# Нечеткие множества

Рассмотрим более подробно физический смысл функции принадлежности. Спектр мнений по этому вопросу чрезвычайно широк. Так, например, очень часто на функцию принадлежности накладывается условие нормировки, тем самым, выбирая в качестве функции принадлежности плотность распределения вероятности.

# Нечеткие множества

В работе Лотфи А. Заде «Fuzzy sets» предполагается, что функция принадлежности - это некоторое "невероятностное субъективное измерение неточности", и что она отлична от плотности вероятности и от функции распределения вероятности. Иногда под функцией принадлежности понимают возможность или полезность того или иного события.

# Нечеткие множества

Наиболее распространенным является суждение, предложенное в работе Л.А. Заде «Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений». Согласно данному суждению под значением функции принадлежности $\mu_a(u)$ нечеткого множества *A* для любого *u* е *U* *понимается вероятность того, что лицо, принимающее решение (ЛПР), отнесет элемент u к множеству A.*

# Нечеткие множества

В случае, когда *A* - некоторое понятие естественного языка, а *U* -множество объектов, обозначаемых этим понятием *A*, $\mu_a(u)$ - есть вероятность того, что лицо, принимающее решение, использует А в качестве имени объекта. Такая интерпретация функции принадлежности называется вероятностной и не исключает существование других интерпретаций.

## **Методы построения функции принадлежности**:

Пусть имеется коллективный ЛПР, состоящий из $n$ экспертов. О том, что $u$ е $U$ принадлежит нечеткому множеству $A$, $n_1 (n_1 \le n)$ экспертов отвечают положительно. В этом случае

$$\mu_a(u)=n_1/n$$

Данный метод называется *частотным,* а сама схема вычисления соответствует вероятностной интерпретации функции принадлежности.

При применении метода построения функции принадлежности *на основе стандартного набора графиков* ЛПР выбирает наиболее подходящий, по его мнению, график из стандартного набора, а затем в диалоговом режиме с ЭВМ выясняет и корректирует (при необходимости) параметры выбранного графика.

В методе *парных соотношений* пусть имеется *n* экспертов и необходимо найти степени принадлежности *k* точек. Каждый *i*-ый эксперт должен определить парные соотношения (по своему усмотрению) типа:

$$m_{lj} = \begin{cases} 1, \mu_l > \mu_j \\ 0, \mu_l \le \mu_j \end{cases}$$

$$l, j = \overline{1, k};$$

Экспертная оценка для *i*-го эксперта находится по формуле

$$\alpha_{il} = \frac{\sum_{j=1}^{k} m_{lj}}{\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} m_{lj}}$$

Окончательно, функция принадлежности для *i-го* параметра имеет вид

$$\mu_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{il}, l = \overline{1,k}$$

## Пример построения функции принадлежности

Два эксперта должны определить насколько три дома соответствуют оценке *Пригоден для жилья.* Мнение каждого из них основывается на собственных предпочтениях. Матрица парных соотношений первого эксперта пусть имеет вид *M1,* а второго - *M2.*

В матрице предпочтения $M_1$: $m_{11}=0$, т.к. оценка одного и того же дома дает равные значения, $m_{12}=1$, т.к. по мнению первого эксперта первый дом более пригоден для жилья, чем второй

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оценка 1-го эксперта для 1-го параметра

$$\alpha_{11} = \frac{m_{11} + m_{12} + m_{13}}{(m_{11} + m_{12} + m_{13}) + (m_{21} + m_{22} + m_{23}) + (m_{31} + m_{32} + m_{33})} = \frac{1}{3}$$

По аналогии $\alpha_{12} = \frac{1}{3}$, $\alpha_{13} = \frac{1}{3}$.

Оценки 2-го эксперта равны соответственно: $\alpha_{21}=\frac{0}{3}=0, \alpha_{22}=\frac{1}{3}, \alpha_{23}=\frac{2}{3}$.

Таким образом, функция принадлежности нечеткому множеств

*Пригоден для жилья* 1-го дома равна $\mu_1=\frac{1}{2}(\alpha_{11}+\alpha_{21})=\frac{1}{6}$, 2-го дома -

$\mu_2=\frac{1}{2}(\alpha_{12}+\alpha_{22})=\frac{1}{3}$ и, наконец, 3-го дома - $\mu_3=\frac{1}{2}(\alpha_{13}+\alpha_{23})=\frac{1}{2}$.

*Степенью* нечеткого множества *А* называется нечеткое множество $A^{\alpha}$ с функцией принадлежности.

$$\mu_{A^{\alpha}}(u) = \mu_A^{\alpha}(u),\ u \in U,\ \alpha > 0.$$

При *α*= *2* получаем операцию *концентрирование* (уплотнение)

$$\mathrm{CON}(A) = A^2$$

В результате применения этой операции к множеству *А* снижается степень нечеткости описания, причем для элементов с высокой степенью принадлежности это уменьшение относительно мало, а для элементов с малой степенью принадлежности относительно велико.

Операция *контрастной интенсификации* (INT) определяется с помощью функции принадлежности следующим образом:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 2\left(\mu_A(u)\right)^2, 0 \le \mu_A(u) \le 0,5 \\ 1 - 2\left(1 - \mu_A(u)\right)^2, 0,5 \le \mu_A(u) \le 1 \end{cases}$$

Эта операция отличается от концентрирования тем, что она увеличивает значение $\mu_A(u)$, которое больше 0.5 и уменьшает те, которые меньше 0.5. Таким образом, контрастная интенсификация, по существу уменьшает нечеткость *A.*

Операции концентрирования, растяжения и контрастной интенсификации используются при работе с лингвистическими неопределенностями.

*Оператор увеличения нечеткости* используется для преобразования четких множеств в нечеткие и для увеличения нечеткости нечеткого множества. Пусть *А* - нечеткое множество, *U* - универсальное множество и для всех $u \in U$ определены нечеткие множества *К(u).* Совокупность всех *К(u)* называется ядром оператора увеличения нечеткости *Ф.* Результатом действия оператора *Ф* на нечеткое множество *А* является нечеткое множество

$$\Phi(A,K) = \bigcup_{u \in U} \mu_A(u) K(u)$$

Пример

Пусть $U=\{1, 2, 3, 4\}$; $A = 0.8/1 + 0.6/2 + 0/3 + 0/4$;

$K(1) = 1/1 + 0.4/2$; $K(2) = 1/2 + 0.4/1 + 0.4/3$; $K(3) = 1/3 + 0.5/4$; $K(4) = 1/4$.

Тогда $\Phi(A,K) = \mu_A(1)\, K(1) \cup \mu_A(2)\, K(2) \cup \mu_A(3)\, K(3) \cup \mu_A(4)\, K(4) = 0.8$

$(1/1 + 0.4/2) \cup 0.6\,(1/2 + 0.4/1 + 0.4/3) = 0.8/1 + 0.6/2 + 0.24/3$

*Нечетким отношением R* на универсальном множестве $U = U_1 \times U_2$ называется нечеткое подмножество декартова произведения $U = U1 \times U2$ , которое характеризуется такой функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$, что

$$U_1 \times U_2 \xrightarrow{\mu_R} [0,1]$$

Причем $\mu_R(x,y)$, принимается как субъективная мера выполнения отношения *xRy*.
Или другой способ записи:

$$R = \bigcup_{x,y \in U_1 \times U_2} \mu_R(x,y)/(x,y)$$

Пусть $X = Y = (-\infty; \infty)$.
Отношение $x>>y$ можно задать функцией принадлежности

$$\mu_R = \begin{cases} 0, & \text{, если } x \le y \\ \dfrac{1}{1+(1/(x-y)^2)}, & \text{если } y < x \end{cases}$$

Пусть $U_1=\{x_1, x_2, x_3\}$, $U_2=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, M=[0,1]. Нечеткое отношение $R$ может быть задано, к примеру, в виде таблицы:

| $R$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0 | 0.1 | 0.3 |
| $x_2$ | 0 | 0.8 | 1 | 0.7 |
| $x_3$ | 1 | 0.5 | 0.6 | 1 |

# Нечеткие отношения

Нечеткое отношение *R* , для которого ,

$$\mu_R(x, y) = e^{-k(x-y)^2}$$

при достаточно больших *k* можно интерпретировать так: «*x* и *y* близкие друг к другу числа»

- *Носителем нечеткого отношения R* на множестве *U* называется подмножество декартова произведения $U_1 x U_2$, определяемое так:

$$supp^R = \{(x, y) : \mu_R(x, y) > 0, x \in U_1, y \in U_2\}$$

# Нечеткие отношения

*Примеры*

- 1. Пусть нечеткое отношение *R* задано в виде:

| $R$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.1 | 0 | 0.2 | 0 |
| $x_2$ | 0.3 | 0 | 0 | 0.9 |
| $x_2$ | 0.4 | 0.7 | 1 | 1 |

Тогда носитель данного отношения будет иметь вид:

$$S(R)=\{(x_1,y_1),(x_1,y_3),(x_2,y_1),(x_2,y_4),(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_3,y_3),(x_3,y_4)\}$$

2. Рассмотрим отношение $x \underset{\sim}{R} y$, где $x \in R^{+}, y \in R^{+}$ и

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} e^{-(y-x)^2}, |y-x| \le 0{,}46 \\ 0, |y-x| > 0{,}46 \end{cases}$$

Тогда имеем

$$S(\underset{\sim}{R}) = \{(x,y) \mid 0 \le |y-x| \le 0{,}46\}$$

# Нечеткие отношения

Пусть на множестве $U_1 \times U_2$ заданы два нечетких отношения *A* и *B* с функциями принадлежности $\mu_A(x,y)$, $\mu_B(x,y)$, . Тогда множество $C = A \cup B$ представляет собой *объединение* нечетких отношений *A* и *B* на множестве *U,* если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu_C(x,y) = \max\{\mu_A(x,y), \mu_B(x,y)\}$$

Аналогично множество $D = A \cap B$ является *пересечением* нечетких множеств А и *B,* если

$$\mu_D(x,y) = \min\{\mu_A(x,y), \mu_B(x,y)\}$$

# Нечеткие отношения

Примеры

| $R_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0 |
| $x_2$ | 0.8 | 1 | 0 | 0.2 |
| $x_3$ | 0.5 | 0 | 0.4 | 0 |

| $R_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0 | 0.7 | 0 |
| $x_2$ | 0.1 | 0.8 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0.6 | 0.9 | 0.3 | 0.2 |

| $R_1 \cup R_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,3 | 0,4 | 0,7 | 0 |
| $x_2$ | 0,8 | 1 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0,6 | 0,9 | 0,4 | 0,2 |

| $R_1 \cap R_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,3 | 0 | 0,2 | 0 |
| $x_2$ | 0,1 | 0,8 | 0 | 0,2 |
| $x_3$ | 0,5 | 0 | 0,3 | 0 |

## Нечеткие отношения

- Если *R* - нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$, то отношение $\overline{R}$, характеризующееся функцией принадлежности,

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$$

называется *дополнением R* на множестве *X.*

## Нечеткие отношения

Важное значение в теории нечетких множеств имеет *композиция* (или *произведение)* нечетких отношений. В отличие от обычных (четких) отношений композицию (произведение) нечетких отношений можно определить разными способами.

*Максиминная композиция* (произведение) нечетких отношений *A* и *B* на *U* характеризуется функцией принадлежности вида

$$\mu_{AB}(x,z) = \max_{y \in U} \min\{\mu_A(x,y), \mu_B(y,z)\}$$

# Нечеткие отношения

*Минимаксная композиция* нечетких отношений *A* и *B* на *U* (обозначается *A°B)* определяется функцией принадлежности вида

$$\mu_{A\circ B}(x,z)=\min_{y\in U}\max\{\mu_A(x,y),\mu_B(y,z)\}$$

*Максимультипликативная композиция* нечетких отношений *A* и *B на U* есть нечеткое отношение *A*B с* функцией принадлежности вида

$$\mu_{A*B}(x,z)=\sup_{v\in U}\{\mu_A(x,y)\cdot\mu_B(y,z)\}$$

# Нечеткие отношения

Пусть заданы два нечетких отношения $A$ и $B$ на $U$, состоящем из двух элементов $U=\{u_1, u_2\}$, где матрицы нечетких отношений таковы:

$$\mu_A(x,y) = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.5 & 0.8 \end{vmatrix}, \quad \mu_B(y,z) = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогда композиция (произведение) нечетких отношений определяется так:

а) максиминная $R_1^2 = A \cdot B$

$$\mu_{A \cdot B}(x,z) = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.8 \end{vmatrix}$$

б) минимаксная $R_2^2 = A \circ B$

$$\mu_{A \cdot B}(x,z) = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0.7 \end{vmatrix}$$

в) максимультиплекативная $R_3^2 = A * B$

$$\mu_{A \cdot B}(x,z) = \begin{vmatrix} 0.18 & 0.6 \\ 0.25 & 0.8 \end{vmatrix}$$

Поясним применение максиминной свертки на примере.

Пусть R — нечеткое отношение между множествами *U*,*V* которые представляют собой совокупности натуральных чисел от 1 до 4. Семантика отношения *R* соответствует правилу: «ЕСЛИ *u* -малые числа, ТО *v* — большие».

Определим понятия «малые числа» и «большие числа» с помощью нечетких множеств A и B соответственно:

$A$= 1/1 +0.6/ 2 + 0.1/3;

B = 0.1/2 + 0.6/3+1/4.

## Нечеткие отношения

Построим соответствующее нечеткое отношение $R = A \bullet B$:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

Определим отношение *S* из V в *W*. С этой целью на *U* определим понятие «немалые числа», которое будет дополнением введенного ранее нечеткого множества A и обозначим его $\overline{A}$.

$$\overline{A} = 0/1 + 0,4/2 + 0,9/3 + 1/4$$

Введем множество *W*= {1, 2, 3, 4} и определим на нем понятие «очень большие числа», которое обозначим *C*.

*C=0/1+0/2+0,5/3+1/4.*

*Отношение между полными множествами U и W сформулируем в виде правила: «ЕСЛИ v - немалые числа, ТО w - очень большие числа». Построим нечеткое отношение S, соответствующее этому правилу и являющееся подмножеством декартова произведения U и W:*

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}$$

# Нечеткие отношения

*Вычислим максиминную свертку нечетких отношений R•S, результат которой должен соответствовать последовательному применению двух правил: «ЕСЛИ u — малое число, ТО v — большое»; «ЕСЛИ v - немалое число, ТО w - очень большое»:*

$$R \bullet S = \begin{vmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

# Нечеткие отношения

Рассмотрим традиционный дедуктивный вывод, основанный на применении правила вывода Modus Ponendo Ponens, в среде нечетких знаний. Вспомним его формулировку: «ЕСЛИ А — истина, И импликация А $\rightarrow$В - истина, ТО В — истина», т. е. из факта А и правила «ЕСЛИ А, ТО В», можно вывести В

# Нечеткие отношения

В среде нечетких знаний факт *A* и образец правила *A** не обязательно всегда и везде совпадают, так как факты представлены нечеткими множествами, являющимися подмножествами полных знаний, а правила — нечеткими отношениями, которые есть подмножества декартовых произведений полных множеств.

## Нечеткие отношения

Поэтому если *А и А** близки друг к другу, то их можно сопоставить и получить вывод В* в сфере их совпадения. Композиционное правило вывода в среде нечетких знаний базируется на операции максиминной свертки и имеет вид: $B^* = A^* \bullet R$ , где $R$ — нечеткое отношение, соответствующее импликации $A \to B$, а $B^*$ — приближенное заключение

## Нечеткие отношения

Пусть $A$ и $B$— нечеткие множества, соответствующие понятиям «малые числа» и «большие числа» и являющиеся подмножествами полных множеств $U = V= \{1, 2, 3, 4\}$. Функции принадлежности множеств $A$ и $B$ имеют вид:

$A= 1/1 +0.6/ 2 + 0.1/3;$

$B = 0.1/2 + 0.6/3+1/4.$

## Нечеткие отношения

Пусть также задано правило *A*→*B:* «ЕСЛИ *u* — малые числа, ТО *v* - большие», формализованное нечетким отношением *R*

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

# Нечеткие отношения

В качестве исходной посылки для вывода задан факт: «*u* — число около 2», представленный нечетким множеством *F* функцией принадлежности $\mu_F(u) = 0,3/1 + 1/2 + 0,3/3$.

Используя композиционное правило вывода, попробуем дать ответ на вопрос: «Что представляет собой *v*, если *u* — число около 2, и, если области *U* и *V* связаны отношением R .

$$G=F\bullet R=\begin{bmatrix}0,3 & 1 & 0,3 & 0\end{bmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0,1 & 0,6 & 1\\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,6\\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0,1 & 0,6 & 0,6\end{bmatrix}$$

## Нечеткая и лингвистическая переменные

Целью введения нечеткого множества чаще всего является формализация нечетких понятий и отношений естественного языка (ЕЯ). Данную формализацию можно выполнить, воспользовавшись понятиями нечеткой и лингвистической переменных.

*Нечеткой переменной* называется совокупность (кортеж) вида <X,U,Z>

- *X*- наименование нечеткой переменной.
- *U*= *{u}* - область ее определения (универсальное множество);
- *Z* = $\underset{u \in U}{Y} \mu_Z(u)/u$ - нечеткое множество на *U,*

описывающее ограничения на значения нечеткой переменной *X.*

**Нечеткая и лингвистическая переменные**

*Лингвистической переменной (ЛП) называется кортеж вида*

*<β, T, U, G, M>, где*

- *β* - наименование лингвистической переменной
- *T* - множество ее значений (терм-множество), представляющих собой наименование нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество U. Множество Т называется базовым терм-множеством лингвистической переменной
- *G* - синтаксическая процедура, описывающая процесс образования из элементов множества Т новых, осмысленных для данной задачи значений лингвистической переменной (терм).
- *M* - семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение ЛП, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную, т.е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

**Нечеткая и лингвистическая переменные**

*Примеры лингвистических переменных*

1. Пусть эксперт определяет толщину выпускаемого изделия с помощью понятий *«Малая толщина», «Средняя толщина»* и *«Большая толщина»,* при этом минимальная толщина равна 10 мм, а максимальная - 80 мм.

- Формализация такого описания может быть проведена с помощью следующей ЛП < *β, T, U, G, M*>, где
- *β*- толщина изделия;

## Нечеткая и лингвистическая переменные

- *T- {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»};*
- *U=[10,80];*

G - синтаксическая процедура образования новых термов с помощью связок *«и», «или»,* и модификаторов (лингвистических неопределенностей) типа *«очень», «не», «слегка»* и т.п. Например, *«Малая или средняя толщина», «Очень малая толщина», «Не очень большая толщина»* и т.д.

- *M* - семантическая процедура задания на *U= [10,80]* нечетких множеств *A1=«Малая толщина», A2= «Средняя толщина», A3=«Большая толщина»*, а также нечетких множеств для термов из *G(T)* в соответствии с правилами трансляции нечетких связок, лингвистических неопределенностей и других операций над нечеткими множествами.

***Пример 2***

Пусть *β* - посадочная скорость самолета (скорость). Тогда *Скорость :*= (скорость, <*малая, небольшая, средняя, высокая*>*,* [0..300],*G, M),* где

G - процедура перебора элементов базового терм-множества.

*M*-процедура экспертного опроса.

## Нечеткая и лингвистическая переменные

В общем случае значение лингвистической переменной есть составной термин, представляющий сочетание некоторых элементарных терминов. Эти элементарные термины можно разбить на четыре основные категории:

- *первичные термины,* которые являются символами специальных нечетких подмножеств, например, *молодой, старый* и т.д.
- отрицание НЕ и союзы И, ИЛИ.
- неопределенности типа: *очень, слабо, более или менее* и т.д.
- маркеры, чаще всего это вводные слова.

Отрицание НЕ, союзы И, ИЛИ, неопределенности типа *очень, весьма, больше, меньше* и другие термины, которые входят в определение значений лингвистической переменной, могут рассматриваться как символы различных операций, определенных на нечетких подмножествах *U.*

## Лингвистические неопределенности

Значениями лингвистической переменной являются символами нечетких подмножеств, которые представляют собой фразы или предложения формального или естественного языка.

Например, если *U* есть набор целых чисел U= (0, 1, 2,. .., 100) и возраст есть лингвистическая переменная, тогда значения лингвистической переменной могут определяться словосочетаниями: *молодой, не молодой, очень молодой, не очень молодой, старый* и т.д.

Основная проблема, которая возникает при использовании лингвистической переменной, заключается в следующем: пусть дано значение любого элементарного термина $x_i$, $i = 1..n$, в составном термине $u = x_1...x_n$, который представляет собой значение лингвистической переменной. Требуется вычислить значение и в смысле нечеткого множества.

## Лингвистические неопределенности

Рассмотрим более простую задачу - вычисление значения составного термина вида *u* = *hx*, где *h* - неопределенность, а *x* - термин с фиксированным значением. Например, *u* = *очень высокий человек*, где *h* = очень, а *x* = *высокий человек.*

## Лингвистические неопределенности

Будем рассматривать *h* как оператор, который переводит нечеткое множество *M(x)*, представляющее значение *x*, в нечеткое *M(hx)*. Теперь неопределенность выполняет функцию генерации большого множества значений для лингвистической переменной из небольшого набора первичных элементов.

Например, используя неопределенность *очень* в сочетании с отрицанием *НЕ* и первичным термином *высокий,* мы можем генерировать нечеткие множества *очень высокий, не очень высокий* и т.п.

## Лингвистические неопределенности

В обычном использовании неопределенность *очень* не имеет четко определенного значения. Она действует как усилитель, генерируя подмножества того множества, к которому она применяется. Аналогичным образом действует операция концентрирования. Поэтому *очень u,* где *u* - некоторый термин, может быть определенно как $u^2$*,* т.е.

$$\text{очень}\, u = u^2 = \bigcup_u \mu_u^2(u)/u\,.$$

## Лингвистические неопределенности

Например, если *u* = *маленький возраст* = (1/1, 0.8/2, 0.6/3, 0.4/4, 0.2/5), тогда

*очень маленький* = (1/1, 0.64/2, 0.36/3, 0.16/4, 0.04/5).

Рассматриваемый как оператор, *очень* может сочетаться с самим собой. Так, например:

*очень очень маленький* = (1/1, 0.4/2, 0.1/3)

## Лингвистические неопределенности

Порядок следования элементарных терминов в составном термине существенно влияет на результат. Так, например:

$$u=\text{î÷åíü íåòî÷íî} = \left(\overline{\text{òî÷íî}}\right)^2$$

$$u=\text{íå î÷åíü òî÷íî} = \overline{(\text{òî÷íî})^2}$$

не одно и то же.

## Лингвистические неопределенности

Искусственные неопределенности *плюс* и *минус* служат для придания более слабых степеней концентрации и растяжения, чем те, которые определяются операциями CON и DIV.

$$\text{ï ëþ ñ u}=u^{1,25}=\underset{u\in U}{\mathrm{Y}}\left(\mu_u\right)^{1,25}/u$$

$$\text{ì èí óñ u}=u^{0,75}=\underset{u\in U}{\mathrm{Y}}\left(\mu_u\right)^{0,75}/u$$

## Лингвистические неопределенности

Приближенные тождества, которыми часто пользуются на практике:

*плюс и = минус очень и*

*минус очень очень и = плюс плюс очень и*

## Лингвистические неопределенности

### Пример

Пусть *u* = *маленький возраст* = (1/1, 0.8/2, 0.6/3, 0.4/4, 0.2/5). Определим лингвистическую переменную *не очень очень маленький возраст.*

$$u = \overline{(\textit{очень маленький})^2} = (0/1,\ 0.36/2,\ 0.64/3,\ 0.84/4,\ 0.96/5) \approx (0.4/2,\ 0.6/3,\ 0.8/4,\ 1/5).$$

$$\textit{очень маленький} = (1/1,\ 0.64/2,\ 0.36/3,\ 0.16/4,\ 0.04/5).$$

$$(\textit{очень маленький})^2 = (1/1,\ 0.41/2,\ 0.13/3,\ 0{,}03/4,\ 0.001/5).$$

$$\overline{(\textit{очень маленький})^2} = (0/1,\ 0.59/2,\ 0.87/3,\ 0.97/4,\ 0.999/5),$$ здесь инверсия = $(1 - \mu(x)/x)$.

## Лингвистические неопределенности

Пример 2

Пусть

$u_1$ = *маленький возраст* = (1/1, 0.8/2, 0.6/3, 0.4/4, 0.2/5).

$u_2$ = *большой возраст* = (0.2/1, 0.4/2, 0.6/3, 0.8/4, 1/5).

Определим лингвистическую переменную.

*u* = *не очень маленький* и *не очень очень большой возраст*.

# Лингвистические неопределенности

*очень маленький* = (1/1, 0.64/2, 0.36/3, 0.16/4, 0.04/5),

*не очень маленький* = (0.36/2, 0.64/3, 0.84/4, 0.96/5),

*очень большой возраст* = (0.04/1, 0.16/2, 0.36/3, 0.64/4, 1/5),

*очень очень большой возраст* = (0.001/1, 0.03/2, 0.13/3, 0.41/4, 1/5),

*не очень очень большой возраст* = (0.998/1, 0.97/2, 0.87/3, 0.59/4).

Таким образом,

$u = \overline{(u_1)^2}\ \mathrm{I}\ \overline{(u_2)^4} =$ (0.36/2, 0.64/3, 0.84/4, 0.96/5) $\cap$ (0.998/1, 0.97/2, 0.87/3, 0.59/4) = (0.36/2, 0.64/3, 0.59/4)