Вариант 1

1). Известно, что $x(n)=n \leftrightarrow X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$. Используя свойство Z – преобразования найти Z – образ для последовательности: $x_1(n)=n^2$

Решение:

$$x(n)=n \leftrightarrow X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x_1(n)=n^2=n\cdot x(n) \leftrightarrow X_1(z)=-z\frac{d}{dz}X(z)=$$

$$=-z\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2}=-z\frac{1\cdot(z-1)^2-z\cdot 2(z-1)}{(z-1)^4}=$$

$$=-z\frac{\cancel{(z-1)}(z-1-2z)}{(z-1)^{\cancel{4}3}}=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Св-во 5. **Умножение последовательности на номер элементов.**

Вариант 2

1). Известно, что $x(n) = n \leftrightarrow X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$. Используя свойство Z – преобразования найти Z – образ для последовательности: $x_1(n) = n \cdot 2^n$

<u>*Решение:*</u>

$$x(n) = n \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x_1(n) = n \cdot 2^n \cdot x(n) \leftrightarrow X_1(z) = X\left(\frac{z}{2}\right) =$$

$$= \frac{z/2}{(z/2-1)^2} = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

<u>*Св-во 4.*</u> **Умножение последовательности на степенную функцию**.

Вариант 4

1). Найти Z – образ для последовательности: $x(n)=(-1)^n$.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=(*)=\frac{1}{1+1/z}=\frac{z}{z+1}$$

$$(*)\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q},\quad |q|<1$$

Вариант 3

1). Найти Z – образ для последовательности: $x(n)=1$.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=(*)=\frac{1}{1-1/z}=\frac{z}{z-1}$$

Вариант 3

2). Восстановить сигнал по его Z образу: $X(z) = \dfrac{2z^2}{(z-3)^2} - \dfrac{z^3}{1-z}$

$$f(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{2z^{n+1}}{(z-3)^2} + \frac{z^{n+2}}{z-1}$$

$$x(n) = Выч\left[\frac{2z^{n+1}}{(z-3)^2}, 3\right] + Выч\left[\frac{z^{n+2}}{z-1}, 1\right] =$$

$$= \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z^{n+1}}{(z-3)^2}(z-3)^2\right) + \lim_{z\to 1}\left(\frac{z^{n+2}}{z-1}(z-1)\right) =$$

$$= \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}(2z^{n+1}) + \lim_{z\to 1}(z^{n+2}) = \lim_{z\to 3}(2(n+1)z^n) + 1 =$$

$$= 2(n+1)3^n + 1$$

Вариант 3

Написать уравнение фильтра по передаточной функции:

$$H(z)=\frac{0,7+3z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}}$$

Построить его структурную схему в прямой и прямой канонической форме.

$$a_1=-1 \quad a_2=2 \quad a_3=3$$

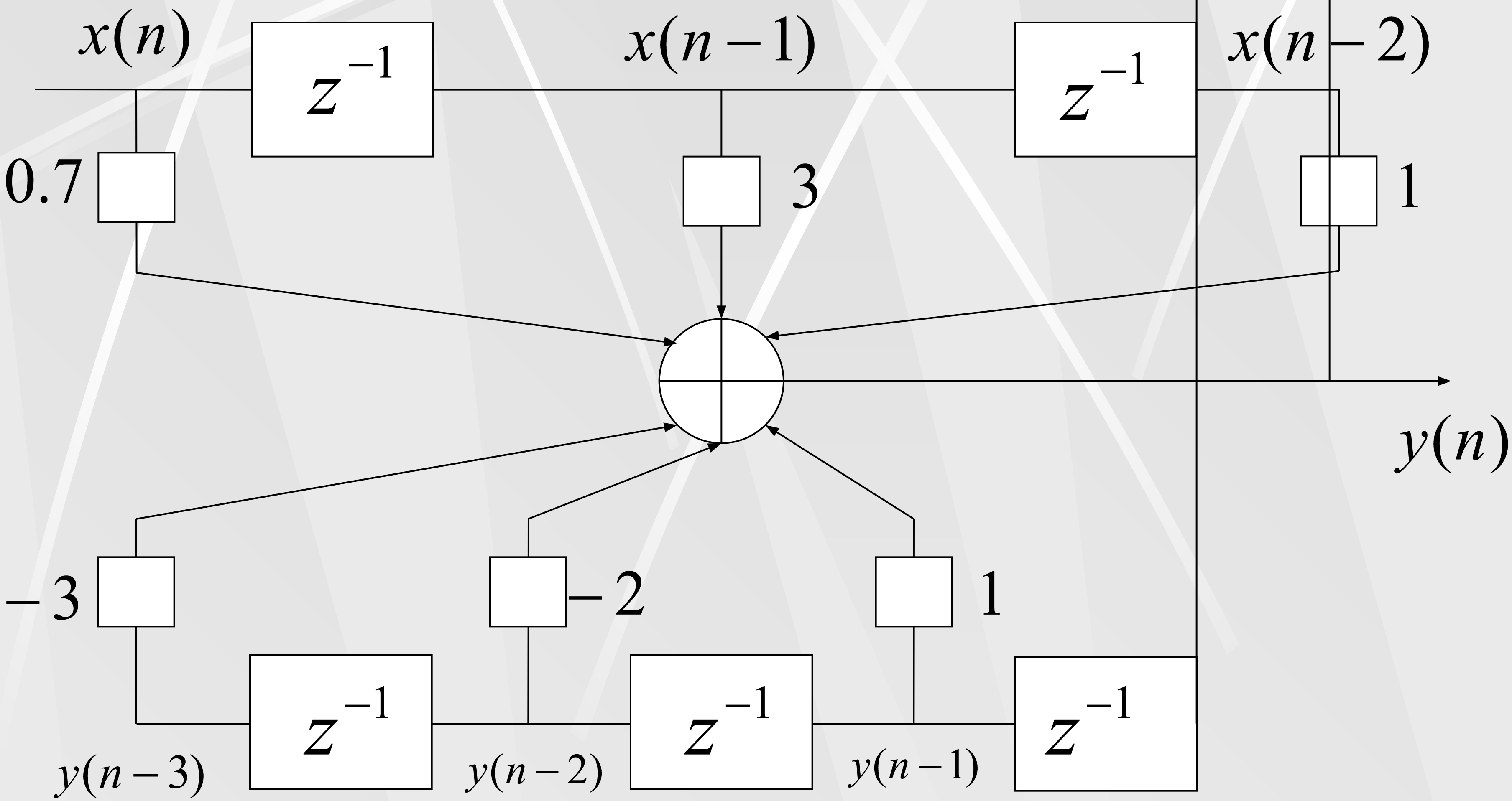
$$b_0=0.7 \quad b_1=3 \quad b_2=1$$

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1+\sum_{m=1}^{M} a_m z^{-m}}$$

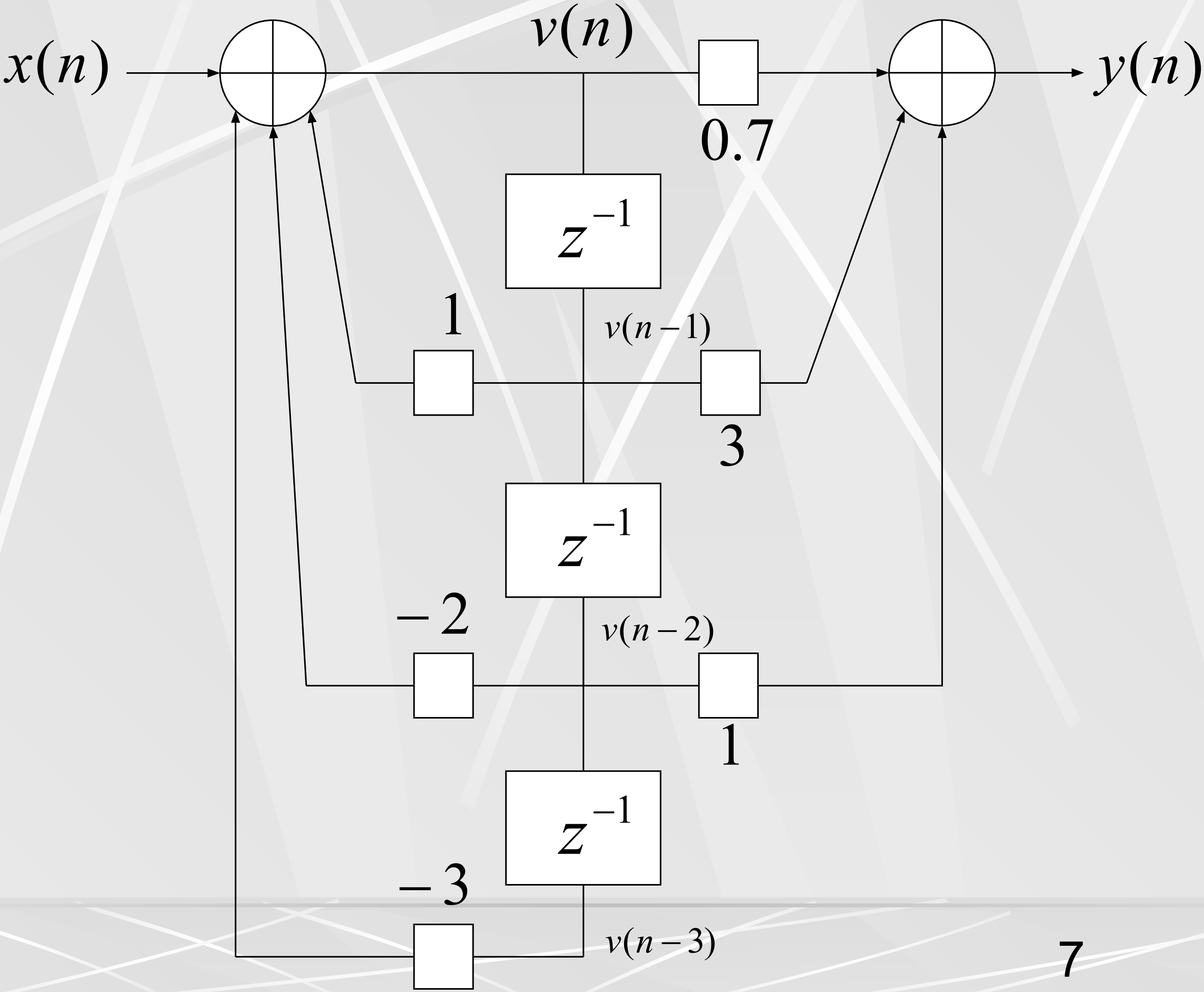
$$\downarrow$$

$$y(n)=y(n-1)-2y(n-2)-3y(n-3)+0.7x(n)+3x(n-1)+x(n-2)$$

Прямая форма ЛДФ



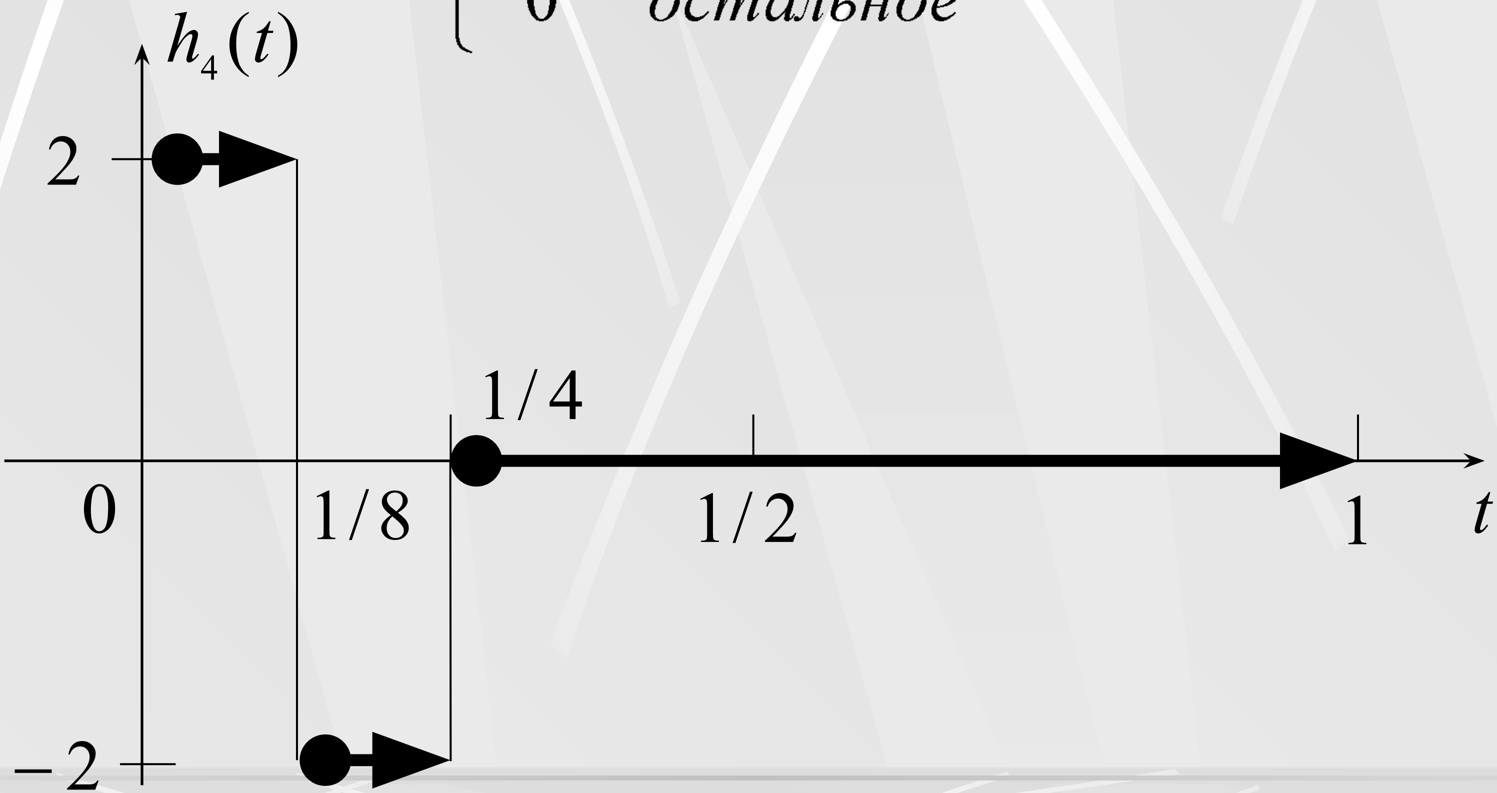
Прямая каноническая форма ЛДФ



Вариант 2 5) Построить график функции Хаара $h_4(t)$?

$$4 = 2^2 + 0 \quad k = 2\,, m = 0$$

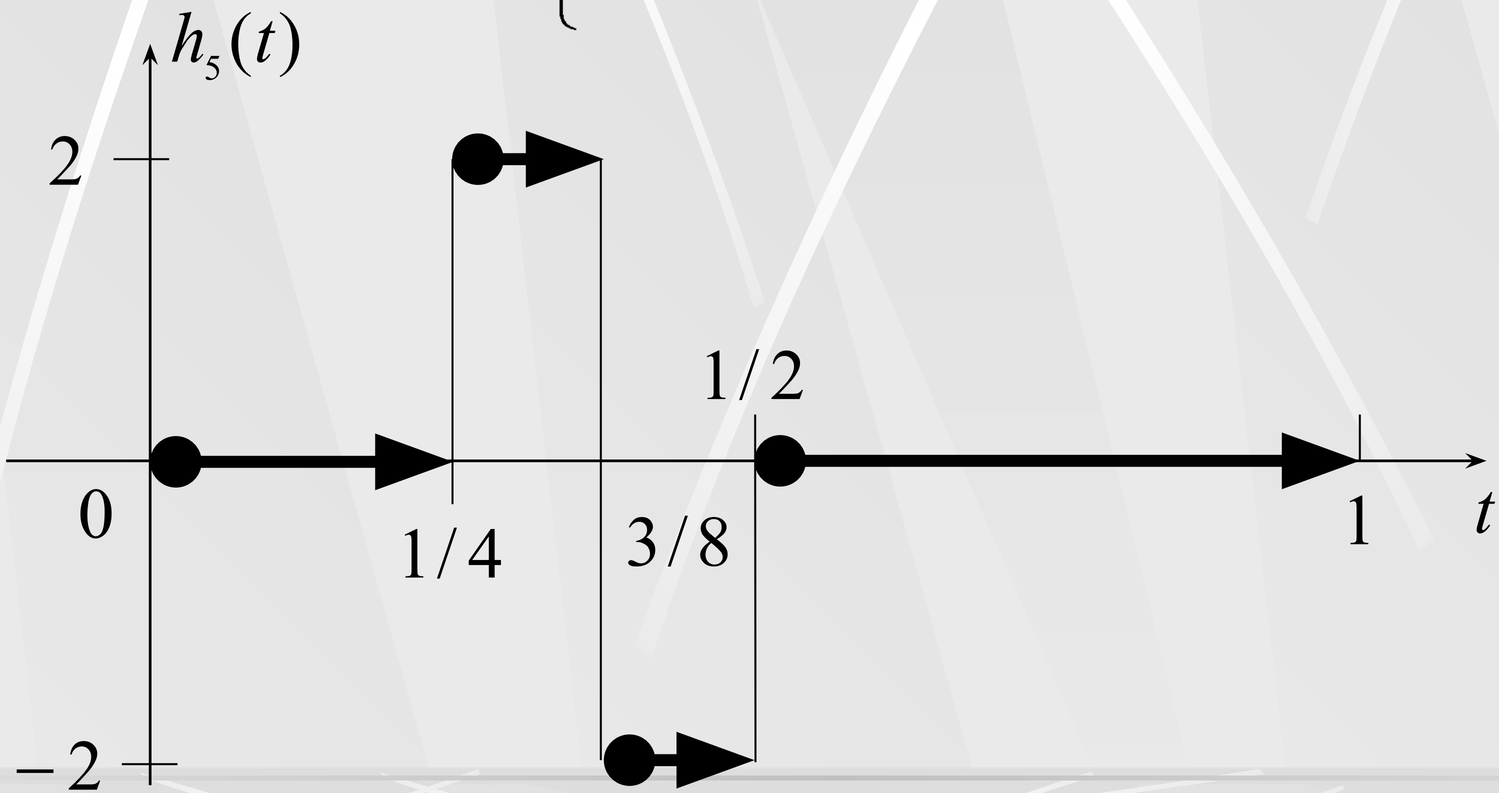
$$h_4(t) = \begin{cases} 2^{2/2} & t \in \Delta_0^3 = [0/8; 1/8) = [0\,; 1/8) \\ -2^{2/2} & t \in \Delta_1^3 = [1/8; 2/8) = [1/8\,; 1/4) \\ 0 & \text{остальное} \end{cases}$$



Вариант 2 5) Построить график функции Хаара $h_5(t)$?

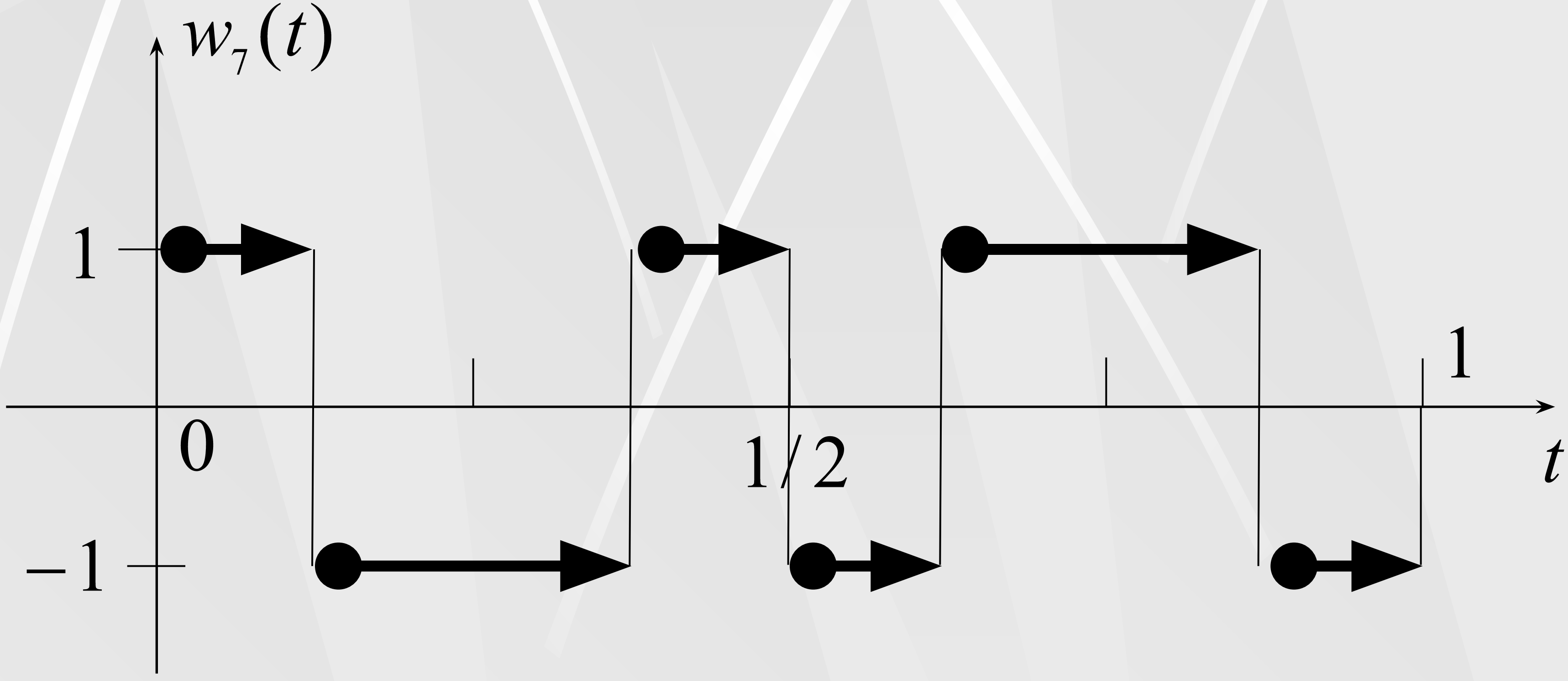
$$5 = 2^2 + 1 \quad k = 2\,,\, m = 1$$

$$h_4(t) = \begin{cases} 2^{2/2} & t \in \Delta_2^3 = [2/8; 3/8) = [1/4; 3/8) \\ -2^{2/2} & t \in \Delta_3^3 = [3/8; 4/8) = [3/8; 1/2) \\ 0 & остальное \end{cases}$$



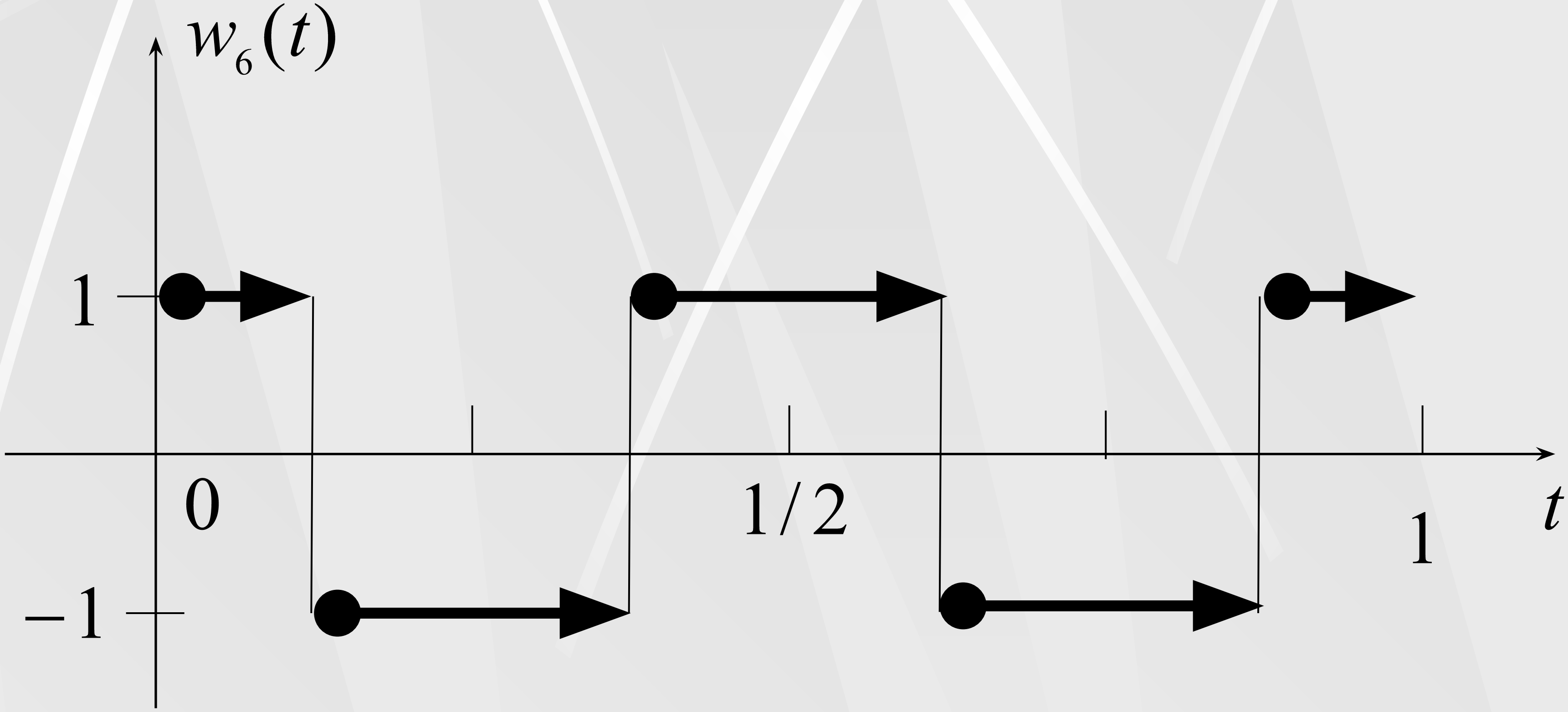
Вариант 3   5) Построить график функции Уолша $w_7(t)$?

$$7 = 111_2 \qquad w_7(t) = r_2(t)r_1(t)r_0(t)$$



Вариант 1 5) Построить график функции Уолша $w_6(t)$?

$$6 = 110_2 \qquad w_6(t) = r_2(t) r_1(t)$$



Вариант 1 4). $y(n) = y(n-1) - y(n-2) + x(n-1)$

Найти АЧХ и h(n)?

$$a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad b_0 = 0 \quad b_1 = 1$$

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z + 1} = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}; z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$f(n) = H(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$h(n) = Выч\left[\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)},\ z_1\right] + Выч\left[\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)},\ z_2\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left(\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_1)\right) + \lim_{z\to z_2}\left(\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_2)\right) =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left(\frac{z^n}{(z-z_2)}\right) + \lim_{z\to z_2}\left(\frac{z^n}{(z-z_1)}\right) = \frac{z_1^n}{z_1-z_2} + \frac{z_2^n}{z_2-z_1} =$$

$$= \frac{z_2^n - z_1^n}{z_2-z_1} = \frac{e^{i\frac{\pi n}{3}} - e^{-i\frac{\pi n}{3}}}{i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi n}{3}} - e^{-i\frac{\pi n}{3}}}{2i} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\frac{\pi n}{3}}$$

$$A(\omega)=\left|\frac{e^{i\omega\Delta t}}{\left(e^{i\omega\Delta t}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{i\omega\Delta t}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}\right|=\frac{\left|e^{i\omega\Delta t}\right|}{\left|e^{i\omega\Delta t}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|\cdot\left|e^{i\omega\Delta t}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right|}$$

$$\left|e^{i\omega\Delta t}\right|=\left|\cos\omega\Delta t+i\sin\omega\Delta t\right|=\sqrt{\cos^2\omega\Delta t+i\sin^2\omega\Delta t}=1$$

$$\left|e^{i\omega\Delta t}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|=\left|(\cos\omega\Delta t-\cos\frac{\pi}{3})+i(\sin\omega\Delta t+\sin\frac{\pi}{3})\right|=$$

$$=\sqrt{(\cos\omega\Delta t-\cos\frac{\pi}{3})^2+(\sin\omega\Delta t+\sin\frac{\pi}{3})^2}=$$

$$= \sqrt{\cos^2 \omega\Delta t - 2\cos\omega\Delta t \cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2 \omega\Delta t + 2\sin\omega\Delta t \sin\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt{2 - 2(\cos\omega\Delta t \cos\frac{\pi}{3} - \sin\omega\Delta t \sin\frac{\pi}{3})} = \sqrt{2(1 - \cos(\omega\Delta t + \frac{\pi}{3}))} =$$

$$= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right|$$

$$\left|e^{i\omega\Delta t} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \left(\begin{array}{l} \textit{замена в предыдущем} \\ \textit{результате} \; -\frac{\pi}{3} \to +\frac{\pi}{3} \end{array}\right) = 2\left|\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{1}{4 \cdot \left|\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right|}}$$

Вариант 3

6) Найти аналитические выражения и построить графики АЧХ и ФЧХ следующего сигнала:

$$s(t)=\begin{cases}1, & t\in[1;2]\\ 0, & t\notin[1;2]\end{cases}$$

$$S(\omega)=\int_1^2 1\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_1^2=\frac{1}{-i\omega}\left(e^{-i\omega 2}-e^{-i\omega 1}\right)=$$

$$=\frac{i}{\omega}\big((\cos 2\omega-i\sin\omega)\big)=\frac{1}{\omega}(\sin 2\omega-\sin\omega)+$$

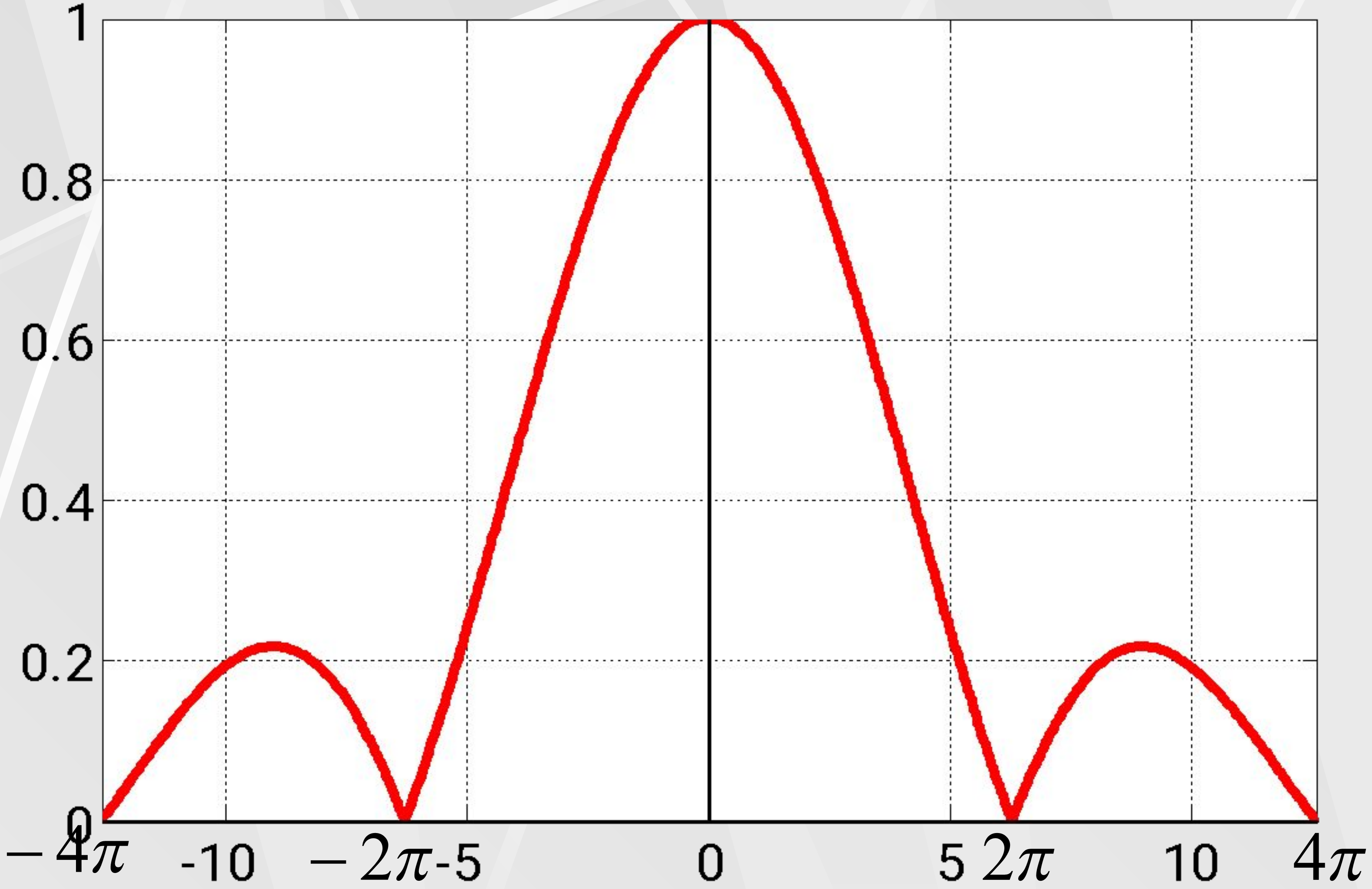
$$+i\frac{1}{\omega}(\cos 2\omega-\cos\omega)=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{3\omega}{2}-i\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\sin\frac{3\omega}{2}$$

$$\operatorname{Re} S(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{3\omega}{2} \qquad \operatorname{Im} S(\omega) = -\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\sin\frac{3\omega}{2}$$

$$A(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re} S(\omega))^2 + (\operatorname{Im} S(\omega))^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\cdot\cos^2\frac{3\omega}{2} + \frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\cdot\sin^2\frac{3\omega}{2}} =$$

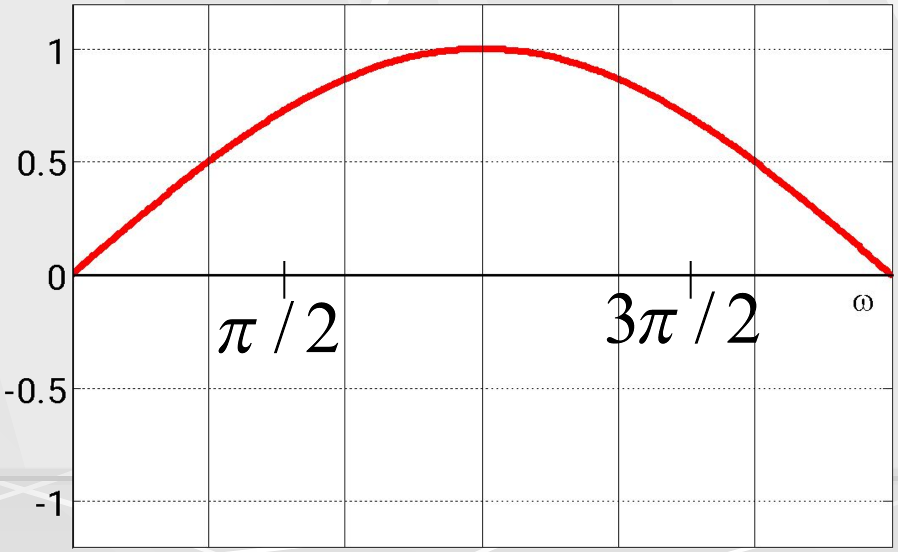
$$= \left|\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right|\cdot\sqrt{\cos^2\frac{3\omega}{2} + \sin^2\frac{3\omega}{2}} = \boxed{\left|\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right|}$$

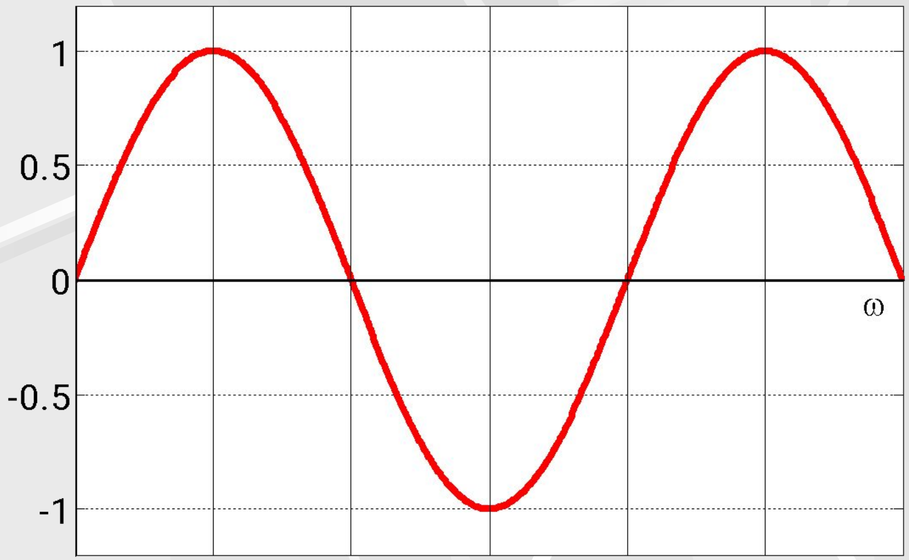

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-4π
-10
-2π
-5
0
5
2π
10
4π

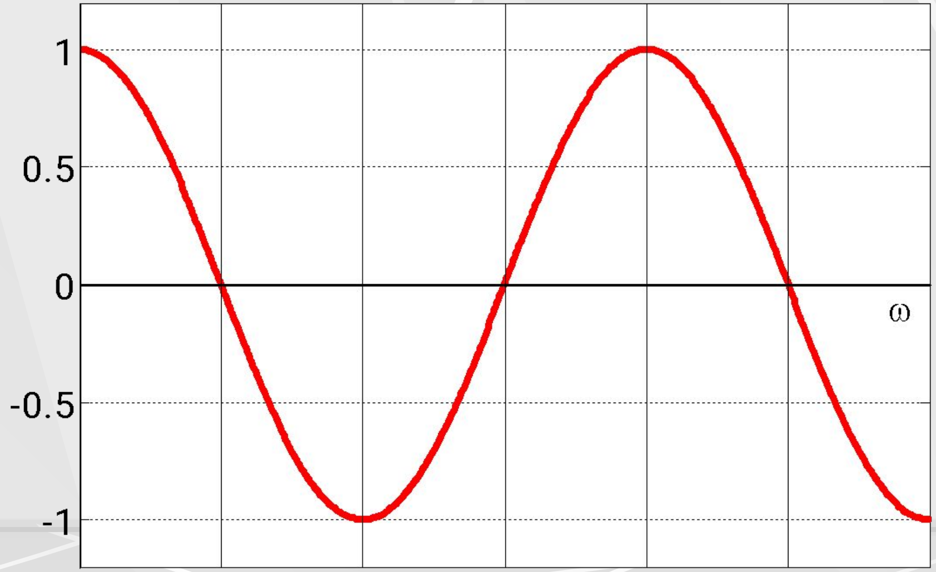
$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Im} S(\omega)}{\operatorname{Re} S(\omega)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{3\omega}{2} + \pi n\,,\; n \in Z$$

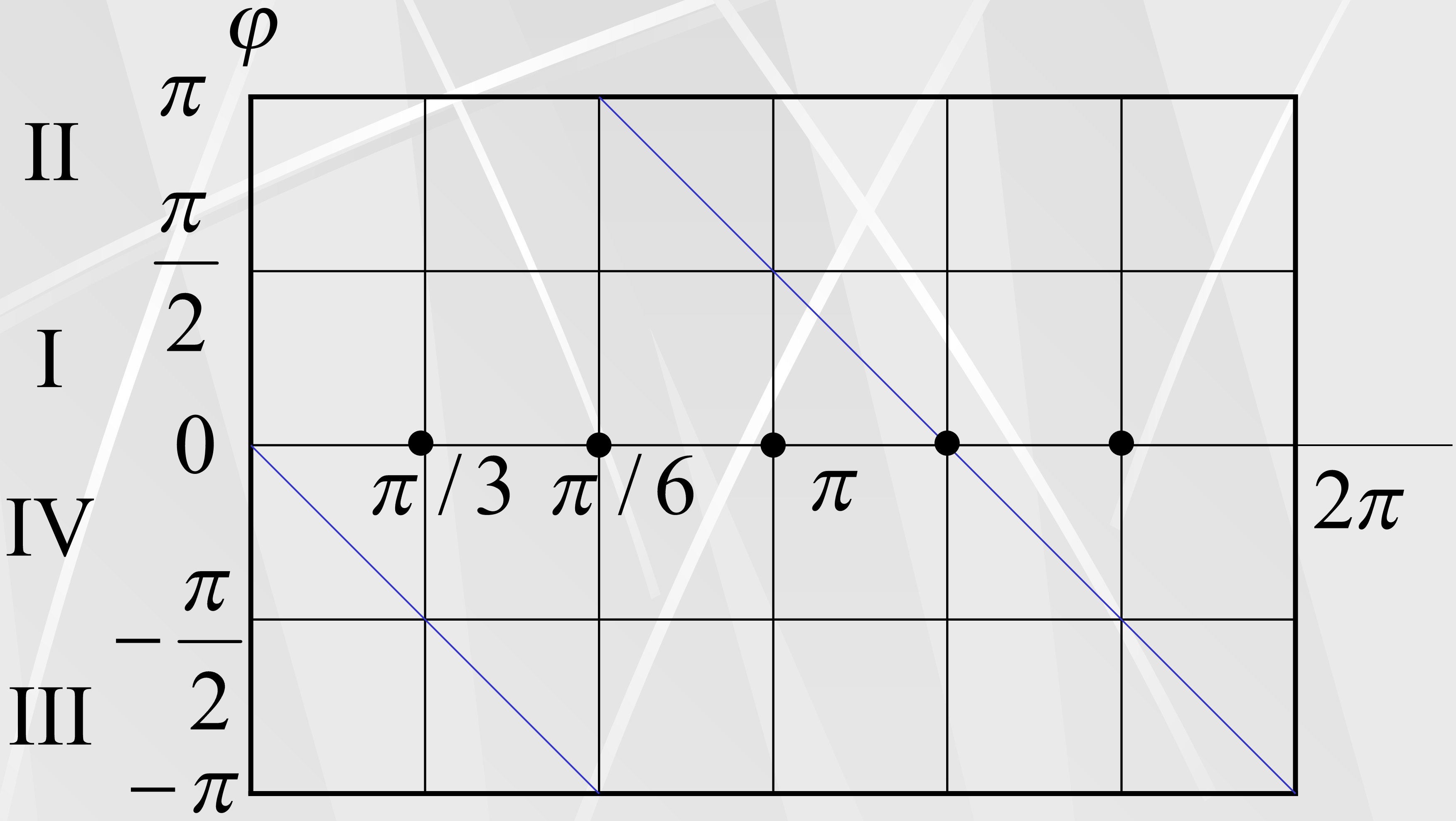
$$\operatorname{Re} S(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{3\omega}{2} \qquad \operatorname{Im} S(\omega) = -\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\sin\frac{3\omega}{2}$$

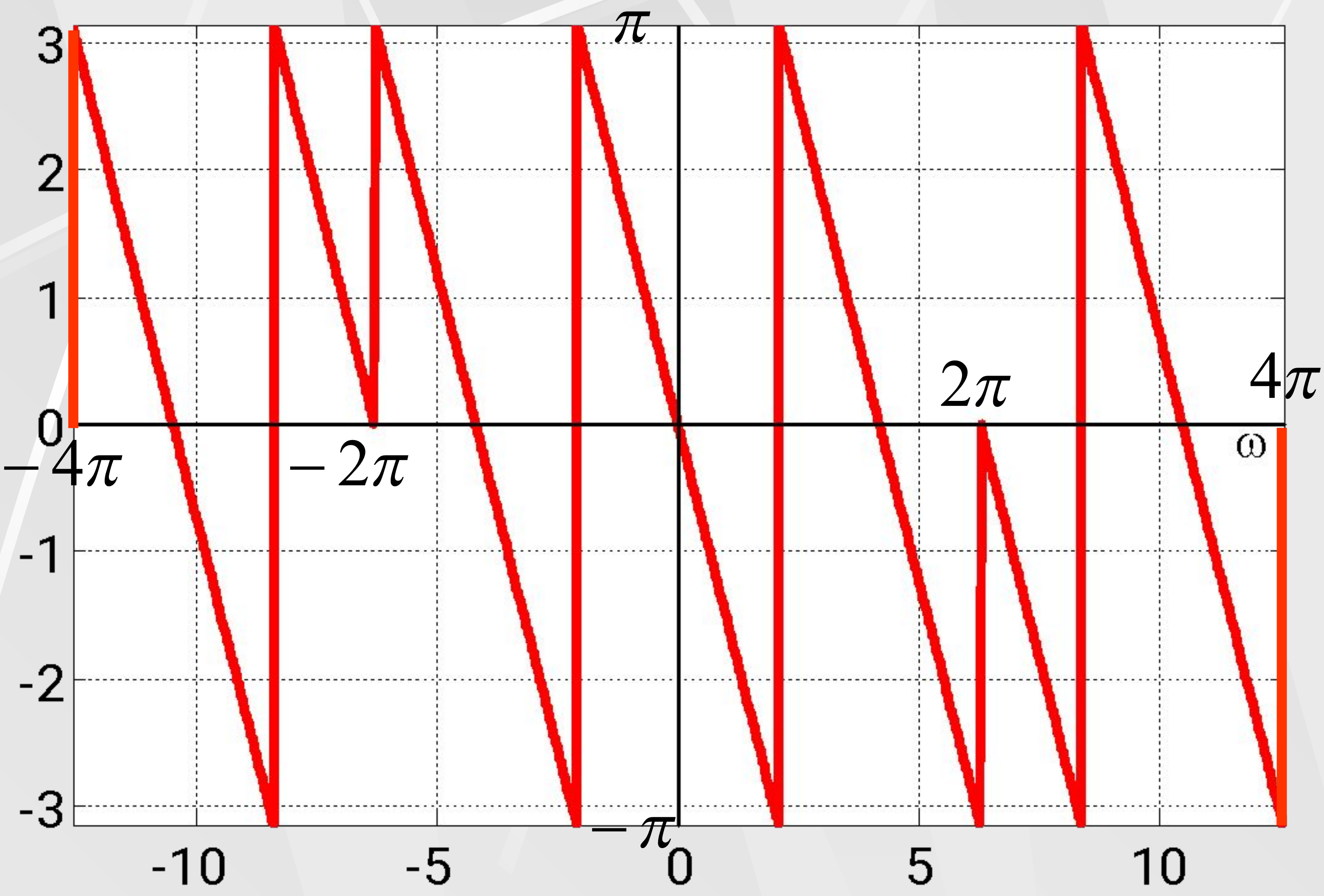



1
0.5
0
-0.5
-1
ω


1
0.5
0
-0.5
-1
ω

ω	ReS(ω)	ImS(ω)	ϕ
0÷π/3	+	-	IV
π/3÷ 2π/3	-	-	III
2π/3 ÷ π	-	+	II
π÷4π/3	+	+	I
4π/3 ÷5π/3	+	-	IV
5π/3 ÷2π	-	-	III


φ
π
II
π/2
I
0
π/3
π/6
π
2π
IV
−π/2
III
−π



π
$-\pi$
2π
4π
-4π
-2π
ω
3
2
1
0
-1
-2
-3
-10
-5
0
5
10

Вариант 3

6) Найти аналитические выражения и построить графики АЧХ и ФЧХ следующего сигнала:

$$s(t)=\begin{cases}1, & t\in[-2;-1]\\ 0, & t\notin[-2;-1]\end{cases}$$

$$S(\omega)=\int_{-2}^{-1}1\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-2}^{-1}=\frac{1}{-i\omega}\left(e^{i\omega}-e^{i2\omega}\right)=$$

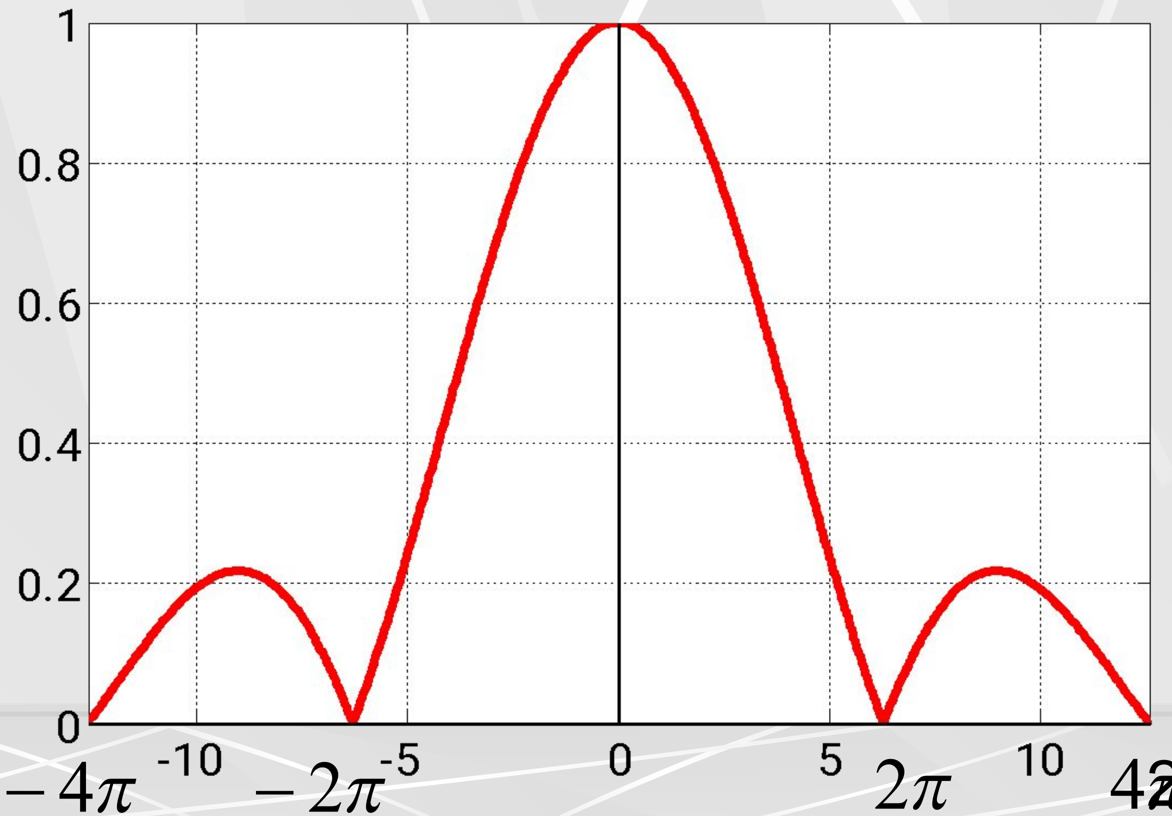
$$=\frac{i}{\omega}\left((\cos\omega+i\sin\omega)-(\cos 2\omega+i\sin 2\omega)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega}(\sin 2\omega-\sin\omega)-i\frac{1}{\omega}(\cos 2\omega-\cos\omega)=$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{3\omega}{2}+i\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\sin\frac{3\omega}{2}$$

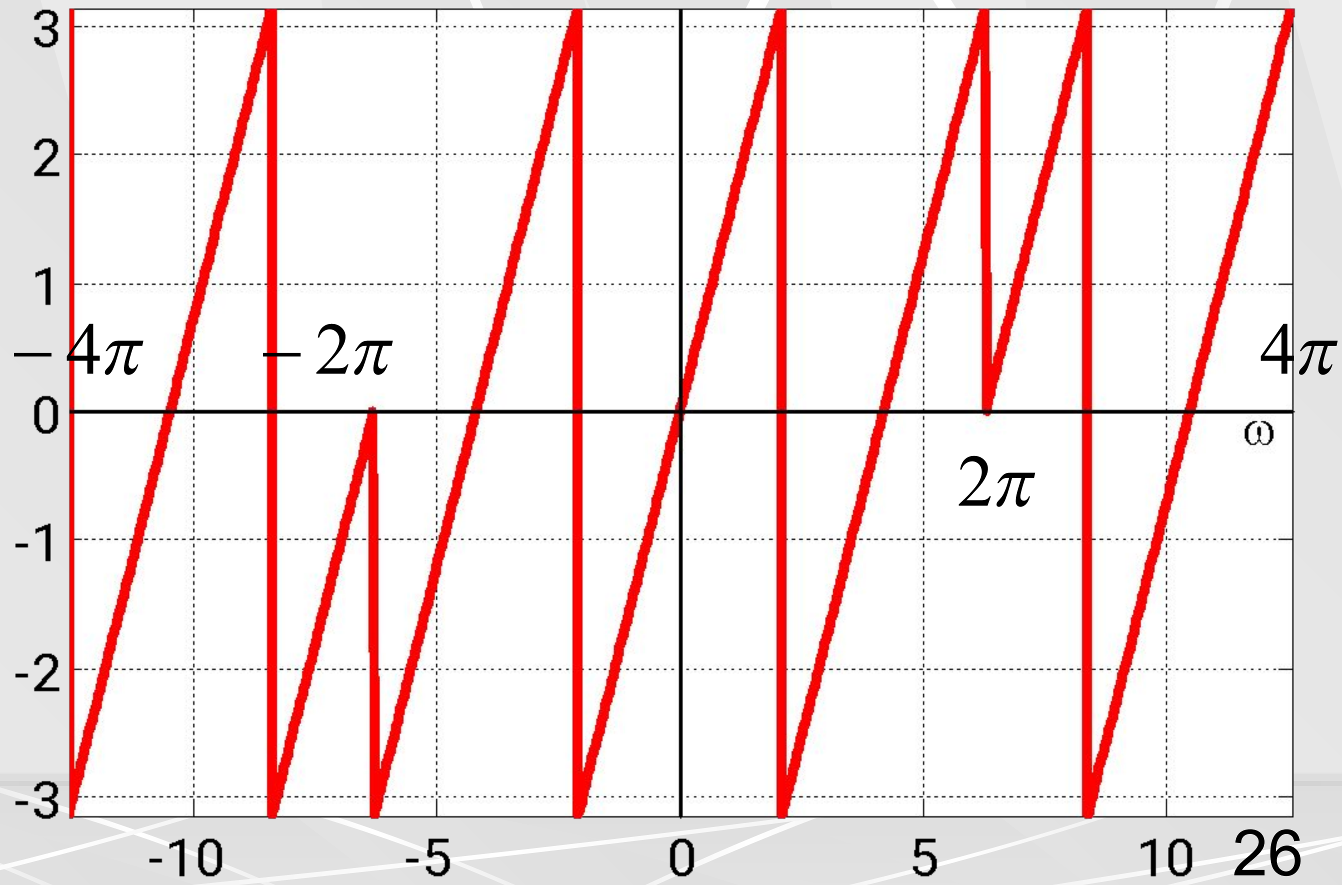
$$\operatorname{Re} S(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{3\omega}{2} \qquad \operatorname{Im} S(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\cdot\sin\frac{3\omega}{2}$$

$$A(\omega) = \left|\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right|$$



$$tg\varphi(\omega) = tg\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{3\omega}{2} + \pi n\ ,\ n \in Z$$



Вариант 2

6) Найти аналитические выражения и построить графики АЧХ и ФЧХ следующего сигнала:

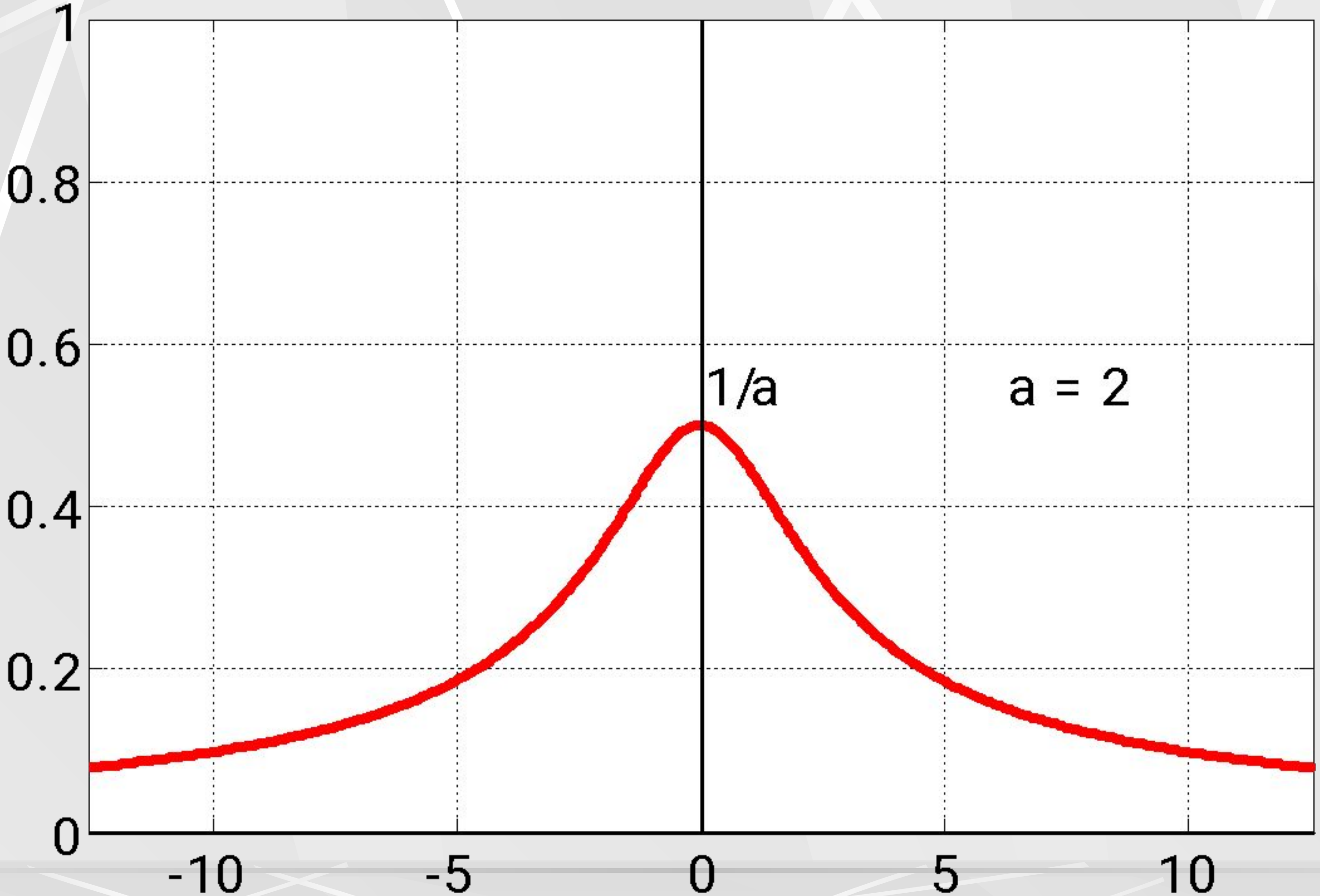
$$s(t)=\begin{cases}0, & t>0\\ e^{at}, & t\le 0\end{cases}$$

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{0} e^{at}\cdot e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}dt=$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{a-i\omega}=\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\operatorname{Re}S(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2}\qquad \operatorname{Im}S(\omega)=\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$



$$tg\varphi(\omega) = \frac{\omega}{a}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{\omega}{a}$$