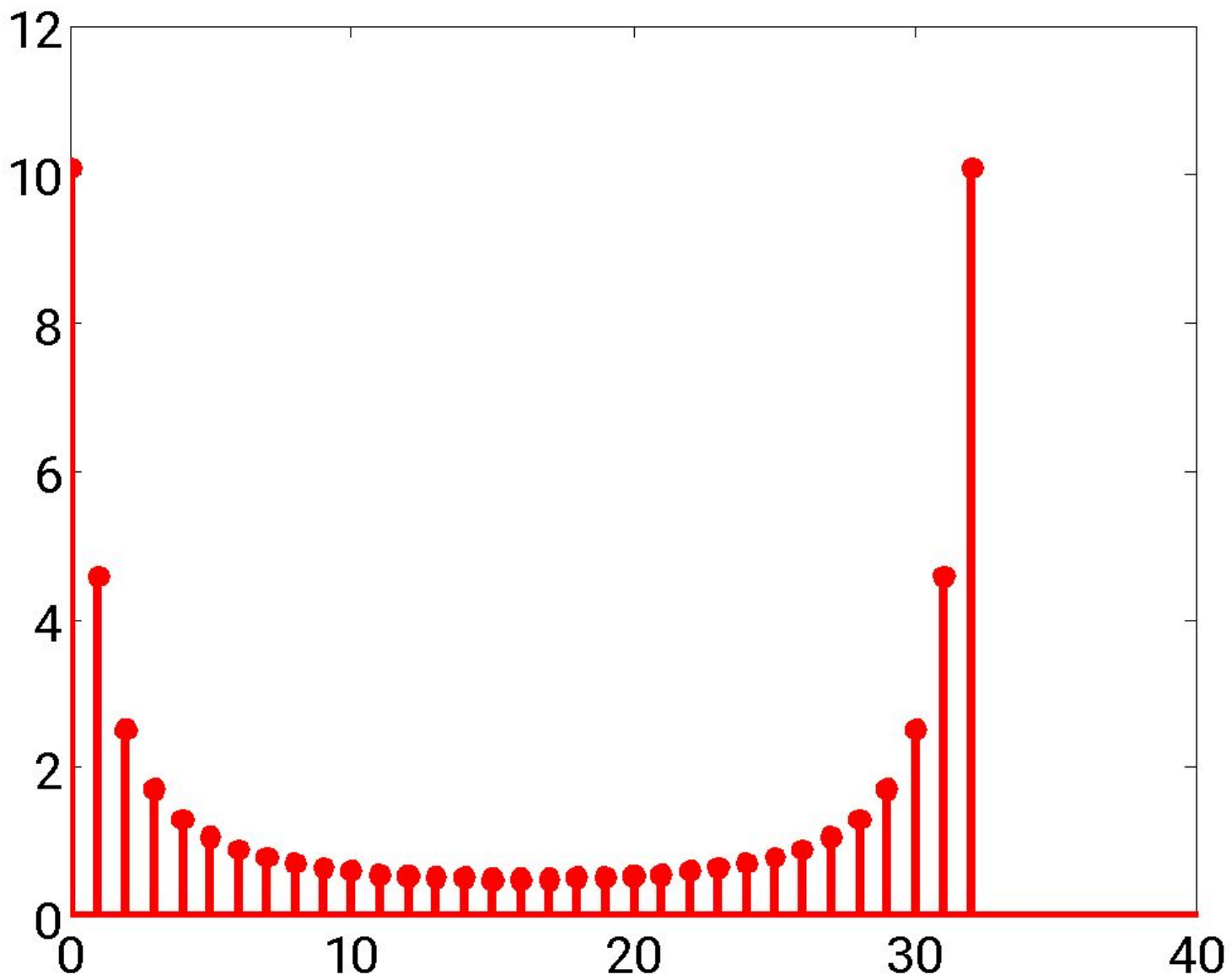


Если ДПФ (2) рассматривать для любых значений индекса k , то обнаруживаются интересные свойства ДПФ.

Во-первых, легко показать, что компоненты ДПФ X_0 и X_N равны друг другу.

$$X_N = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} N n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n = X_0 \quad (4)$$

На рисунке показана эта ситуация.



На этом рисунке можно увидеть еще одно свойство. График АЧХ симметричен относительно 17-ого элемента. В общем случае такая симметрия имеет место относительно компоненты с номером

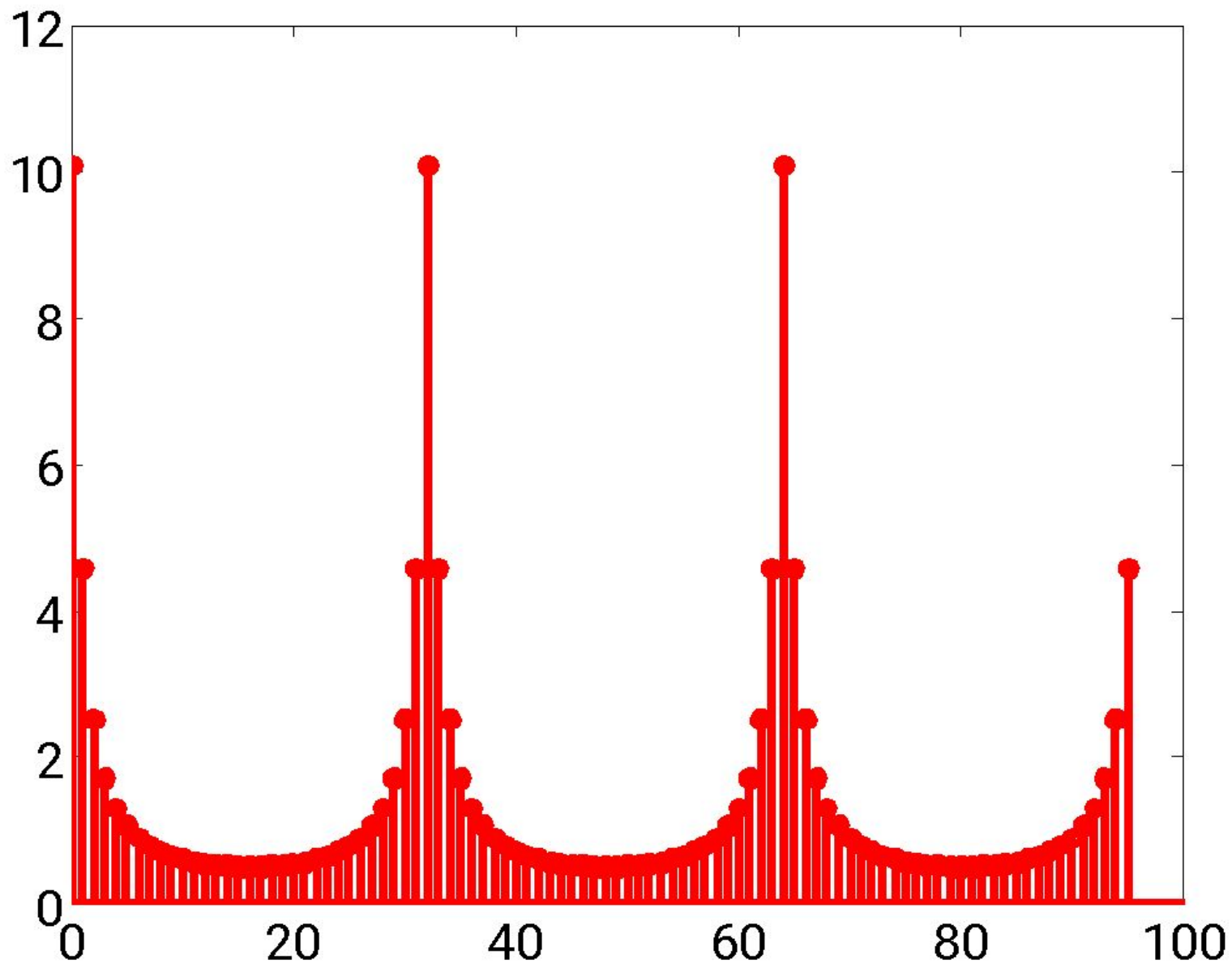
$$n_c = \frac{N}{2} + 1 \quad (5)$$

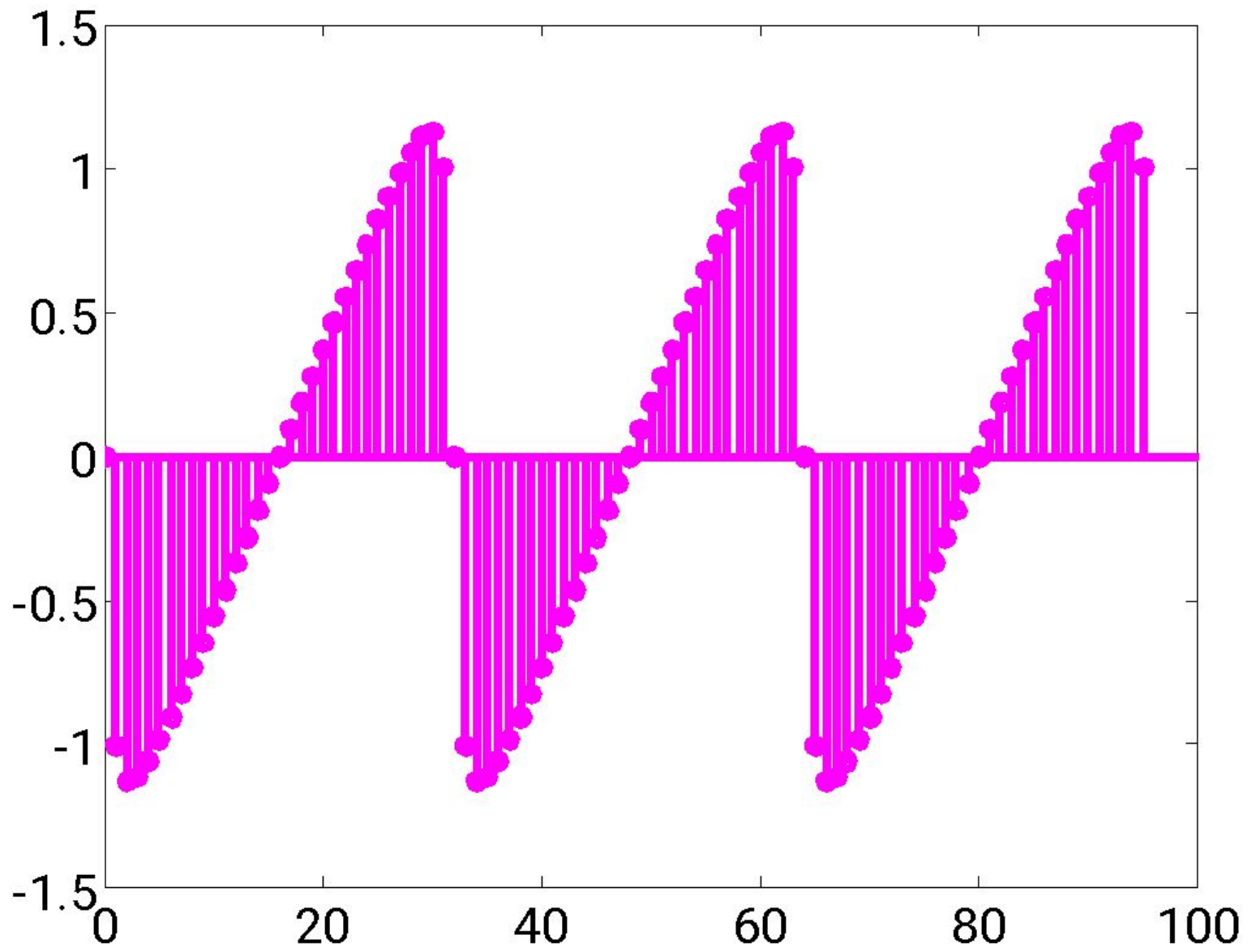
если N - четное число (в нашем случае это 32), если N - нечетное число, то такого элемента не существует.

Во-вторых, последовательность ДПФ является периодической последовательностью, с периодом равным числу N .

$$X_{n+N} = X_n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (6)$$

! Доказать самостоятельно свойство (6).





Теперь обратимся к свойствам ДПФ, рассмотренным на предыдущей лекции.

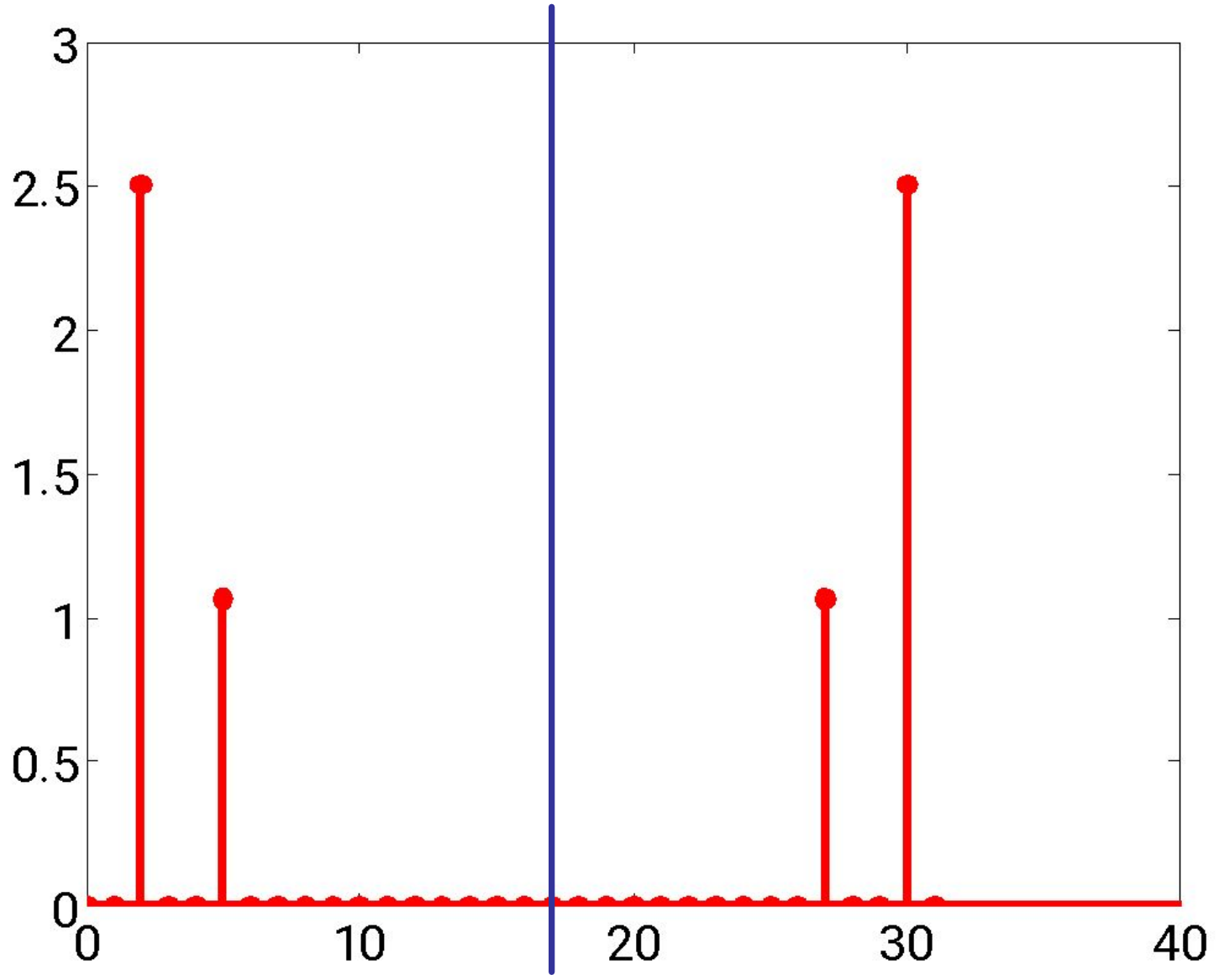
1. **Свойства симметрии.** Если **вещественный** вектор \mathbf{x} с периодом N имеет в качестве ДПФ вектор \mathbf{X} , то выполняются следующие условия симметрии.

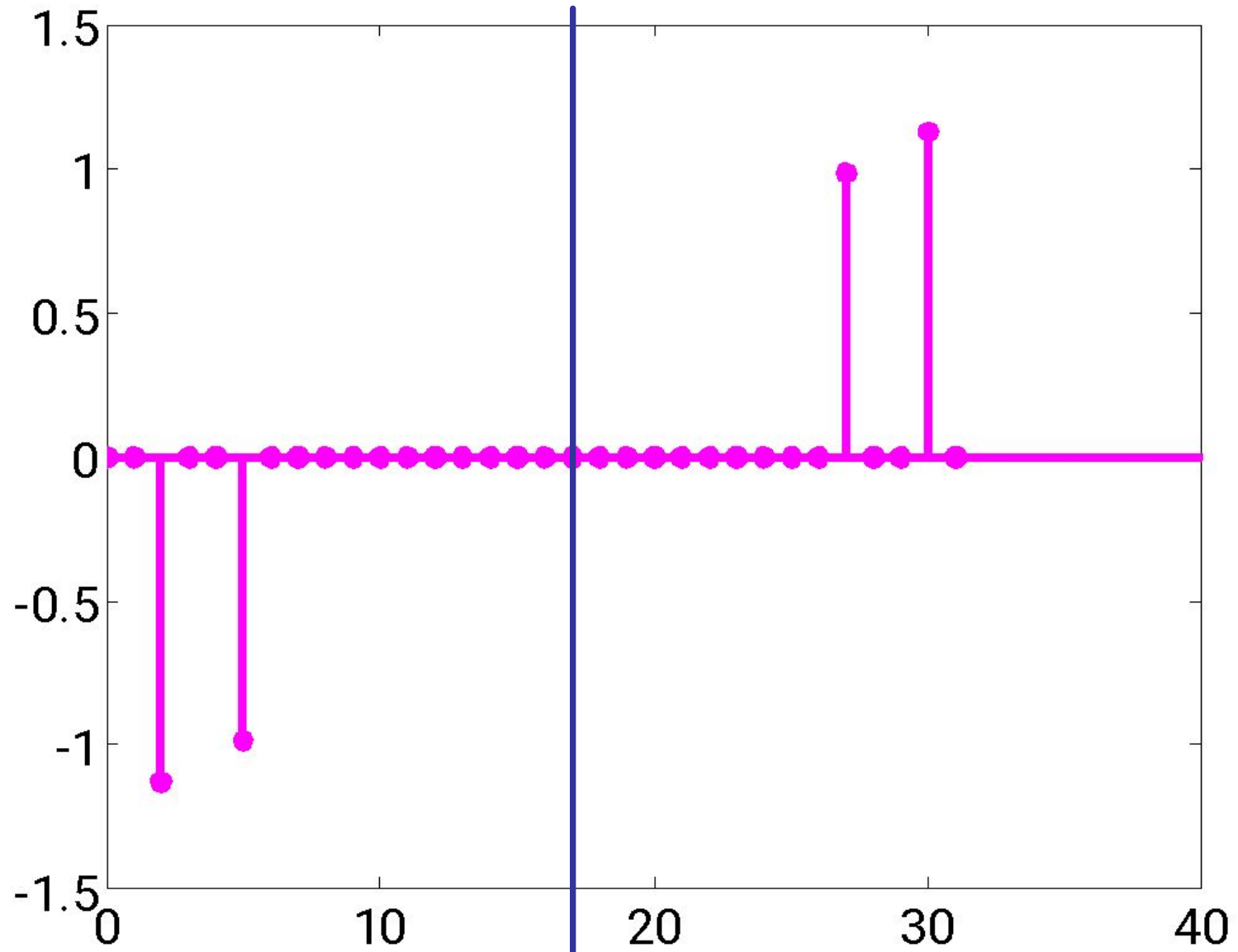
$$\text{if } \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X} \text{ then } \begin{cases} \operatorname{Re} X_n = \operatorname{Re} X_{N-n}, \\ \operatorname{Im} X_n = -\operatorname{Im} X_{N-n}, \\ |X_n| = |X_{N-n}|, \\ \arg X_n = -\arg X_{N-n} \end{cases} \quad (7)$$

Для нашего примера $N = 32$, это для модуля и аргумента будет означать следующее.

$$\begin{aligned} |X_2| &= |X_{30}|, & |X_5| &= |X_{27}|, \\ \arg X_2 &= -\arg X_{30}, & \arg X_5 &= -\arg X_{27} \end{aligned} \quad (8)$$

Это же можно увидеть на следующих рисунках.



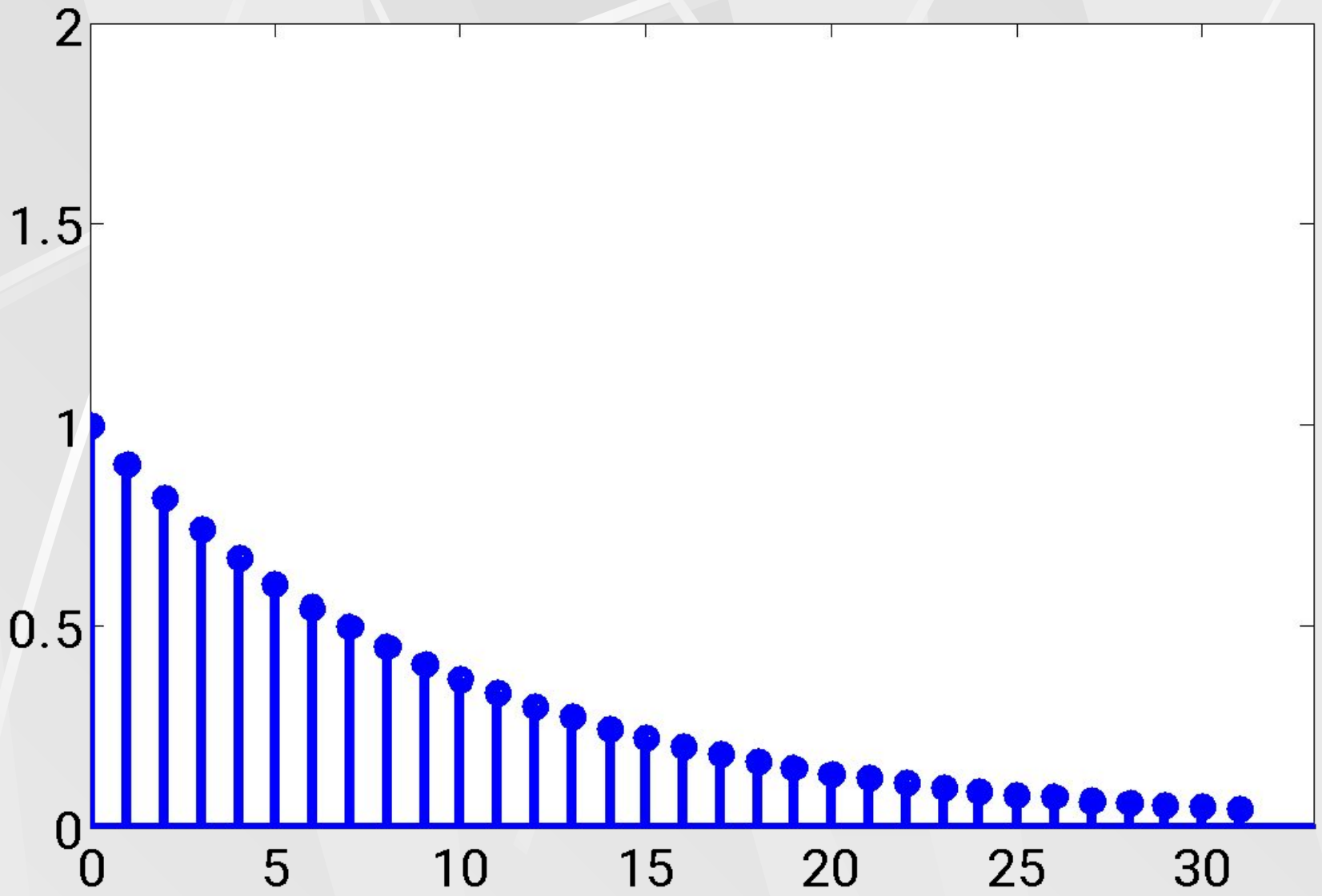


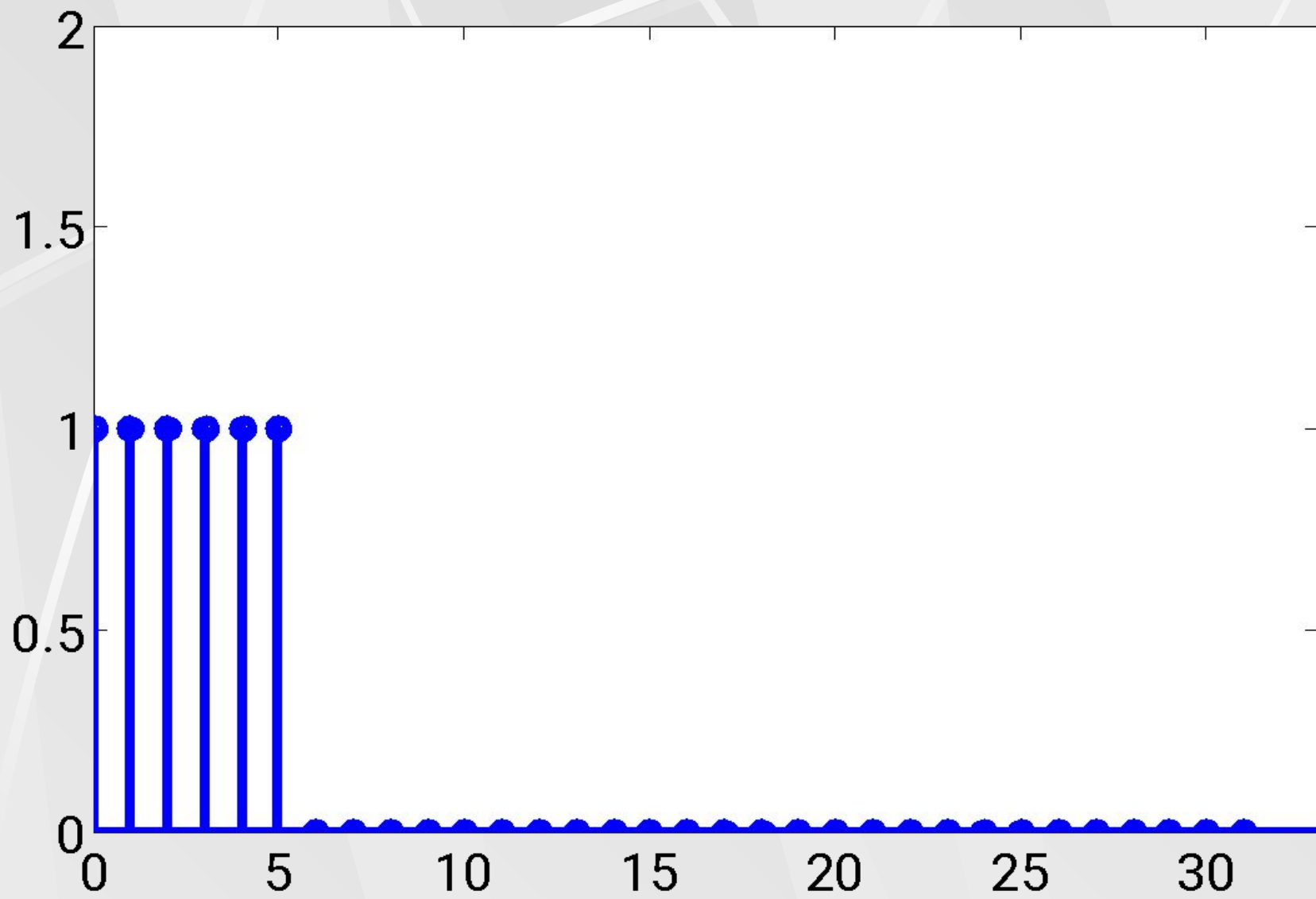
2. **Линейность**. Линейной комбинации векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ соответствует линейная комбинация ДПФ.

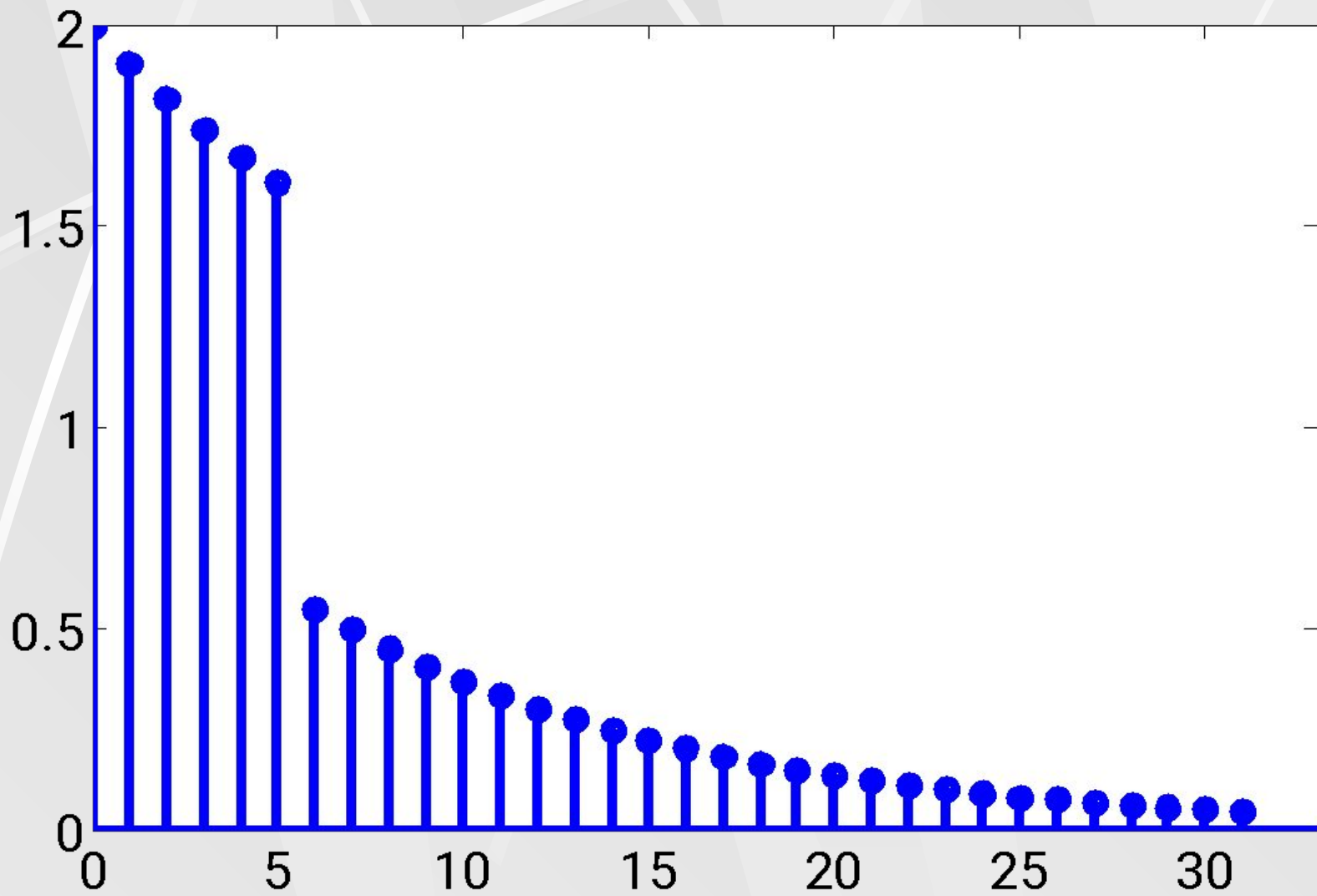
$$\begin{aligned} & \text{if} \\ & \mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{x}(t) = a \mathbf{x}_1 + b \mathbf{x}_2, \\ & \text{then} \\ & \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{X}, \\ & \text{where} \\ & \mathbf{X} = a \mathbf{X}_1 + b \mathbf{X}_2 \end{aligned} \tag{9}$$

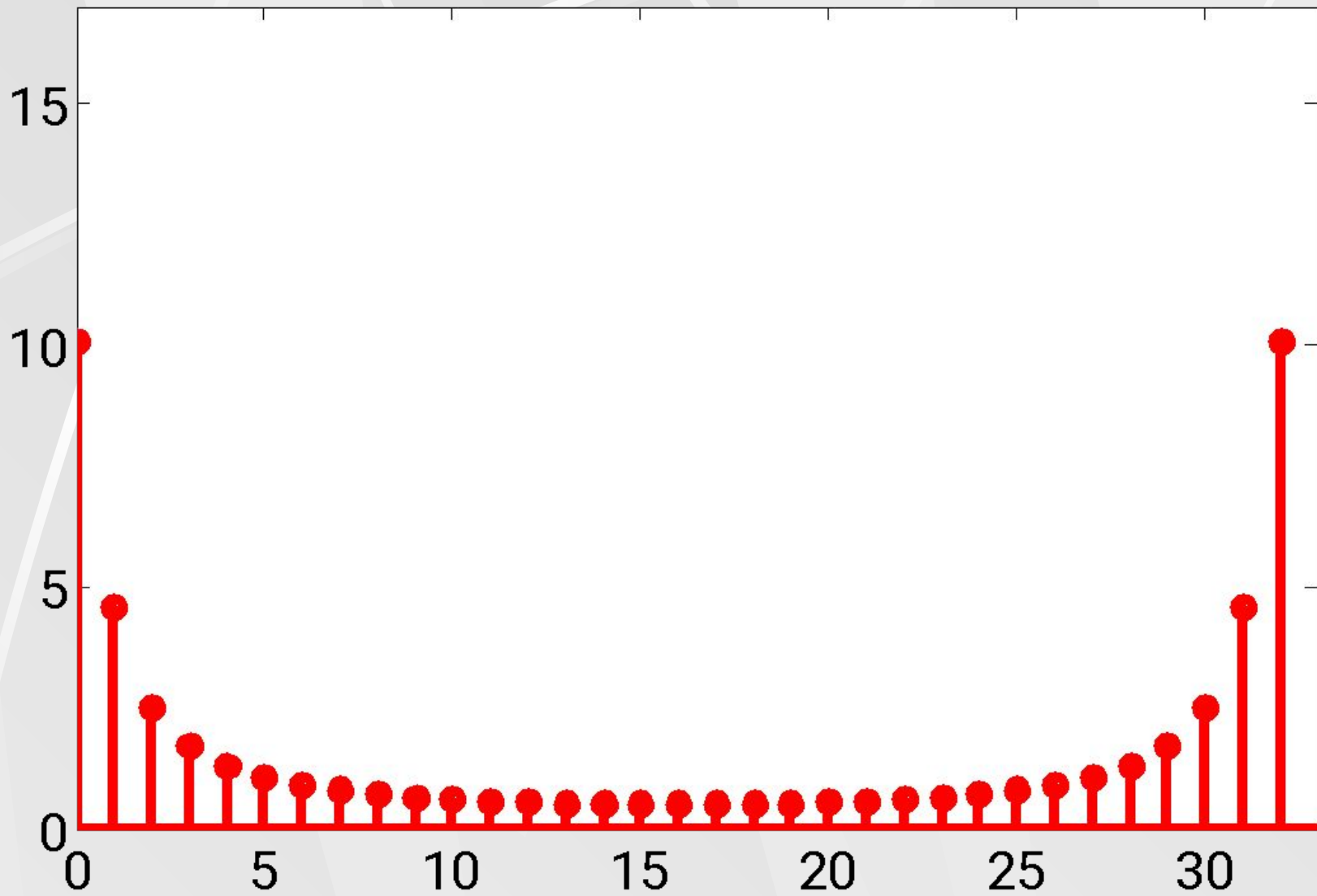
В качестве первой последовательности возьмем последовательность, рассмотренную выше (1). Вторую последовательность определим в виде единичной ступеньки.

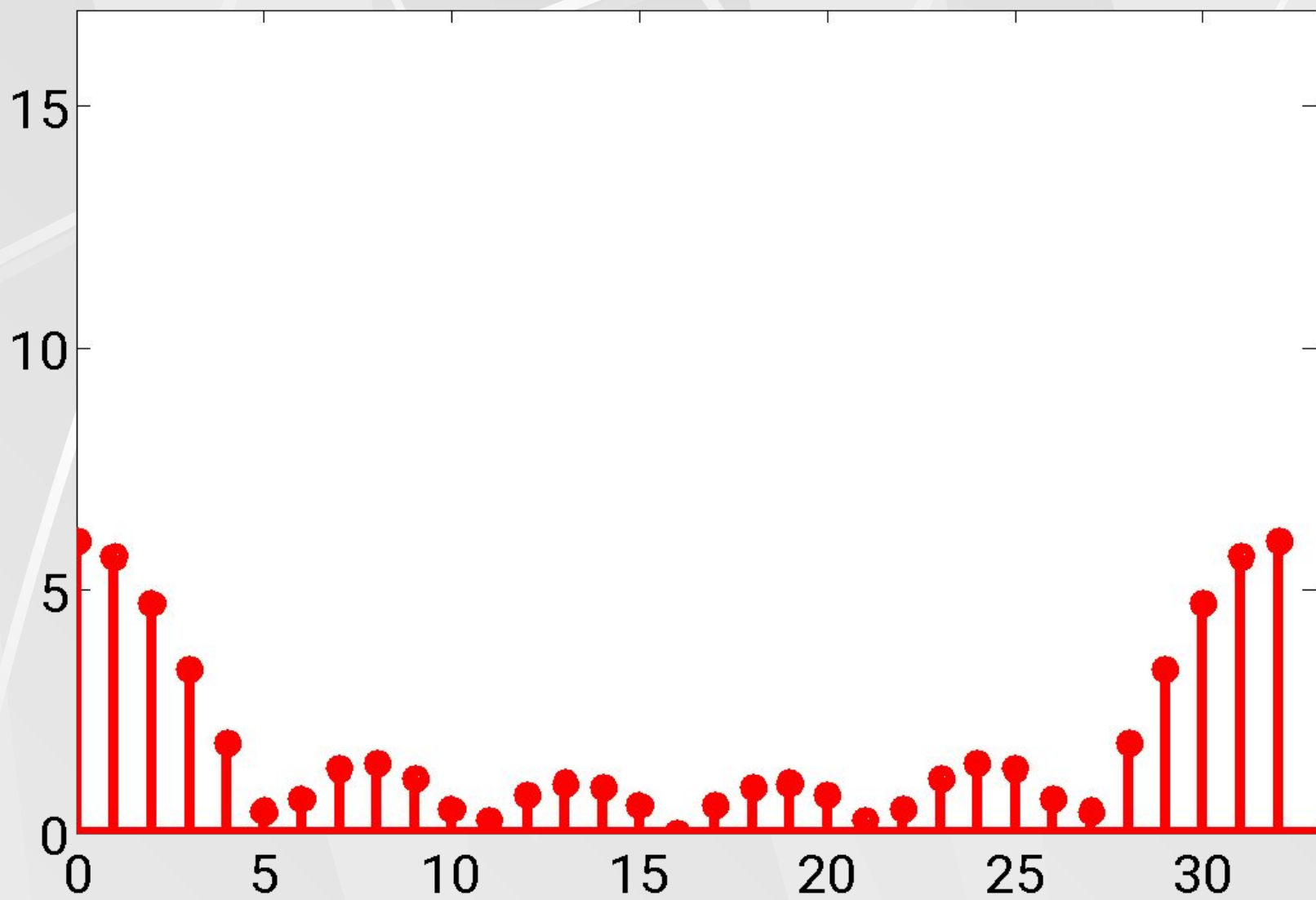
$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq n \leq 5, \\ 0, & \text{if } 6 \leq n \leq 31 \end{cases} \tag{10}$$

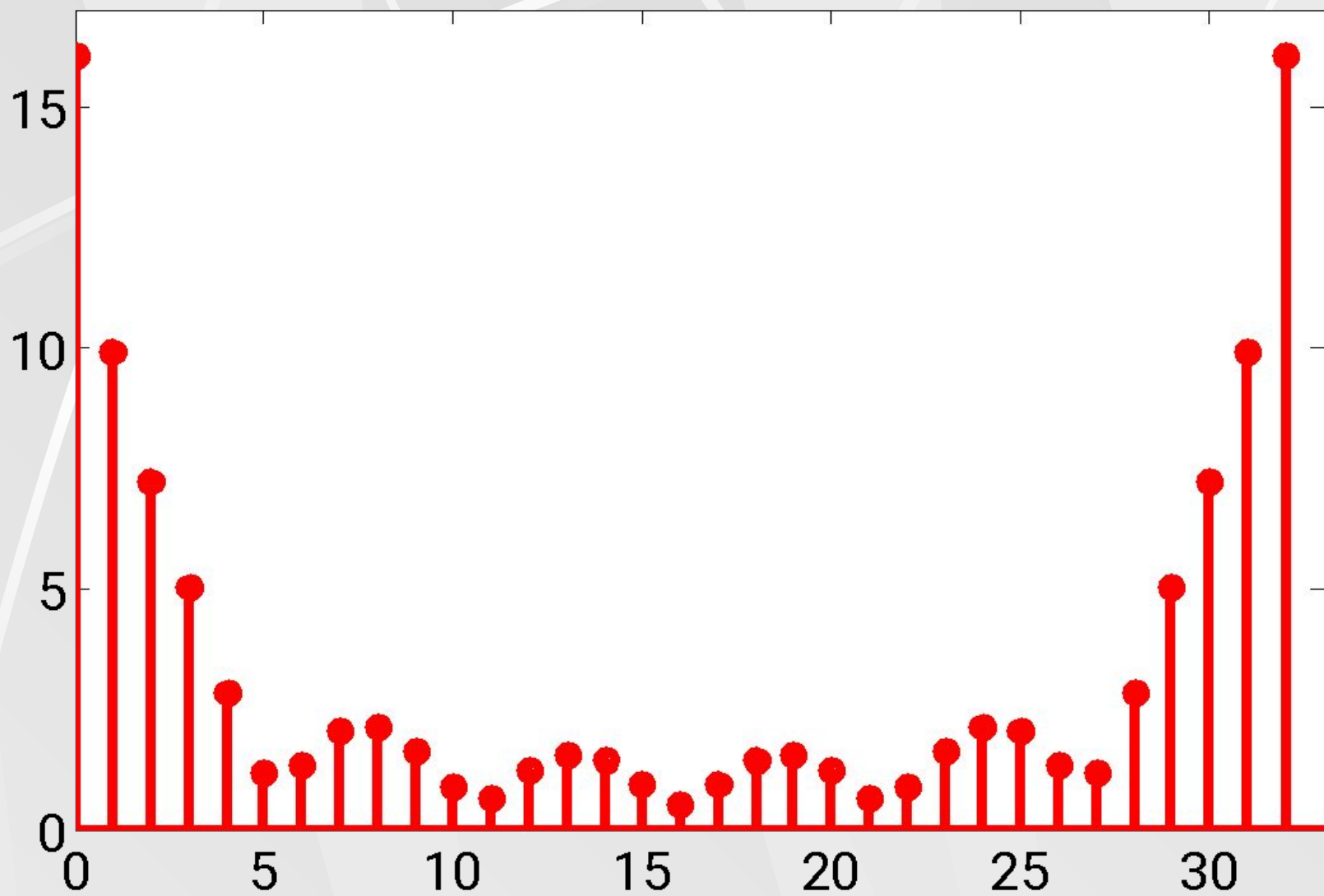












3. **Циклический сдвиг влево на m позиций.** Циклическому сдвигу влево на m позиций компонент вектора-сигнала, соответствует умножение компонент вектора-сигнала на фазовый множитель.

if

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \rightarrow \mathbf{y} = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{N-1}, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}),$$

$$\mathbf{x} \leftrightarrow X, \quad \mathbf{y} \leftrightarrow Y,$$
(11)

then

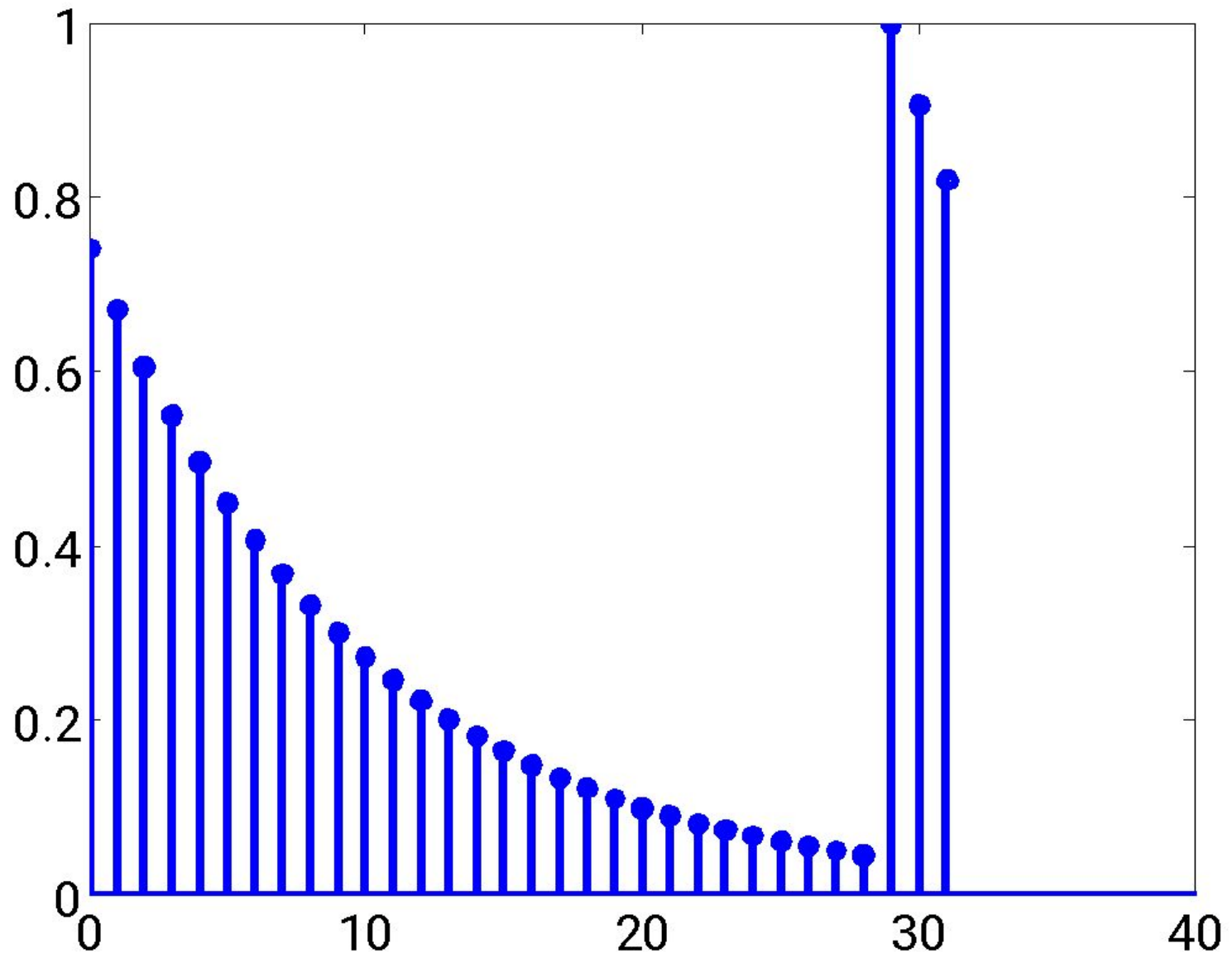
$$Y_n = e^{i \frac{2\pi}{N} nm} X_n$$

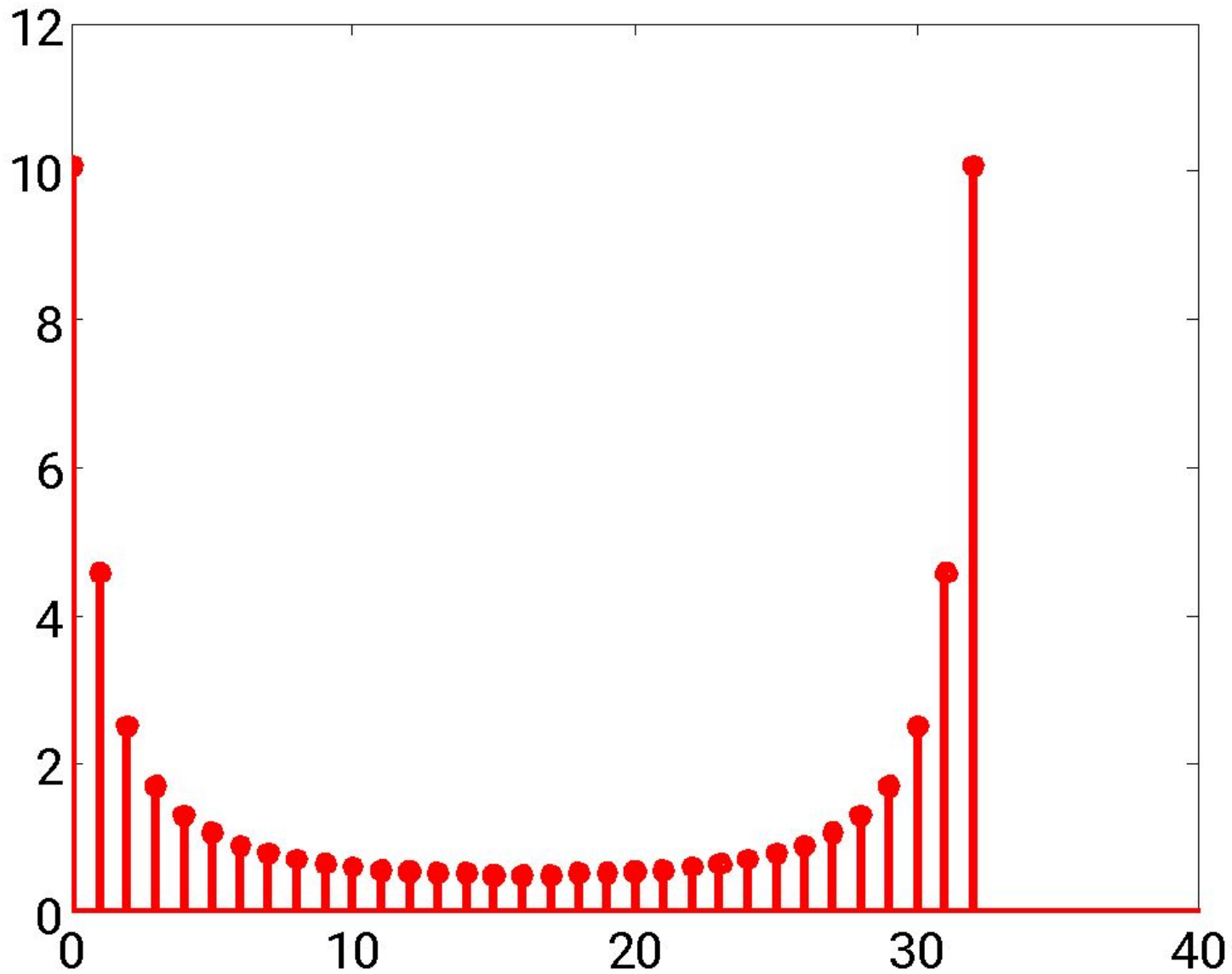
Следствие. Инвариантность амплитудного спектра относительно циклических сдвигов. При любом циклическом сдвиге амплитуда компонентов ДПФ не меняется.

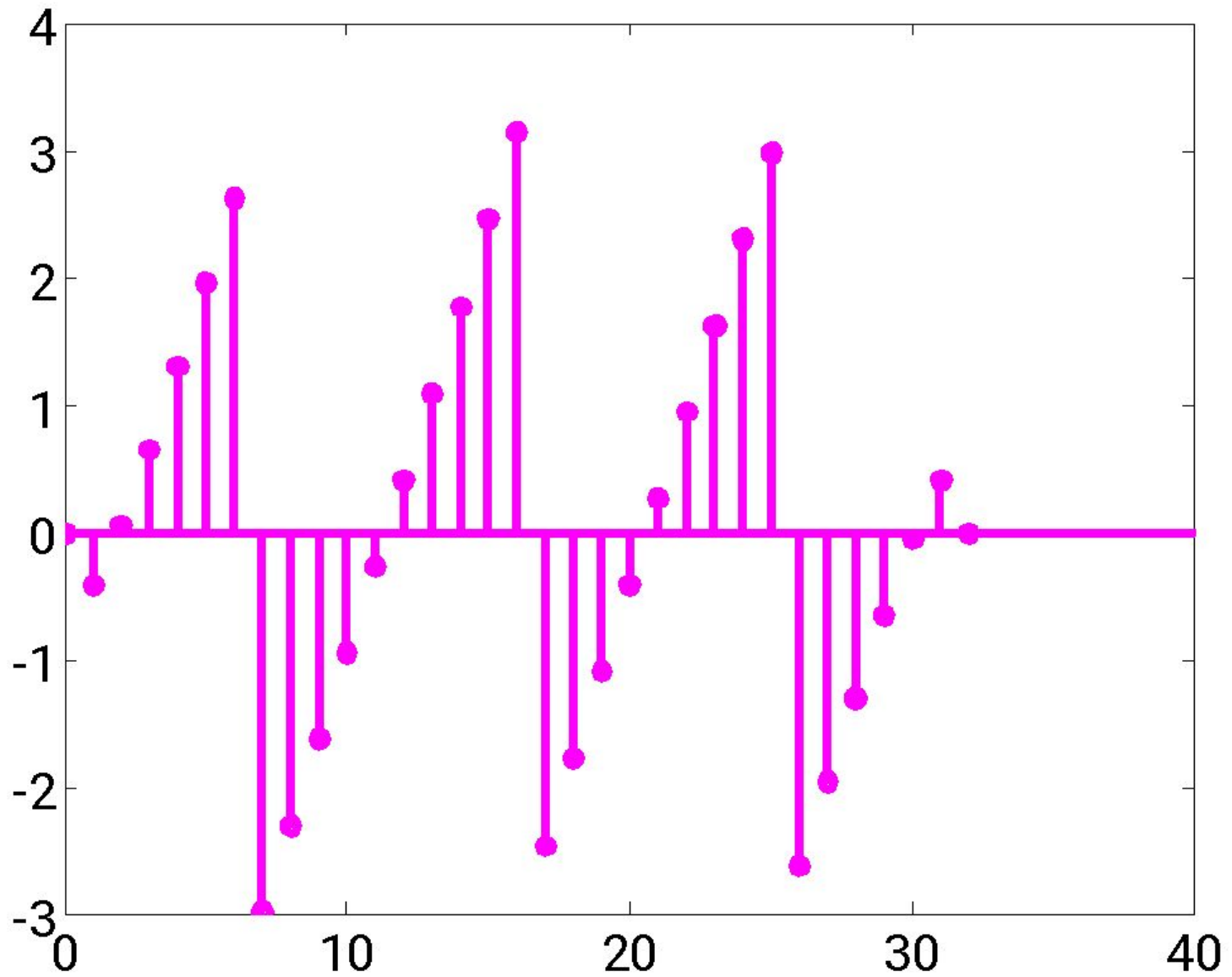
$$|Y_n| = |X_n|$$

Рассмотрим для примера, последовательность, рассмотренную выше (1) у которой компоненты убывают по экспоненциальному закону. Возьмем период равный $N = 32$ и осуществим сдвиг влево на три позиции $m = 3$.

Результат показан на следующих трех рисунках.







Определение. Под сверткой двух векторов $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ с периодом N , будем понимать вектор $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$ с периодом $2N$ вдвое большим. Компоненты вектора-сверки определяются следующими формулами.

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n b_{k-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{k-n} b_n, \quad k = 0, \dots, 2N-1 \quad (12)$$

Здесь предполагается, что компоненты векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} равны нулю для следующих значений индексов.

$$a_m = b_m = 0, \quad \text{if } m < 0 \quad \text{or} \quad m > N-1 \quad (13)$$

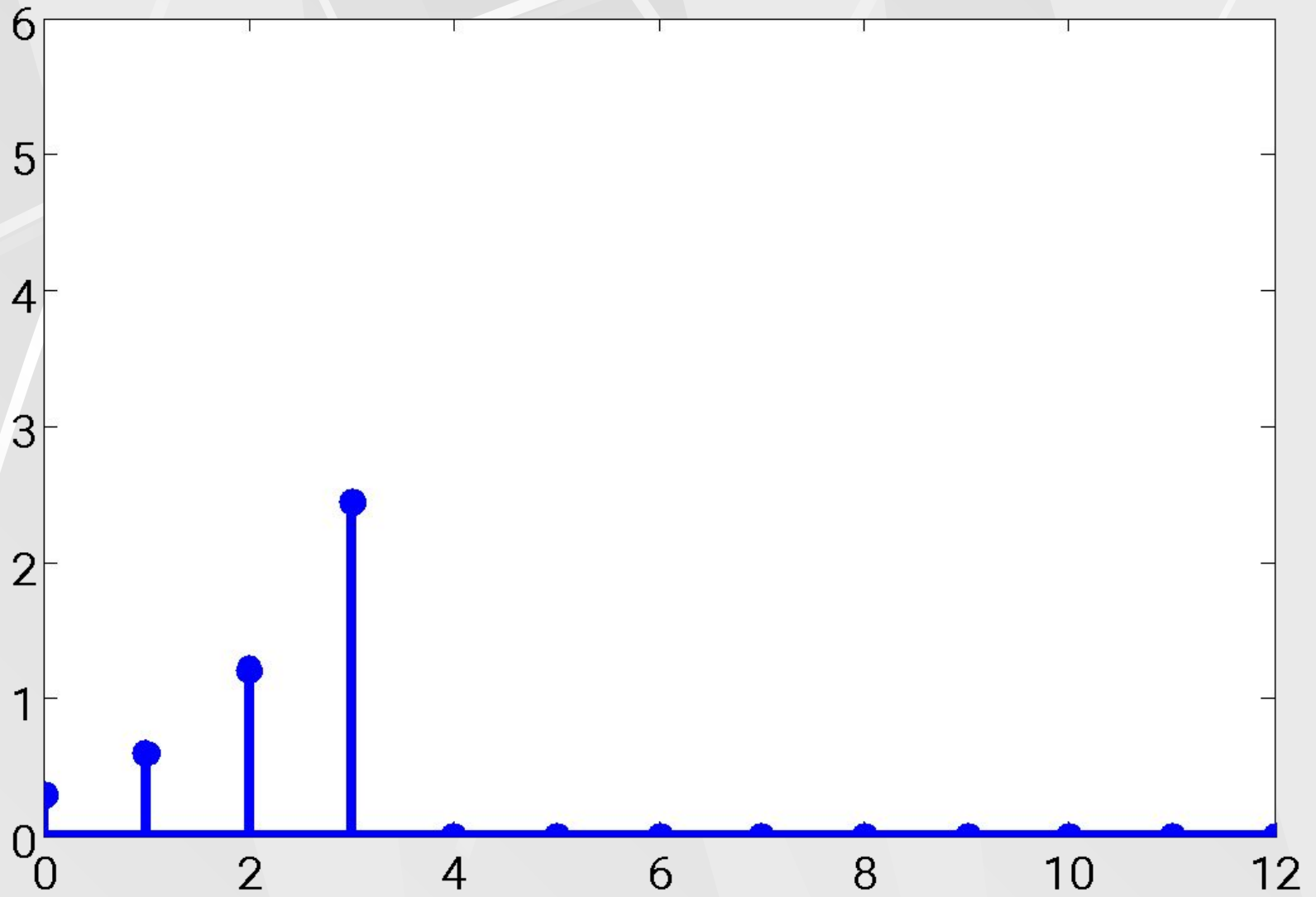
Обратим внимание на следующие свойства свертки.

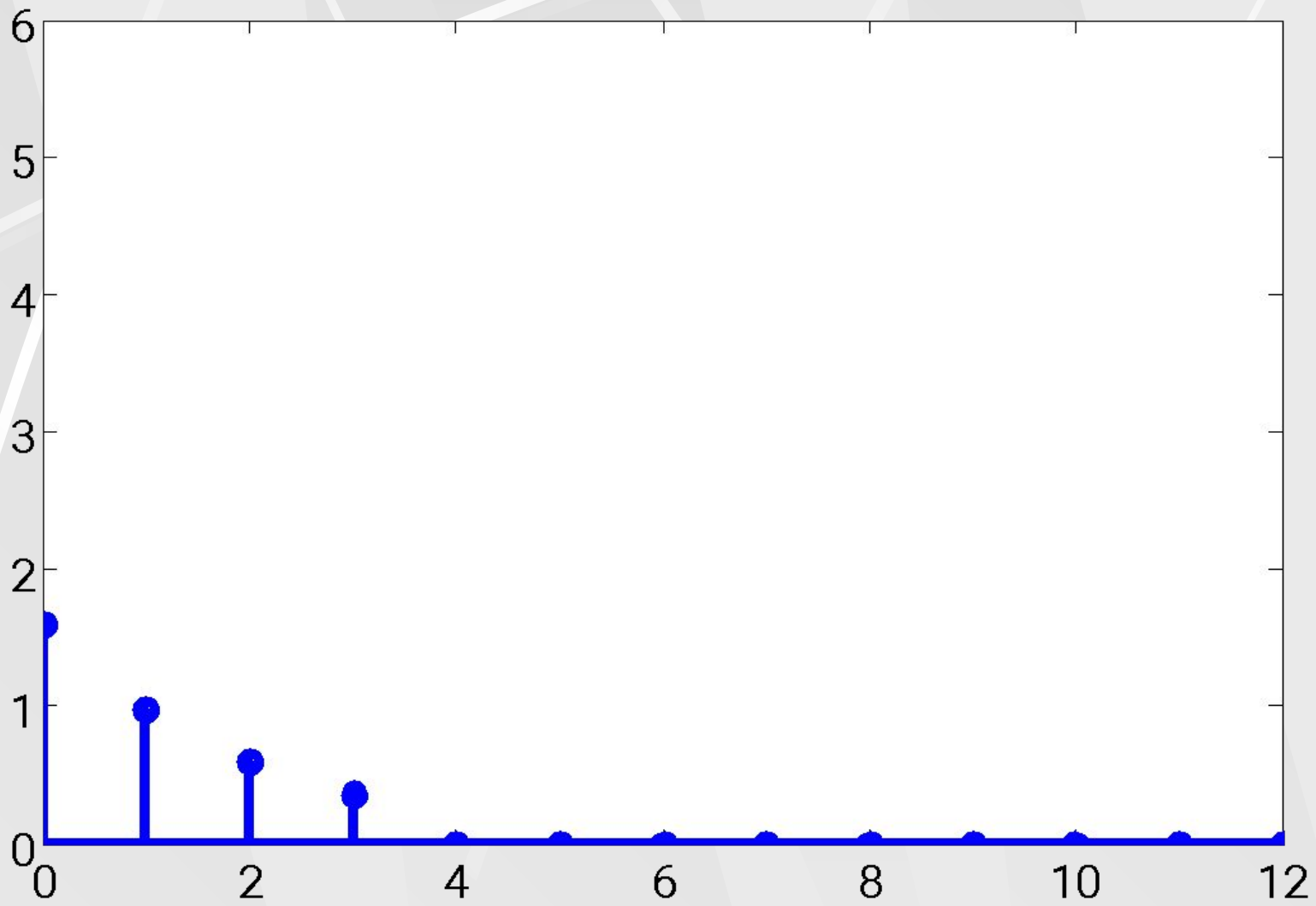
Первое, если периоды векторов **a** и **b** одинаковые и равны N , то период свертки будет в два раза больше $2N$. На рисунках рассматриваются вектора с периодом $N = 4$.

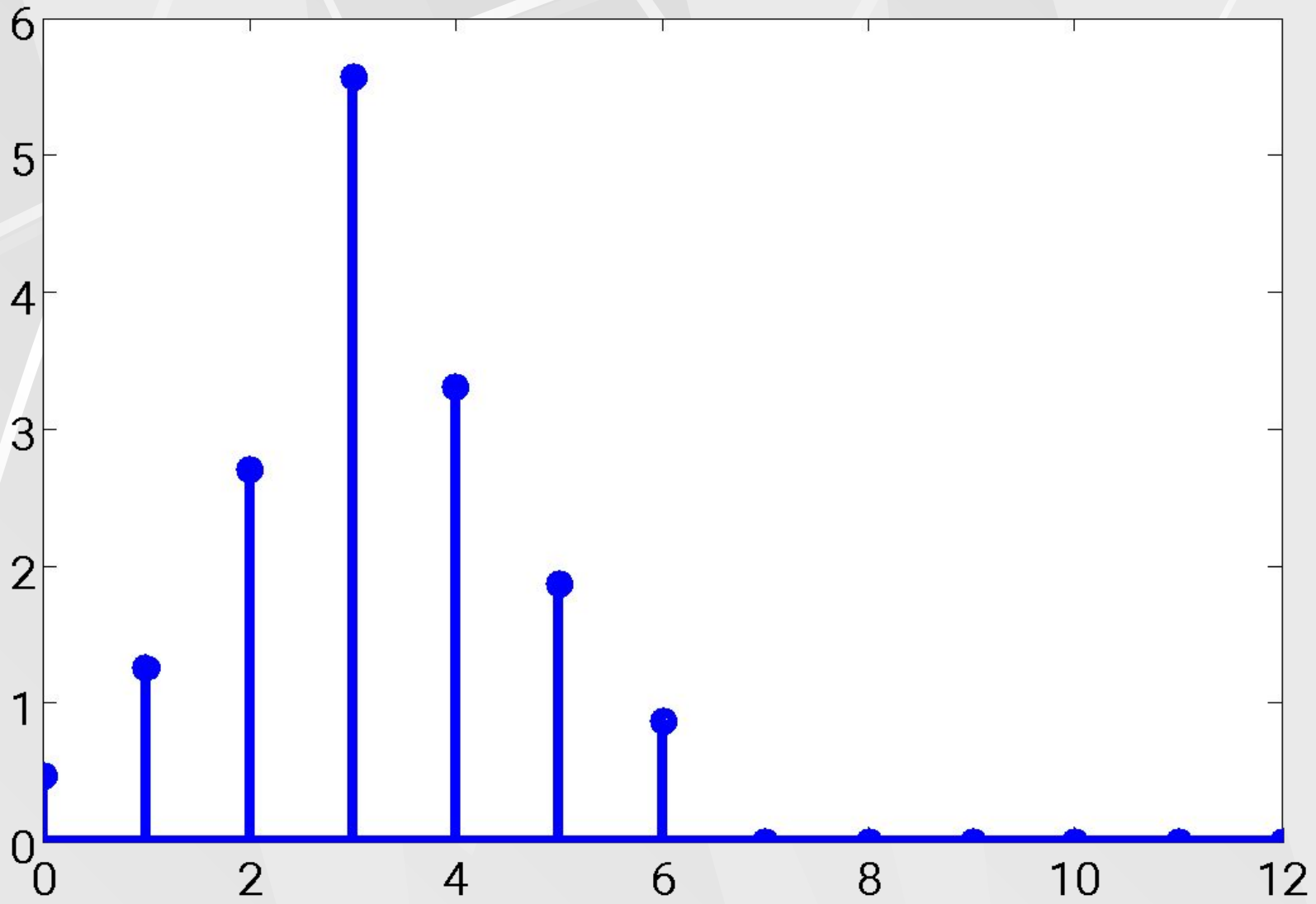
Второе, как легко показать из формул (12), (13) последняя компонента свертки всегда равна нулю.

$$c_{2N-1} = 0 \quad (14)$$

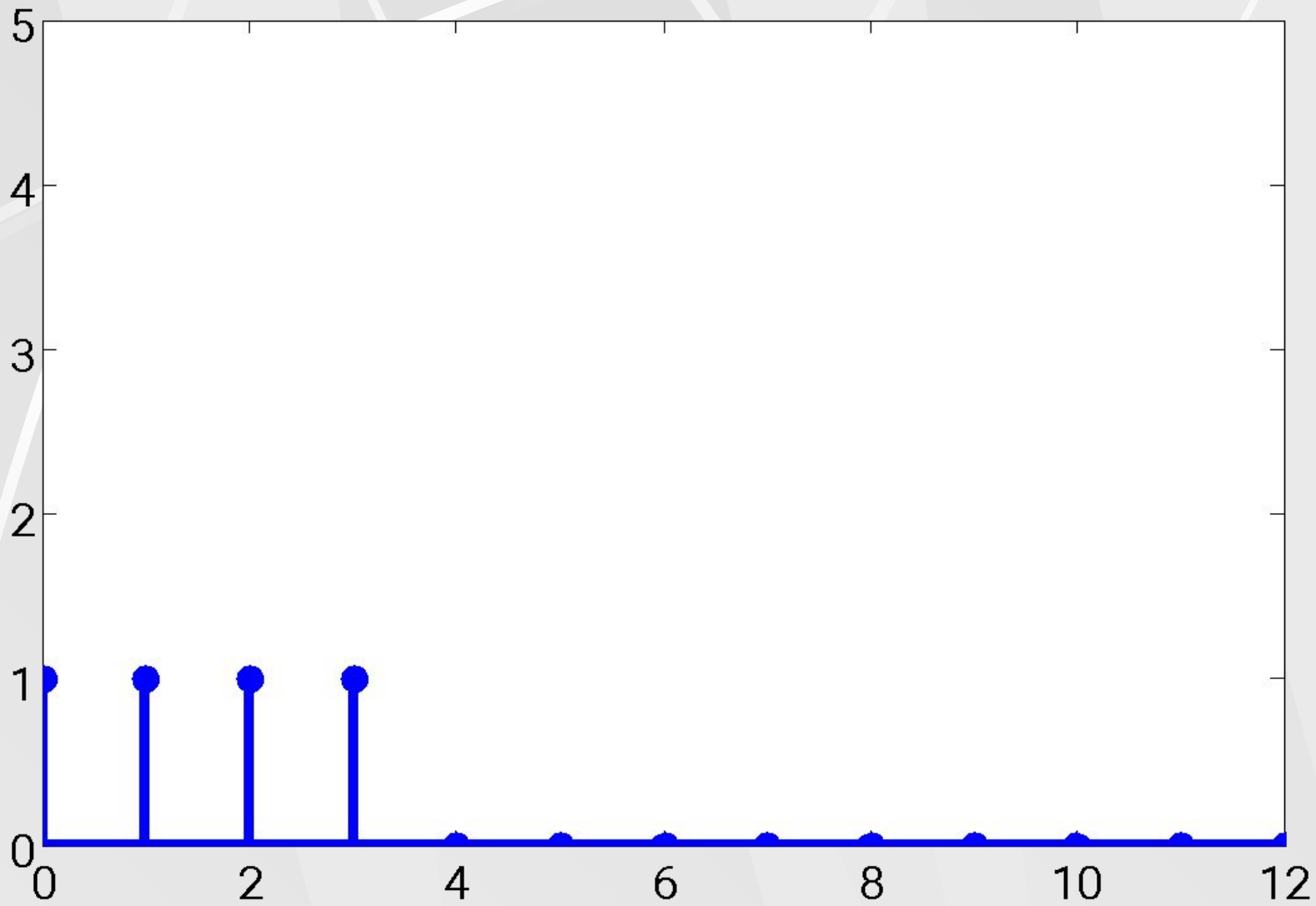
! Доказать самостоятельно свойство (14)

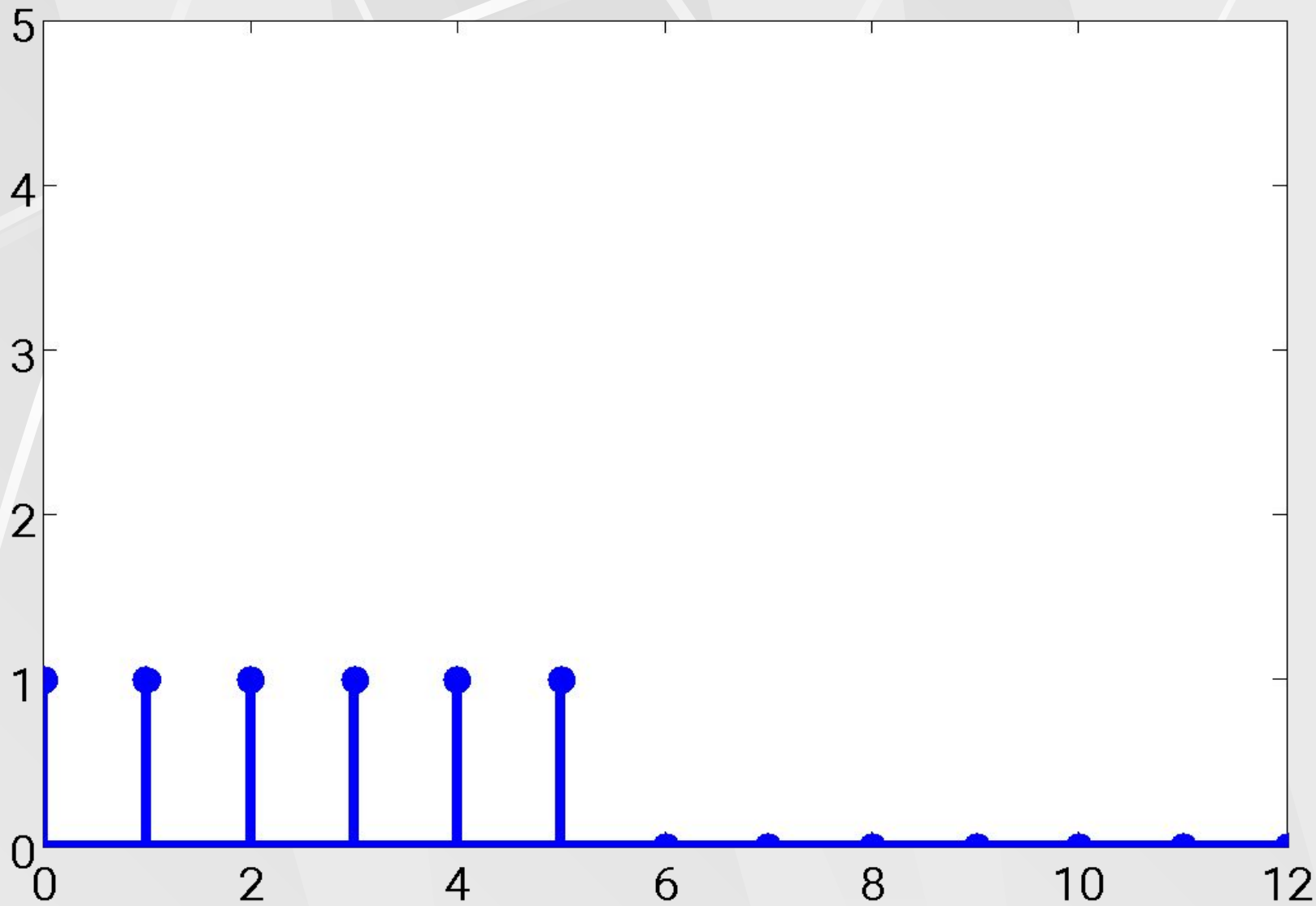


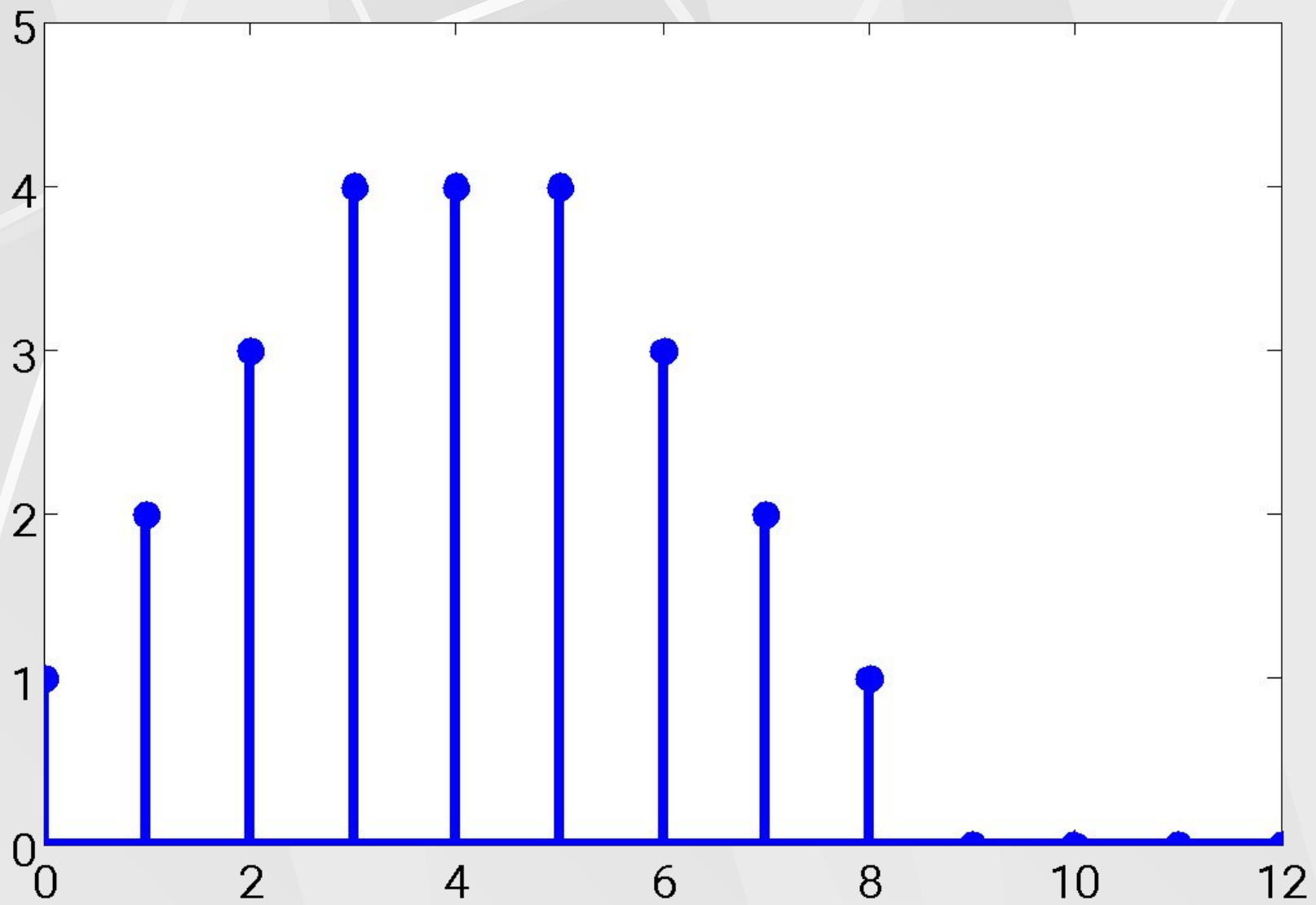




Третье, если периоды векторов **a** и **b** разные и равны N_1 и N_2 , то период свертки будет $N_1 + N_2$ равен. В этом случае в формуле свертки (12) в качестве периода N надо взять максимальный из двух периодов. На рисунках рассматриваются вектора с периодами $N_1 = 4$ и $N_2 = 6$.







Свойство ДПФ свертки векторов. Вектор являющийся сверткой двух других векторов имеет ДПФ равный произведению ДПФ исходных векторов.

if

$$\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{A}, \quad \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{B}, \quad c_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n b_{k-n},$$

then

$$\mathbf{c} \leftrightarrow \mathbf{C},$$

where

$$C_k = A_k B_k$$

(28)

Важное замечание!! В этом свойстве векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} дополняются нулями, чтобы они имели период $2N$.

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_N), \quad \mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_N) \quad (29)$$

Поэтому ДПФ (2) для всех трех векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} строится не по периоду N , а по периоду $2N$.

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \sum_{n=0}^{2N-1} a_n e^{-i \frac{2\pi}{2N} k n} \\ B_k &= \sum_{n=0}^{2N-1} b_n e^{-i \frac{2\pi}{2N} k n} \\ C_k &= \sum_{n=0}^{2N-1} c_n e^{-i \frac{2\pi}{2N} k n} \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (30)$$

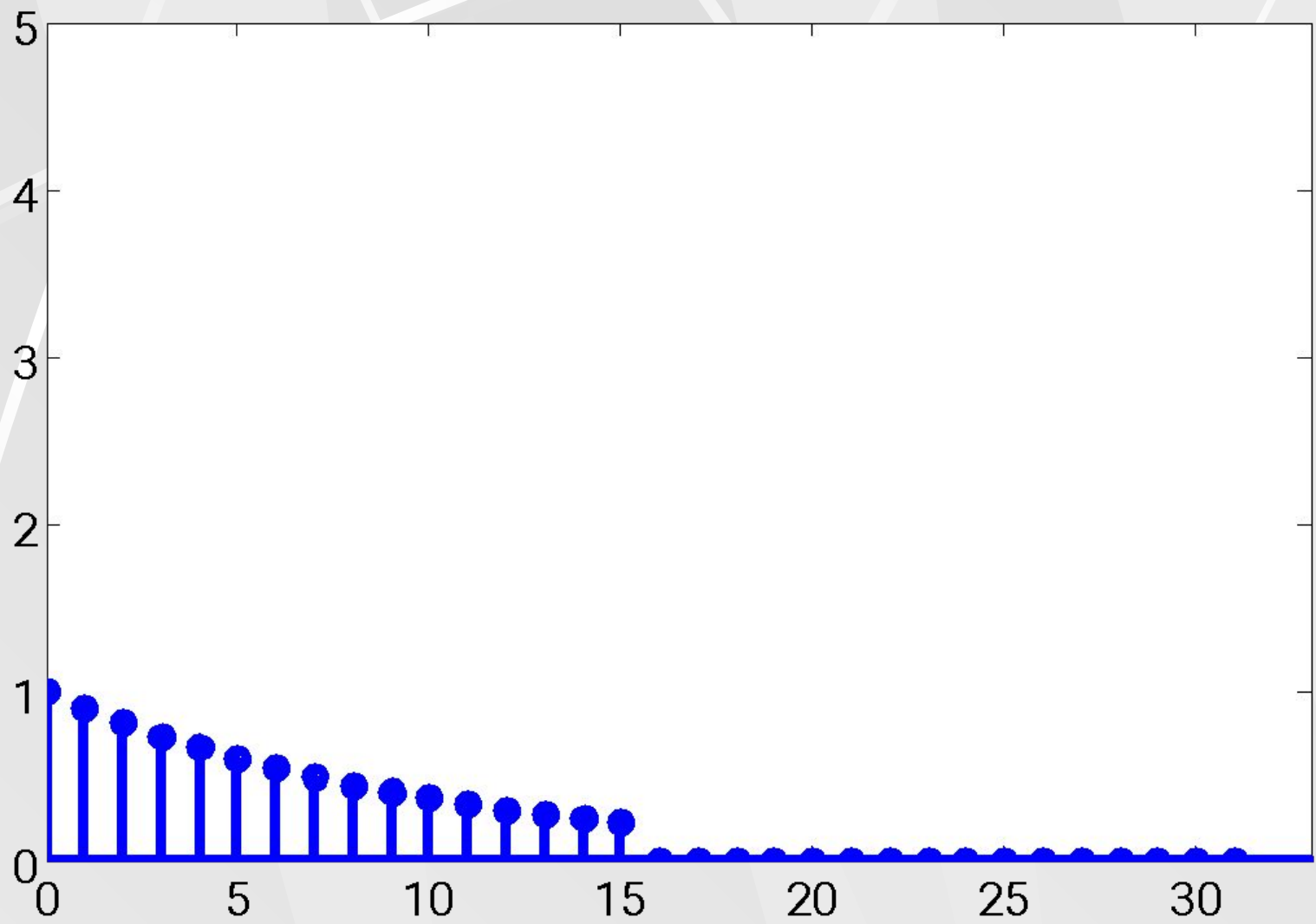
Возьмем два вектора с периодом $N = 16$. Пусть первый вектор имеет компоненты, убывающие по экспоненциальному закону.

$$a_n = e^{-0.1n}, \quad n = 0, 1, \dots, 15 \quad (31)$$

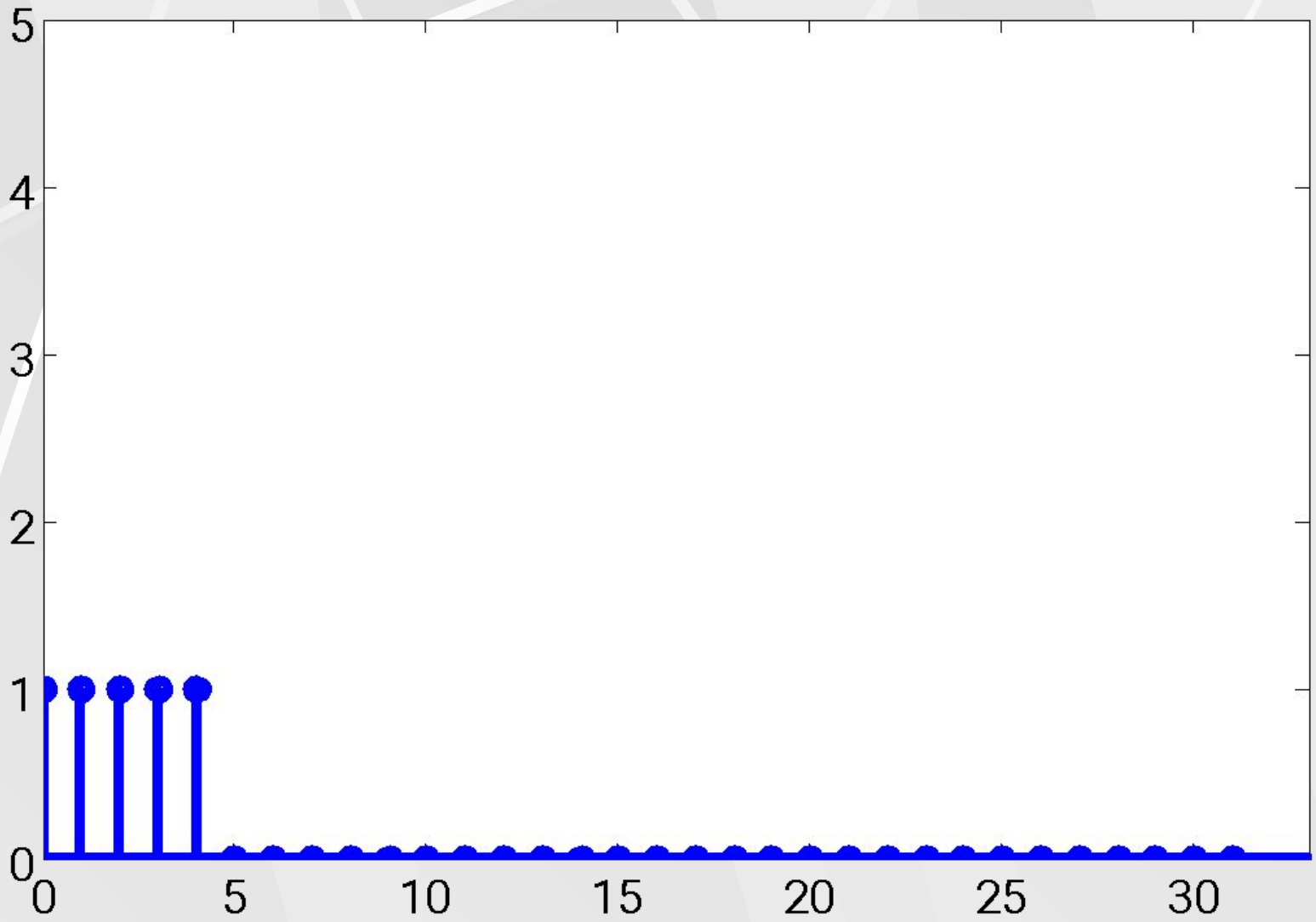
Пусть компоненты второго вектора имеют вид единичной ступеньки.

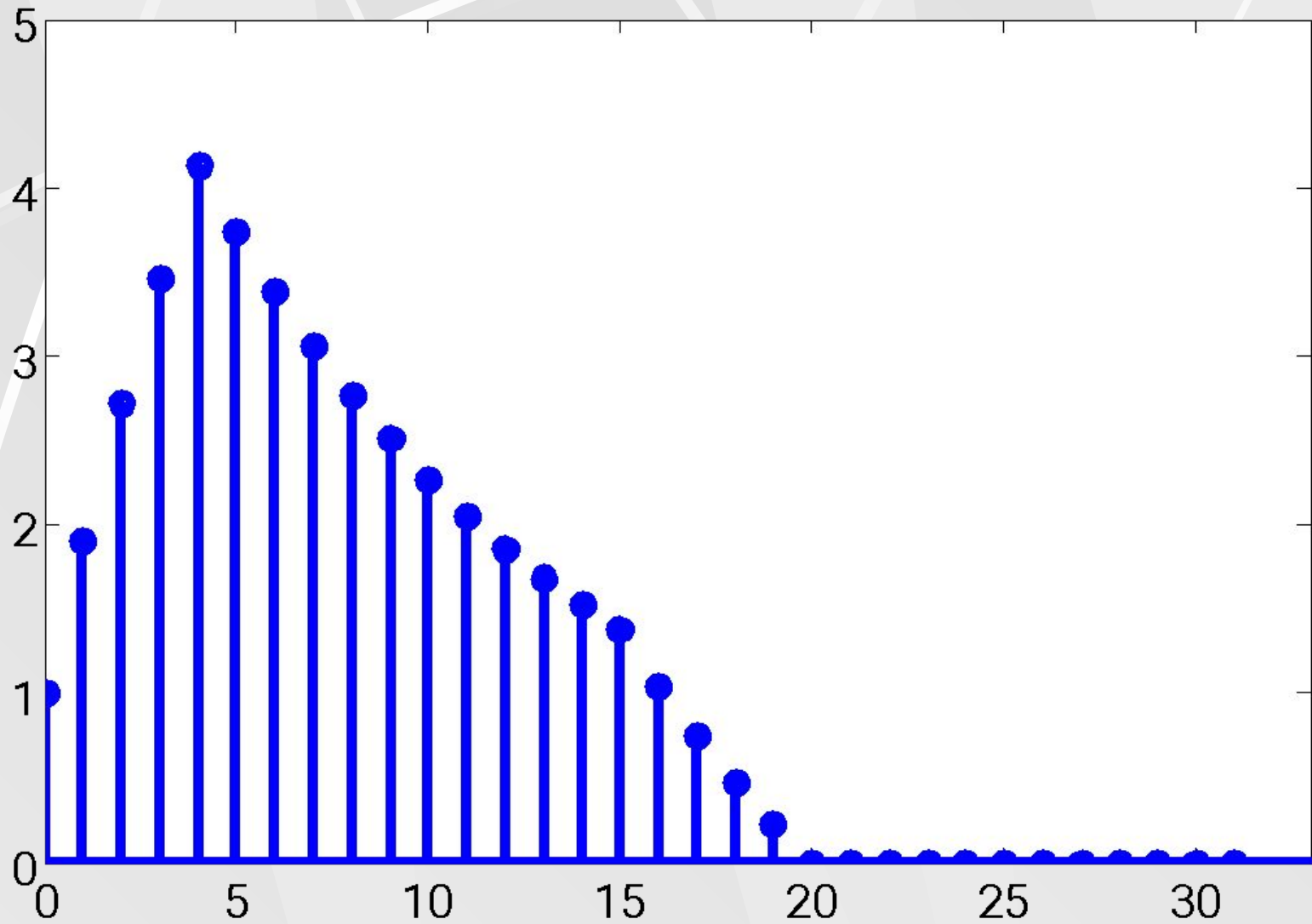
$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{if } 5 \leq n \leq 15 \end{cases} \quad (32)$$

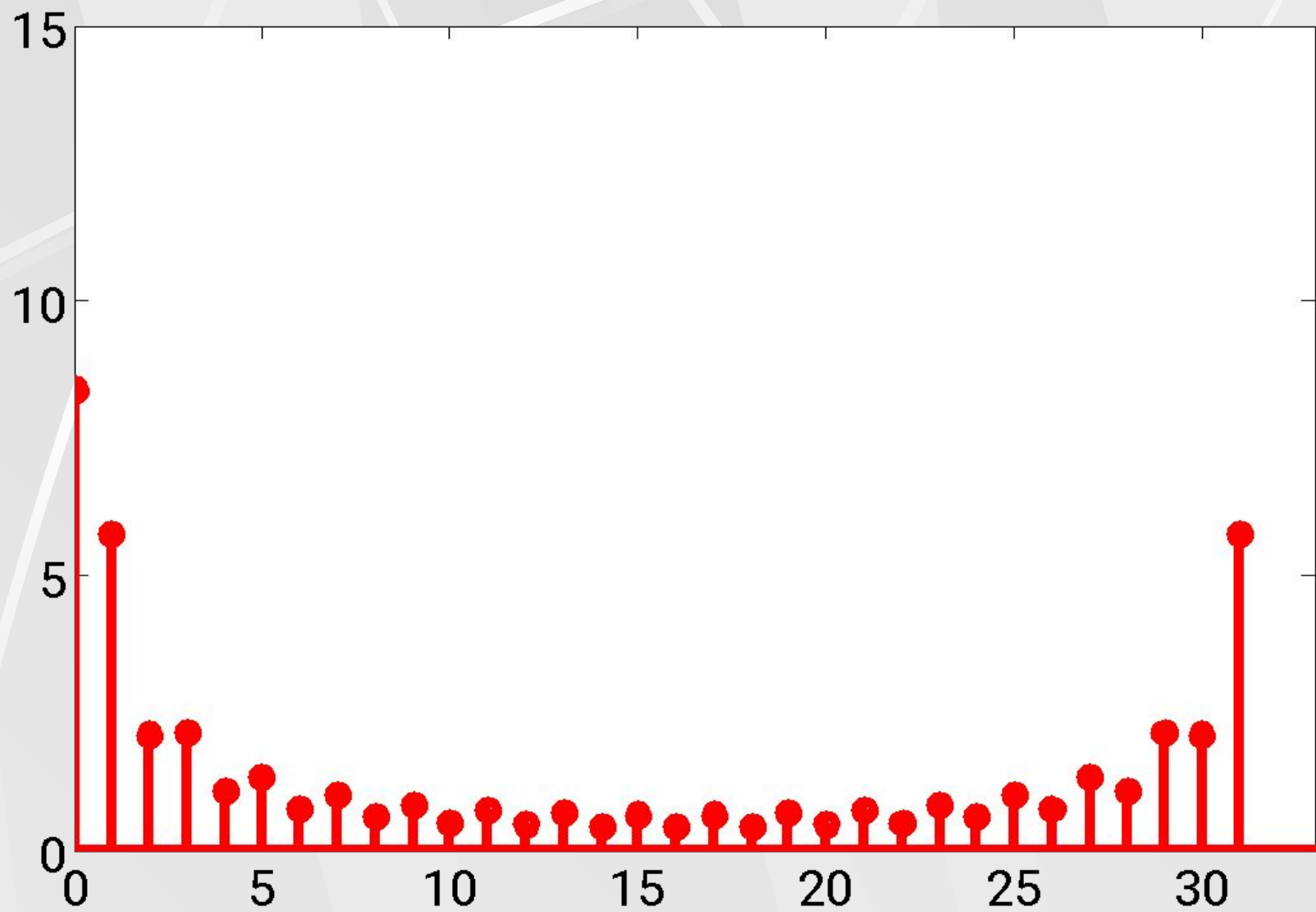
Эти два вектора дополняем нулями до векторов с периодом $2N = 32$. На рисунках показаны эти векторы и вектор свертки.

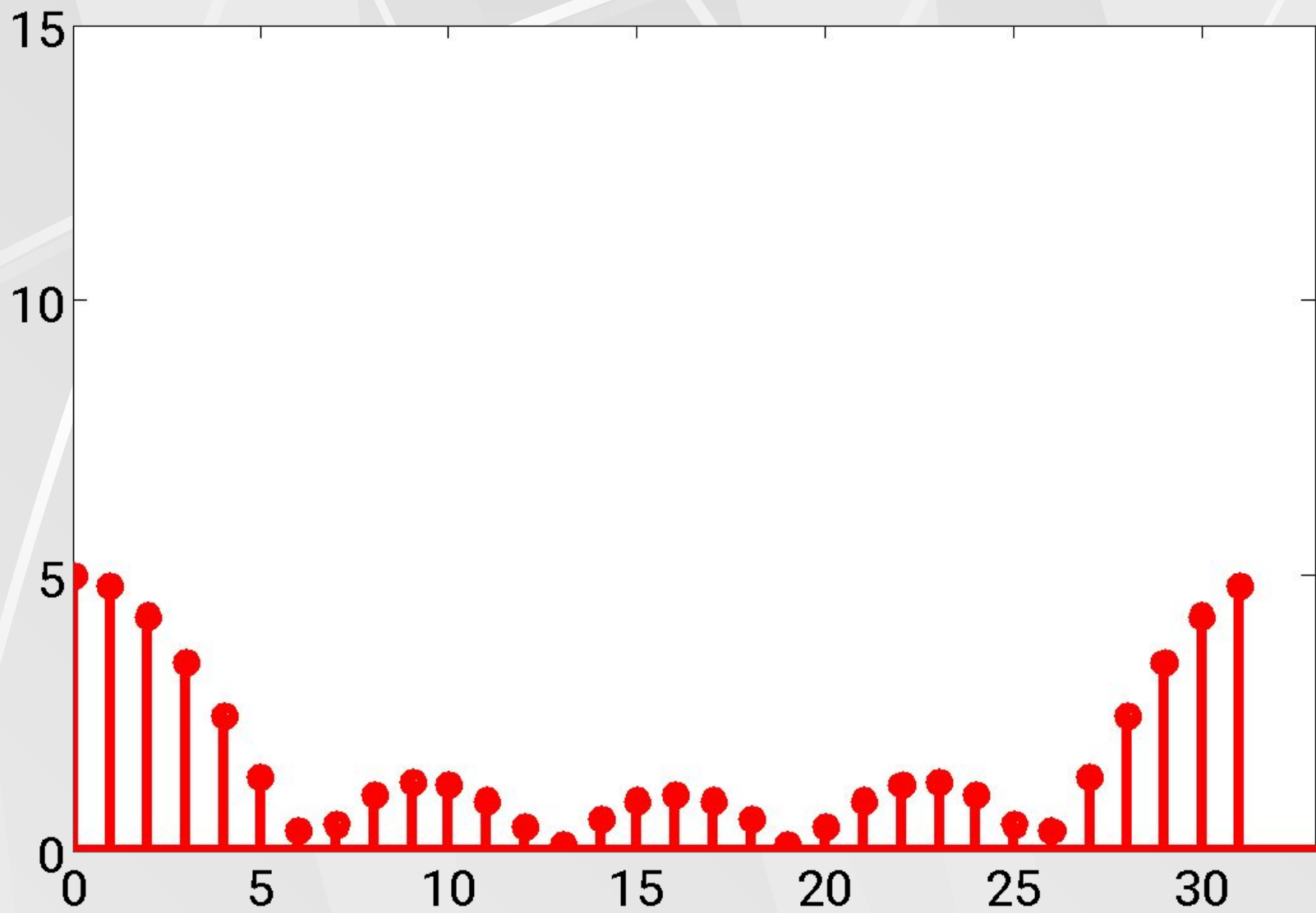


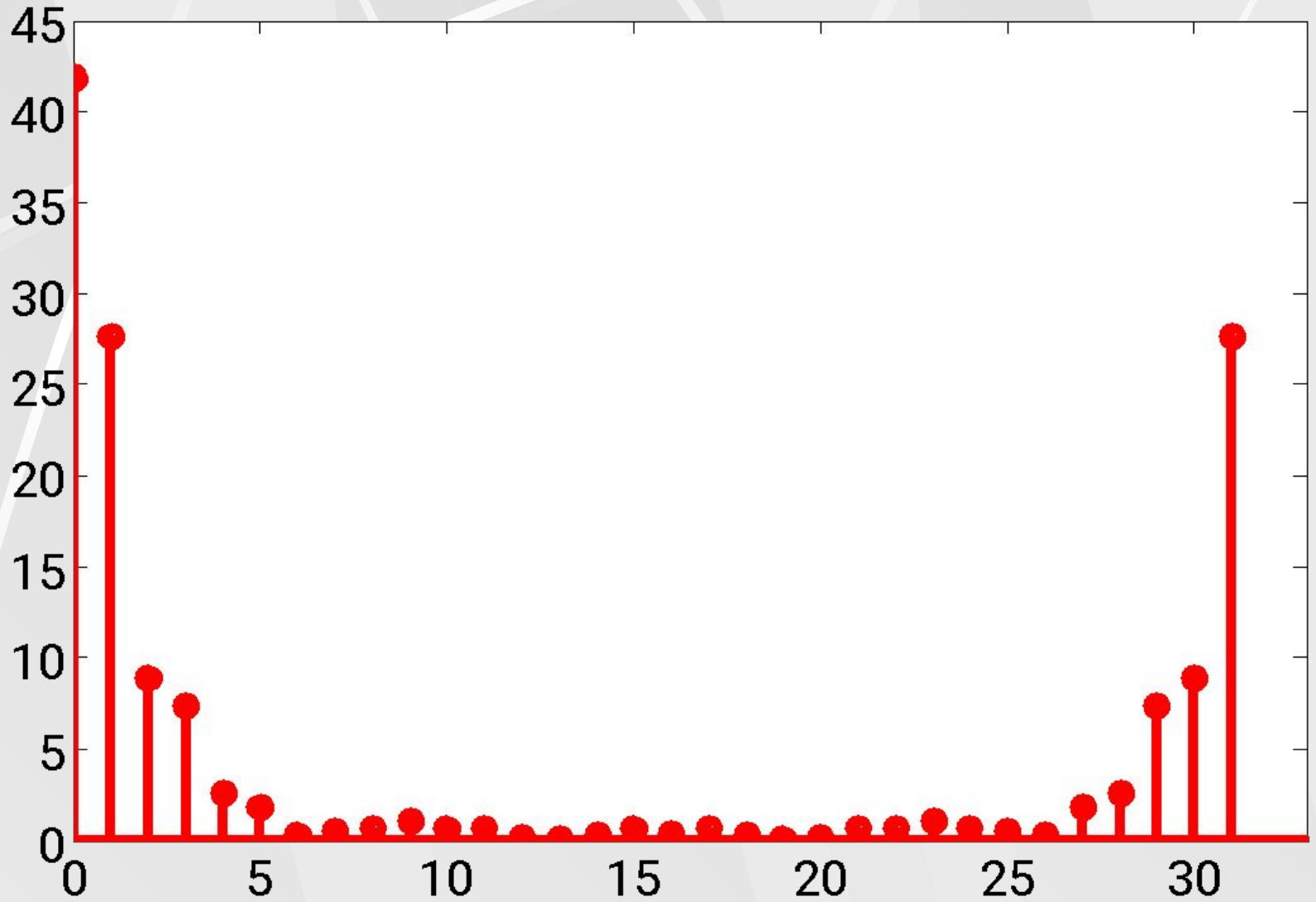
40



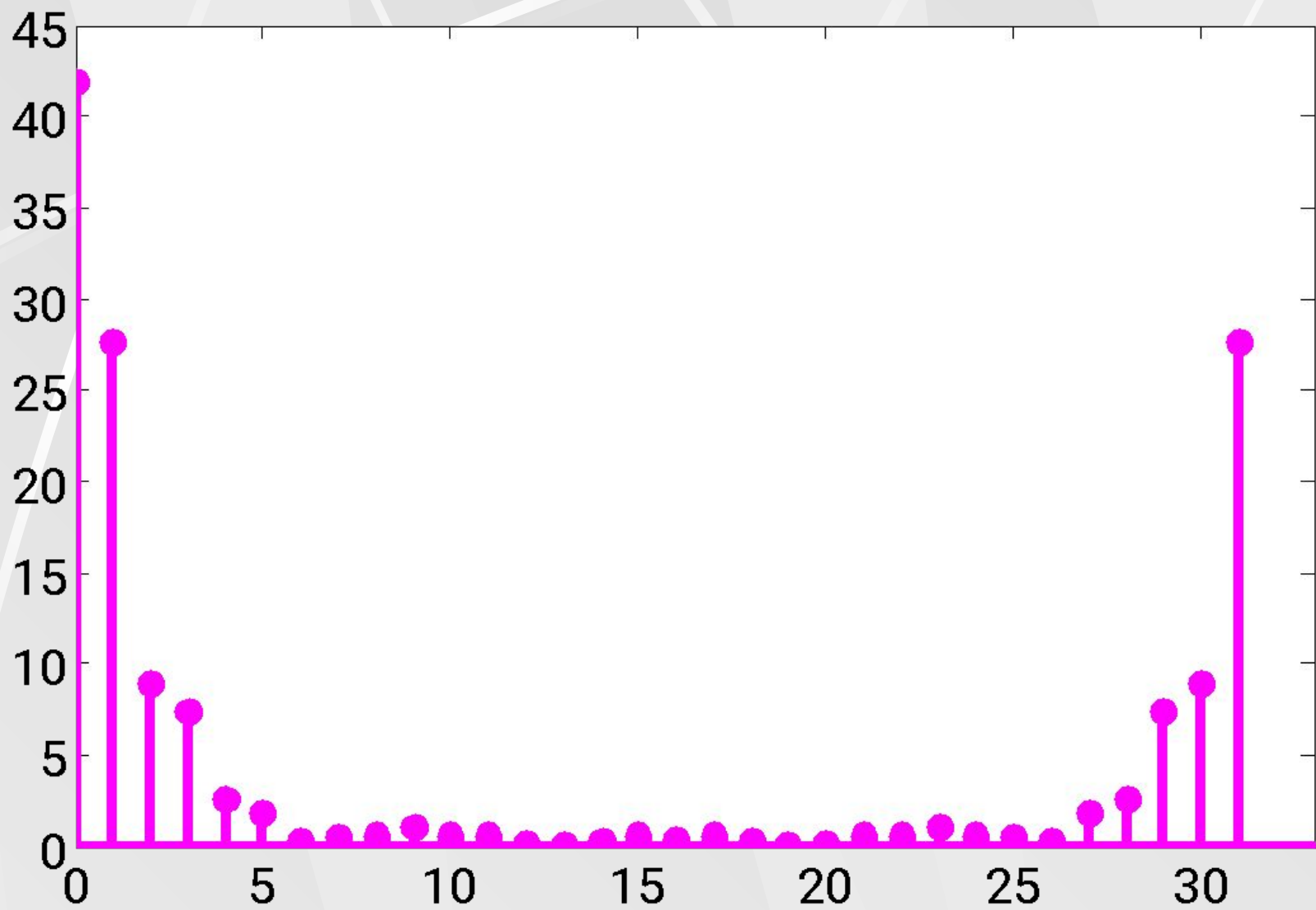








45



Дискретное преобразование Фурье и пакет MATLAB

В пакете MATLAB имеются средства для вычисления дискретного преобразования Фурье. Преобразование ДПФ, например, выполняет функция `fft(x)`. Вызов этой функции осуществляется следующим образом.

```
X = fft(x);
```

Обратное дискретное преобразование Фурье ОДПФ, выполняет функция `ifft(X)`. Вызов этой функции осуществляется следующим образом.

`x = ifft(X);`

При использовании ДПФ в пакете MATLAB надо обратить внимание на следующее обстоятельство. Указанные функции производят вычисления по формулам, которые немного отличаются от классических формул (33).

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Эти формулы в пакете MATLAB выглядят следующим образом.

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{n=1}^N x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} (k-1)(n-1)}, & k &= 1, \dots, N \\
 x_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k e^{i \frac{2\pi}{N} (k-1)(n-1)}, & n &= 1, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Отличие этих формул связано с тем, что нумерация компонентов векторов в пакете MATLAB начинается с единицы, а не с нуля. Этот момент надо учитывать при программировании. Так, например, свертку в пакете MATLAB надо вычислять следующим образом.

$$c_k = \sum_{n=1}^N a_n b_{k-n+1} = \sum_{n=1}^N a_{k-n+1} b_n, \quad k = 1, \dots, 2N$$

Дискретное преобразование Фурье и спектр сигналов

До сих пор дискретное преобразование Фурье рассматривалось формально как некоторое линейное преобразование компонент векторов любой природы. Теперь настало время выяснить, какую роль играет дискретное преобразование Фурье в спектральном описании сигналов.

Начнем с дискретного сигнала. Как мы знаем, спектр дискретного сигнала выражается формулой.

$$S_D(f) = \frac{1}{2F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-i \frac{\pi n}{F} f} \quad (35)$$

Здесь F - частота Найквиста, а s_n отсчеты дискретного сигнала. Предположим, что дискретный сигнал определен конечным набором отсчетов.

$$\{s_n\}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Другими словами для $n < 0$ или для $n > N-1$ можно считать $s_n = 0$. Поэтому ряд (35) заменяется конечной суммой.

$$S_D(f) = \frac{1}{2F} \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{\pi n}{F} f} \quad (36)$$

Спектр дискретного сигнала (36) является **непрерывной периодической** функцией с периодом $2F$. На периоде $[0, 2F]$ выберем N дискретных значений частоты f . Эти значения определим следующим образом.

$$f_k = k \Delta f, \quad \Delta f = \frac{2F}{N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (37)$$

В формуле (37) величина Δf называется **шагом частотной дискретизации**. Подставим дискретные значения частоты (37) в формулу спектра (36). В результате получим.

$$S_D(f_k) = \frac{1}{2F} \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{\pi n}{F} f_k} = \frac{1}{2F} \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \quad (38)$$

Мы видим, что сумма, стоящая в формуле (38) является ДПФ для последовательности s_n .

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (39)$$

Сравнивая формулы (38) и (39) получаем соотношение.

$$S_D(f_k) = \frac{1}{2F} S_k \quad (40)$$

Таким образом, **дискретный спектр** $S_D(f_k)$ **дискретного сигнала** s_n выражается через ДПФ S_k от дискретного сигнала s_n по формуле (40). Если ввести векторы дискретного сигнала и его дискретного спектра с периодом N .

$$\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}),$$

$$\mathbf{S}_D = (S_D(f_0), S_D(f_1), \dots, S_D(f_{N-1})),$$

то связь (40) можно изобразить в виде.

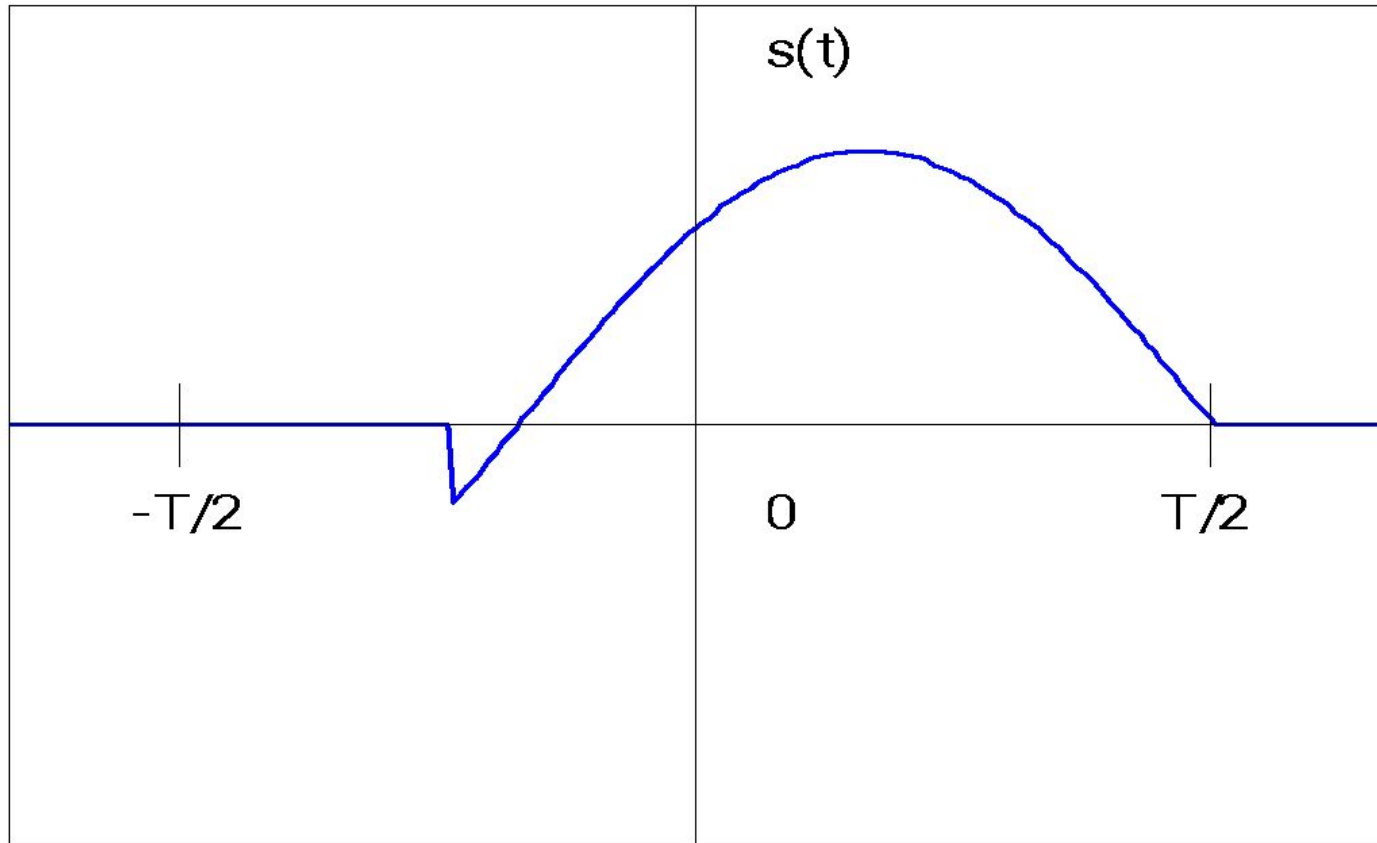
$$\mathbf{s} \leftrightarrow 2F \mathbf{S}_D \quad (41)$$

Поэтому можно сказать, что дискретное преобразование Фурье является по сути дела, дискретным спектром дискретного сигнала.

Теперь рассмотрим, как связано дискретное преобразование Фурье со спектром непрерывных сигналов. Спектр непрерывного сигнала определяется преобразованием Фурье.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad (44)$$

Если преобразование Фурье сводится к аналитическим выражениям, то задача нахождения спектра сигнала решается просто. Чаще всего этого сделать невозможно, поэтому приходится вычислять интеграл Фурье численными методами. Рассмотрим финитный сигнал $s(t)$. Выберем симметричный временной интервал $t \in [-T/2, T/2]$ такой, чтобы вне этого интервала сигнал равнялся нулю $s(t) = 0$.



Тогда спектр $S(f)$ такого сигнала будет равен интегралу с конечными пределами.

$$S(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (45)$$

Этот интеграл можно вычислить разными численными методами с большей или меньшей точностью. Мы выберем метод прямоугольников. Проведем дискретизацию сигнала с шагом дискретизации

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

где N для удобства четное число. Отсчеты сигнала $s_n = s(t_n)$ берем в дискретные моменты времени

$$t_n = n \Delta t, \quad n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

В методе прямоугольников интеграл (45) заменяем следующей суммой

$$S(f) = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} s_n e^{-i2\pi n f \Delta t} \Delta t \quad (46)$$

Выразим шаг дискретизации через частоту Найквиста

$$\Delta t = \frac{1}{2F}$$

Тогда формула (46) примет вид

$$S(f) = \frac{1}{2F} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} s_n e^{-i \frac{\pi n}{F} f} \quad (47)$$

Сравним формулу (47) с выражением (36) для спектра дискретного сигнала. Мы видим, что формулы очень похожи. Отличие в способе нумерации отсчетов дискретного сигнала. В формуле (36) отсчеты нумеруются следующим образом.

$$S_0, S_1, \boxed{}, \dots, S_{N-1} \quad (48)$$

В формуле (47) нумерация другая.

$$S_{-\frac{N}{2}+1}, S_{-\frac{N}{2}+2}, \boxed{}, \dots, S_{\frac{N}{2}} \quad (49)$$

Это связано с тем, что в интеграле (45) мы рассматриваем непрерывный сигнал для положительных и отрицательных моментов времени.

Обычно нас интересует спектр, как для **положительных значений** частоты $f > 0$, так и для **отрицательных значений** частоты $f < 0$. Поэтому, определим дискретные значения частоты следующим образом

$$f_k = k \Delta f, \quad \Delta f = \frac{2F}{N}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \quad \boxtimes, \quad \frac{N}{2} \quad (50)$$

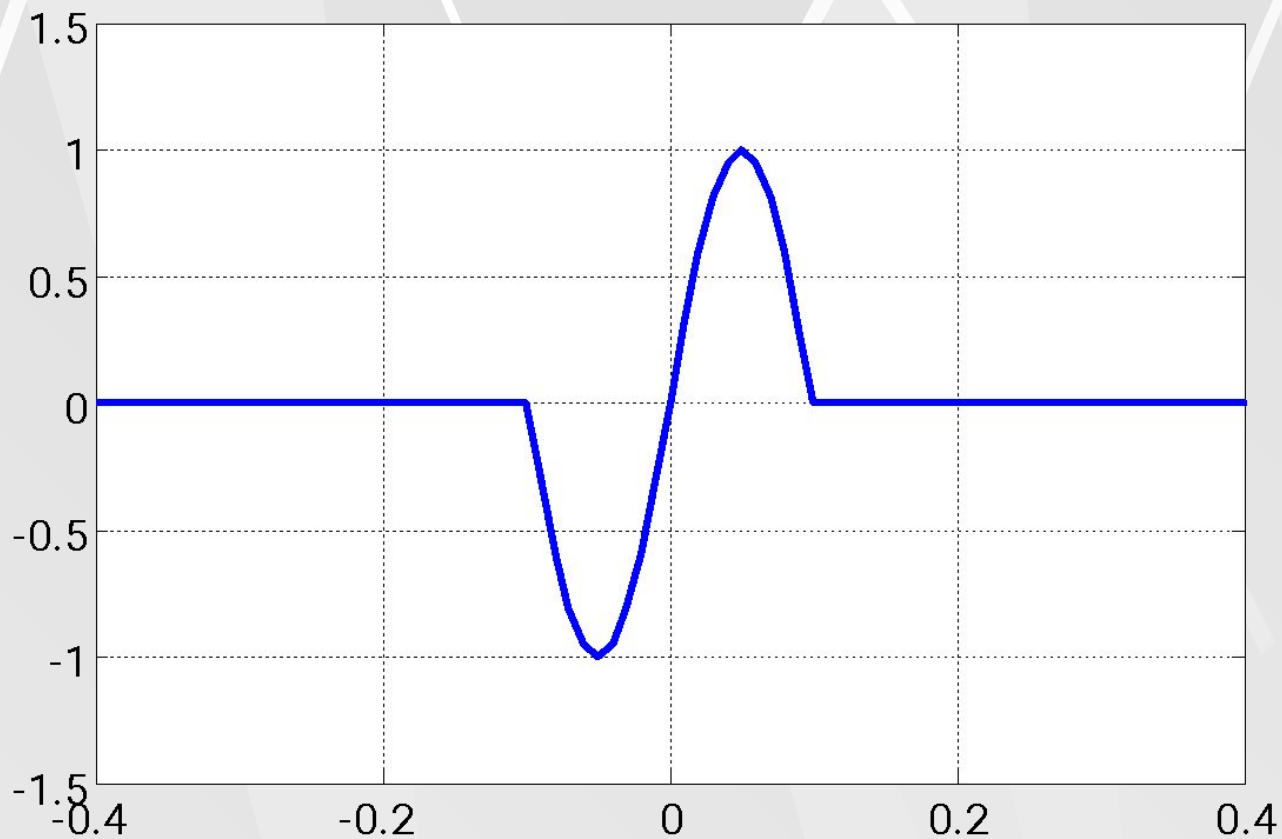
Подставляем дискретные частоты (50) в формулу (47) и получаем

$$S(f_k) = \frac{1}{2F} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} s_n e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (51)$$

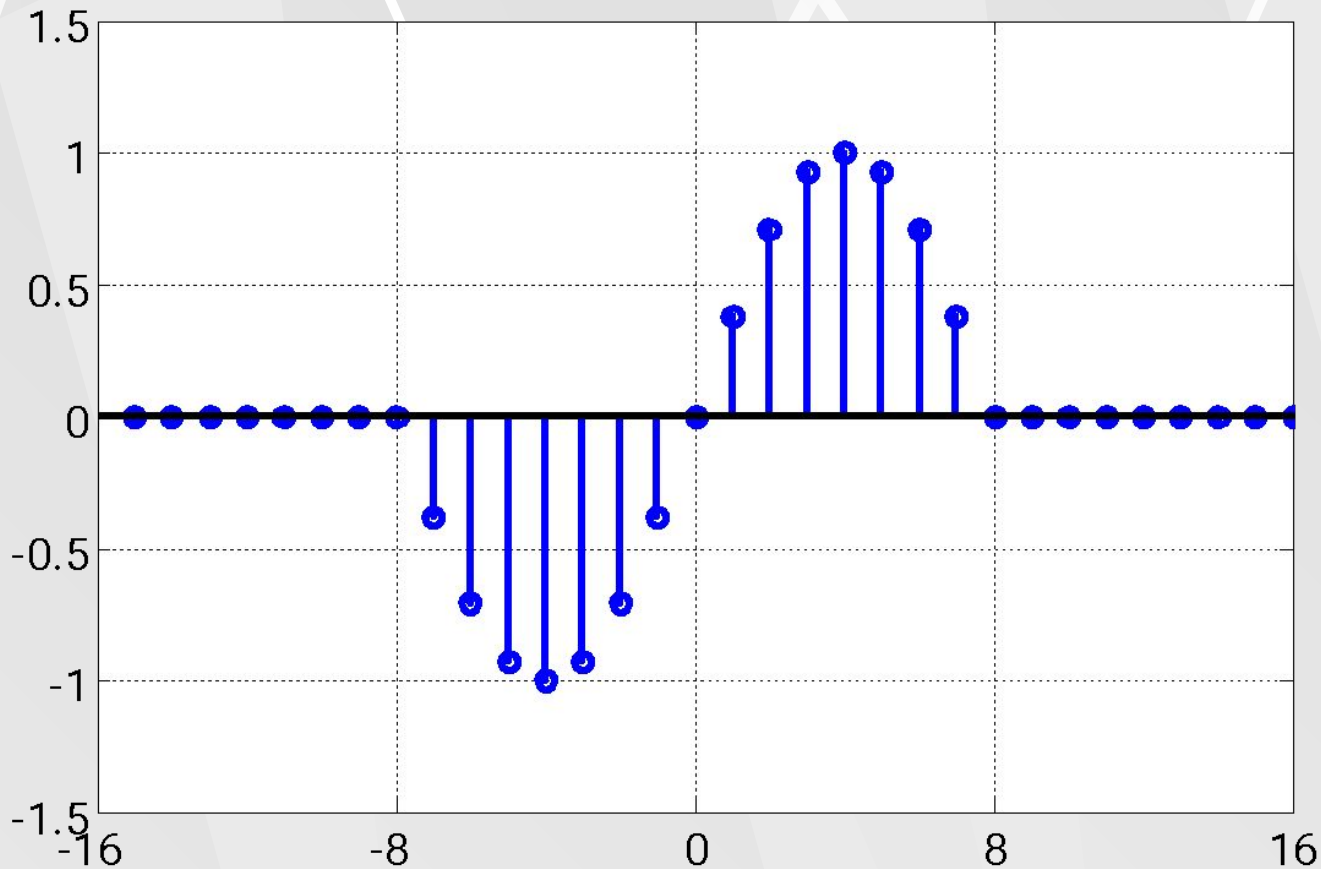
Рассмотрим для примера, непрерывный сигнал заданный нечетной функцией (смотри лабораторную работу 1)

$$s(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t), & |t| \leq a/2, \\ 0, & |t| > a/2 \end{cases} \quad (52)$$

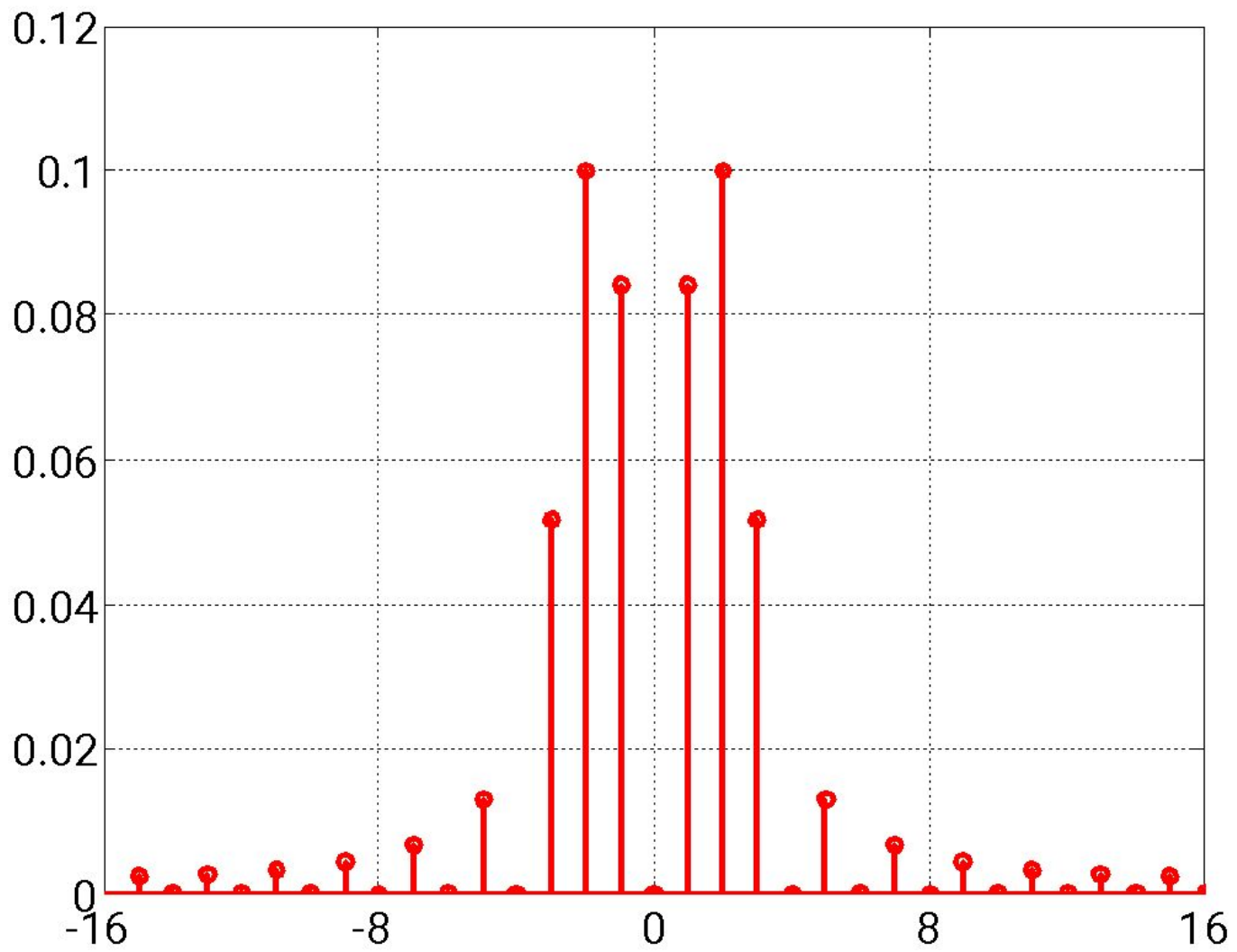
Пусть несущая частота в этом импульсе равна Гц, а длительность импульса равна соответственно $a = 0.2$ с. График этого сигнала показан на рисунке.

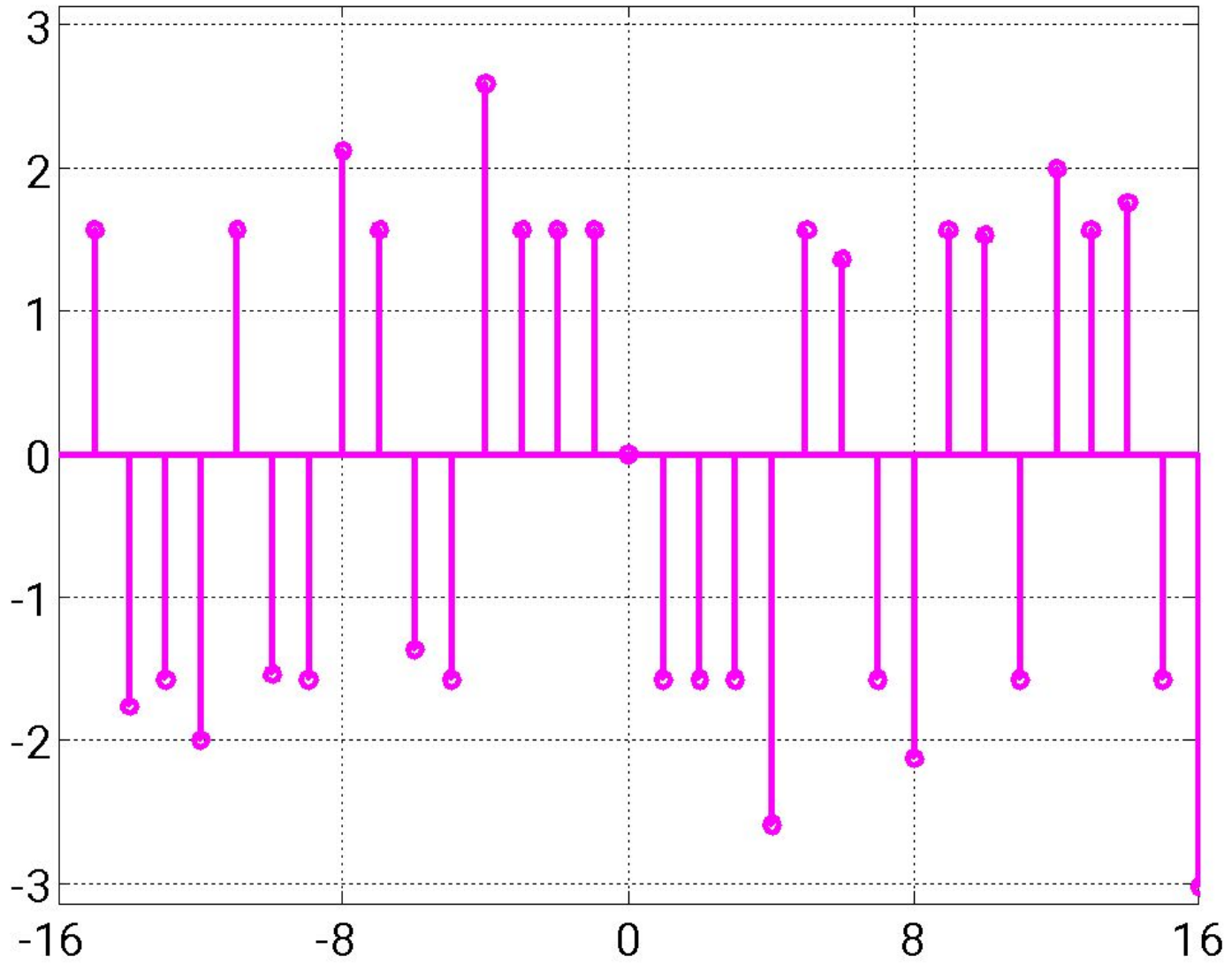


Интервал интегрирования пусть будет равен $T = 0.4$. Число интервалов пусть будет равно $N = 32$. Интервал дискретизации будет тогда равен $\Delta t = 0.0125$.



Частота Найквиста в этом случае равна $F = 40$ Гц.





Изменим нумерацию компонент дискретного сигнала, чтобы это было похоже на последовательность, для которой можно найти ДПФ.

$$\tilde{s}_n = s_{n - \frac{N}{2} + 1}, \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (53)$$

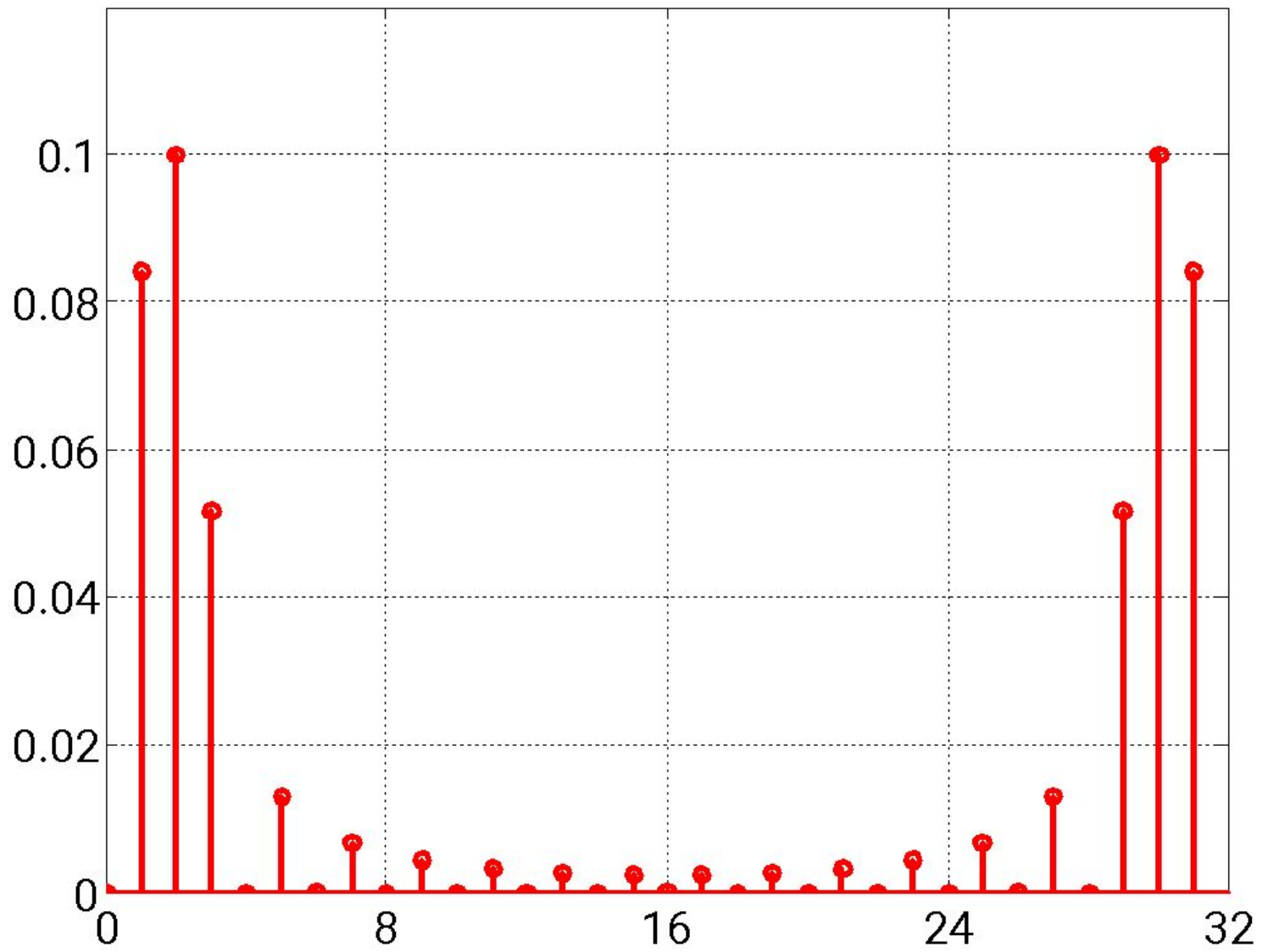
Для последовательности \tilde{s}_n найдем ДПФ.

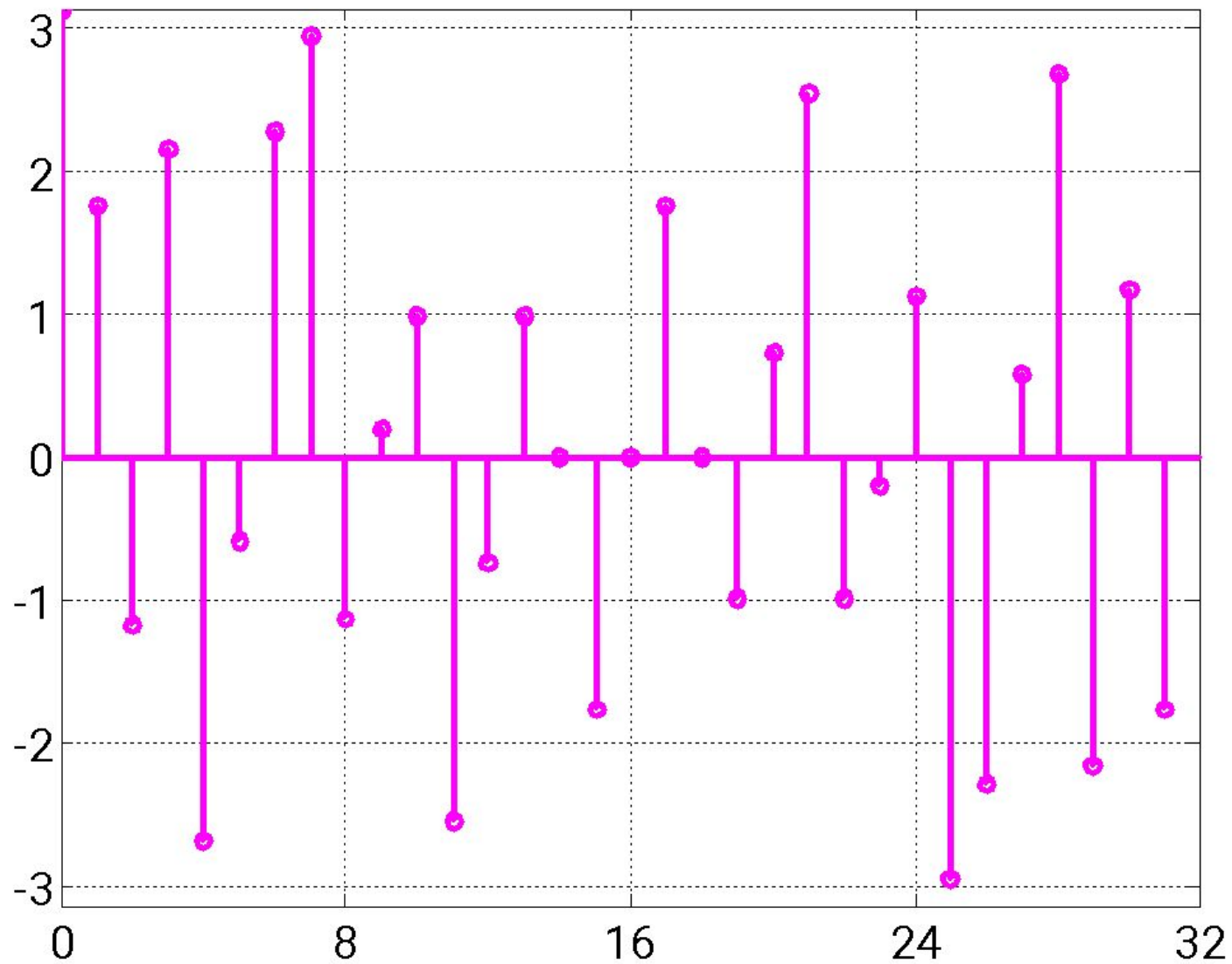
$$\tilde{S}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}_n e^{-i \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (54)$$

Вместо спектра заданного формулой (51) рассмотрим спектр, полученный с помощью ДПФ (54)

$$\tilde{S}(f_k) = \frac{1}{2F} \tilde{S}_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (55)$$

Построим график спектра (55). На следующих рисунках показаны графики АЧХ и ФЧХ, построенные по формулам (54), (55).





Простой анализ показывает, что связь между компонентами дискретного спектра (51) непрерывного сигнала и ДПФ (54) осуществляется простыми формулами

$$S(f_k) = \frac{1}{2F} e^{i \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N}{2} - 1 \right)} X_k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (56)$$
$$S(f_{k-N}) = \frac{1}{2F} e^{i \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N}{2} - 1 \right)} X_k, \quad k = \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1$$

! Доказать самостоятельно первую формулу (56).

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Для быстрой спектральной обработки сигналов, надо иметь алгоритмы быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье. Здесь мы рассмотрим один из таких алгоритмов.

Запишем ДПФ в следующем виде:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) e^{-i \frac{2\pi}{N} k j}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (57)$$

В этом алгоритме важным моментом является число членов N суммы (57). Рассмотрим ДПФ размерности $N = 2^n$. Введем обозначение:

$$\omega_n = \exp\left(-i \frac{2\pi}{2^n}\right) \quad (58)$$

Тогда ДПФ примет вид.

$$y(k) = \sum_{j=0}^{2^n-1} x(j) \omega_n^{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \quad (59)$$

Для вычисления каждого коэффициента $y(k)$, как легко видеть, требуется около 2^n комплексных сложений с умножениями. Итого, для реализации (59) требуется около $2^n \times 2^n = 2^{2n}$ комплексных сложений с умножениями.

Введем вектор

$$\mathbf{X}_0 = (x(0), x(2), \dots, x(2^n - 2)) = (x_0(0), x_0(1), \dots, x_0(2^{n-1} - 1)) \quad (60)$$

который является вектором четных отсчетов вектора \mathbf{X} .

Введем вектор:

$$\mathbf{X}_1 = (x(1), x(3), \dots, x(2^n - 1)) = (x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(2^{n-1} - 1)) \quad (61)$$

который является вектором нечетных отсчетов вектора \mathbf{X} . Учтем следующее соотношение

$$\omega_n^2 = \exp\left(-i \frac{2\pi}{2^n} 2\right) = \exp\left(-i \frac{2\pi}{2^{n-1}}\right) = \omega_{n-1} \quad (62)$$

Далее разобьем сумму (59) на два слагаемых с четными и нечетными членами. При этом учтем формулы (60), (61), (62).

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x(2j) \omega_n^{k2j} + \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x(2j+1) \omega_n^{k(2j+1)} = \\
 &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j) \omega_{n-1}^{kj} + \omega_n^k \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j) \omega_{n-1}^{kj}
 \end{aligned} \tag{63}$$

Две суммы в (63) обозначим следующим образом.

$$y_0(k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_0(j) \omega_{n-1}^{kj} \tag{64}$$

$$y_1(k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} x_1(j) \omega_{n-1}^{kj}$$

Сравнивая соотношения (64) с формулой (59), мы видим, что первая формула (64) – это ДПФ вектора \mathbf{X}_0 размерности 2^{n-1} . Вторая формула (64) – это ДПФ вектора \mathbf{X}_1 размерности 2^{n-1} .

Учитывая (64) формулу (63) можно переписать в следующем виде.

$$y(k) = y_0(k) + \omega_n^k y_1(k) \quad (65)$$

Далее можно показать, что имеют место следующие соотношения.

$$\omega_n^{k+2^{n-1}} = -\omega_n^k \quad (66)$$

$$y_0(k + 2^{n-1}) = y_0(k)$$

$$y_1(k + 2^{n-1}) = y_1(k)$$

! Доказать самостоятельно соотношения (66).

Сделаем в (65) замену $k \rightarrow k + 2^{n-1}$ и воспользуемся свойствами (66). В результате получим

$$y(k + 2^{n-1}) = y_0(k) - \omega_n^k y_1(k) \quad (67)$$

Объединим формулы (65), (67)

$$\begin{aligned}y(k) &= y_0(k) + \omega_n^k y_1(k) \\y(k + 2^{n-1}) &= y_0(k) - \omega_n^k y_1(k) \\k &= 0, 1, \dots, 2^n - 1\end{aligned}\tag{68}$$

Подведем некоторый итог. При помощи уравнений (68) мы выразили коэффициенты ДПФ размерности 2^n

$$\mathbf{Y} = (y(0), y(1), \dots, y(2^n - 1))\tag{69}$$

через коэффициенты ДПФ размерности 2^{n-1} .

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= (y_0(0), y_0(1), \dots, y_0(2^{n-1} - 1)) \\ \mathbf{Y}_1 &= (y_1(0), y_1(1), \dots, y_1(2^{n-1} - 1)) \end{aligned} \quad (70)$$

Таким образом, вычисление 2^n - точечного ДПФ можно осуществить, выполнив предварительно два 2^{n-1} - точечных ДПФ.

Вычисление спектров \mathbf{Y}_0 и \mathbf{Y}_1 размерности 2^{n-1} требует около $2^{2(n-1)}$ комплексных умножений в каждом случае, всего 2^{2n-1} комплексных умножений. Еще 2^{n-1} умножений требуется выполнить далее при дальнейшей реализации уравнений (68).

Итого, реализация ДПФ размерности 2^n с использованием уравнений (68) потребует порядка $2^{2n-1} + 2^n \approx 2^{2n-1}$ операций комплексного умножения. При непосредственном использовании соотношений (59) для реализации ДПФ той же размерности требуется 2^{2n} операций умножения, т.е. примерно в два раза больше.

Другими словами на **одном шаге использования уравнений (68)** быстрота расчета возрастает примерно в **два раза**.

В рассмотренном случае, мы перешли от ДПФ размерности 2^n к двум ДПФ размерности 2^{n-1} . Теперь можно от ДПФ размерности 2^{n-1} перейти к двум ДПФ размерности 2^{n-2} , и т. д.

В общем случае для ДПФ размерности 2^n операция сведения к двум ДПФ меньшей размерности выполняется n раз. Такая процедура называется **быстрым преобразованием Фурье** (БПФ).

Несложный анализ показывает, что в алгоритме БПФ имеется около $n/2$ комплексных умножений, вместо 2^{2n} при непосредственной реализации ДПФ по формуле (59). Так, для размерности $N = 2^{10} = 1024$ выигрыш в сокращении числа вычислительных операций – около 200 раз.