Эффективная масса носителей заряда:

В электрическом поле:

$$\mathbf{F} = -e\mathcal{E} \qquad \mathbf{a} = \frac{1}{m_0}\mathbf{F} = -\frac{1}{m_0}e\mathcal{E}$$

Ускорение:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}F.$$

Ускорение для трехмерного случая:

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial^2 E}{\partial p_x^2}F_x + \frac{\partial^2 E}{\partial p_x \partial p_y}F_y + \frac{\partial^2 E}{\partial p_x \partial p_z}F_z;\\
a_y &= \frac{\partial^2 E}{\partial p_y \partial p_x}F_x + \frac{\partial^2 E}{\partial p_y^2}F_y + \frac{\partial^2 F}{\partial p_y \partial p_z}F_z;\\
a_z &= \frac{\partial^2 E}{\partial p_z \partial p_x}F_x + \frac{\partial^2 E}{\partial p_z \partial p_y}F_y + \frac{\partial^2 E}{\partial p_z^2}F_z.
\end{aligned}\right\}$$

Обратный тензор эффективной массы (тензор второго ранга):

$$\mathbf{m}^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial p_x^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial p_x \partial p_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial p_x \partial p_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial p_y \partial p_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial p_y^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial p_y \partial p_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial p_z \partial p_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial p_z \partial p_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial p_z^2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_{xx}^{-1} m_{xy}^{-1} m_{xz}^{-1} \\ m_{yx}^{-1} m_{yy}^{-1} m_{yz}^{-1} \\ m_{zx}^{-1} m_{zy}^{-1} m_{zz}^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Эффективная масса носителей заряда:

Скорость движения электрона в малой окрестности экстремальной точки (i=x,y,z и j=x,y,z):

$$v_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} = \sum_i \frac{p_j - p_{0j}}{m_{ij}}$$

X-компонента скорости:

$$v_x = \frac{p_x - p_{0x}}{m_{xx}} + \frac{p_y - p_{0y}}{m_{xy}} + \frac{p_z - p_{0z}}{m_{xz}}$$

В векторной форме:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\mathbf{m}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

Диагональный вид тензора обратной эффективной массы:

$$\mathbf{m}^{-1} = \begin{Vmatrix} m_{xx}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & m_{zz}^{-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & m_3^{-1} \end{Vmatrix}$$

Диагональный вид тензора эффективной массы:

$$\{\mathbf{m}^{-1}\}^{-1} = \mathbf{m} = \begin{Vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{Vmatrix}$$

Энергия электрона вблизи экстремальной точки k0:

$$E(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}_0) + \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_x^2 - \mathbf{k}_{0x})^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_y - \mathbf{k}_{0y})^2}{2m_2} + \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_z - \mathbf{k}_{0z})^2}{2m_3}$$

Эффективная масса носителей заряда:

Энергия:

$$E(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}_0) + \frac{(p_x - p_{0x})^2}{2m_1} + \frac{(p_y - p_{0y})^2}{2m_2} + \frac{(p_z - p_{0z})^2}{2m_3};$$

Скорость:

$$v_i = \frac{p_i - p_{0i}}{m_i} = \frac{\partial E}{\partial p_i}$$

Уравнение эллипсоида в каноническом виде:

$$\frac{(p_x - p_{0x})^2}{a^2} + \frac{(p_y - p_{0y})^2}{b^2} + \frac{(p_z - p_{0z})^2}{c^2} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 2m_1 [E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}_0)]; \\ b^2 &= 2m_2 [E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}_0)]; \\ c^2 &= 2m_3 [E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}_0)]. \end{aligned}\right\}$$

Если принять $E(\mathbf{p}_0) = E_0$, то

$$p_i - p_{0i} = \sqrt{2m_i (E - E_0)};$$

$$v = \frac{p_i - p_{0i}}{m_i} = \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{m_i}}.$$

Для кристаллов с кубической симметрией m1=m2=m3. Уравнение для изоэнергитических поверхностей:

$$E(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}_0) + \frac{p^2}{2m^*} = \mathrm{const}$$

Эффективная масса носителей заряда:

Эффективная масса:
$$\frac{1}{m^*} = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \mathrm{k}^2}.$$

Если электрон находится в окрестности минимума энергии:
$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mathrm{k}^2} > 0 \text{ и } m^* = \mathrm{const} > 0,$$

$$\mathbf{F} = m^*\mathbf{a},$$ $$a = \frac{dv}{dt}$$ $$F = \frac{dp}{dt}$$ $$\mathbf{p} = m^*\mathbf{v},$$

Если электрон находится в окрестности максимума энергии:
$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mathrm{k}^2} < 0 \text{ и } m^* = \mathrm{const} < 0$$

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{F}}{m^*}$$ $$\mathbf{F} = -e\mathcal{E}$$ $$\mathbf{a} = \frac{-|e|\mathcal{E}}{-|m^*|} = \frac{e\mathcal{E}}{m^*}$$

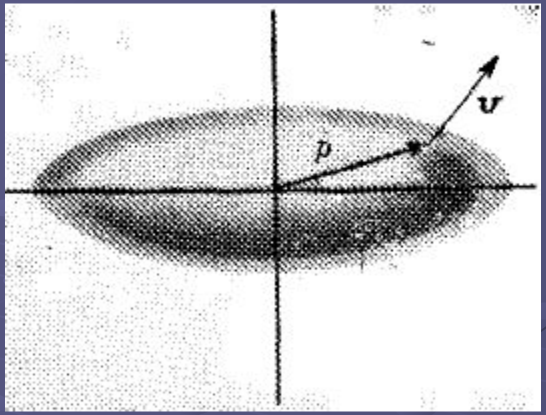
Если электрон удален от краев зоны:
$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mathrm{k}^2} = 0 \text{ и } m^* \to \infty,$$

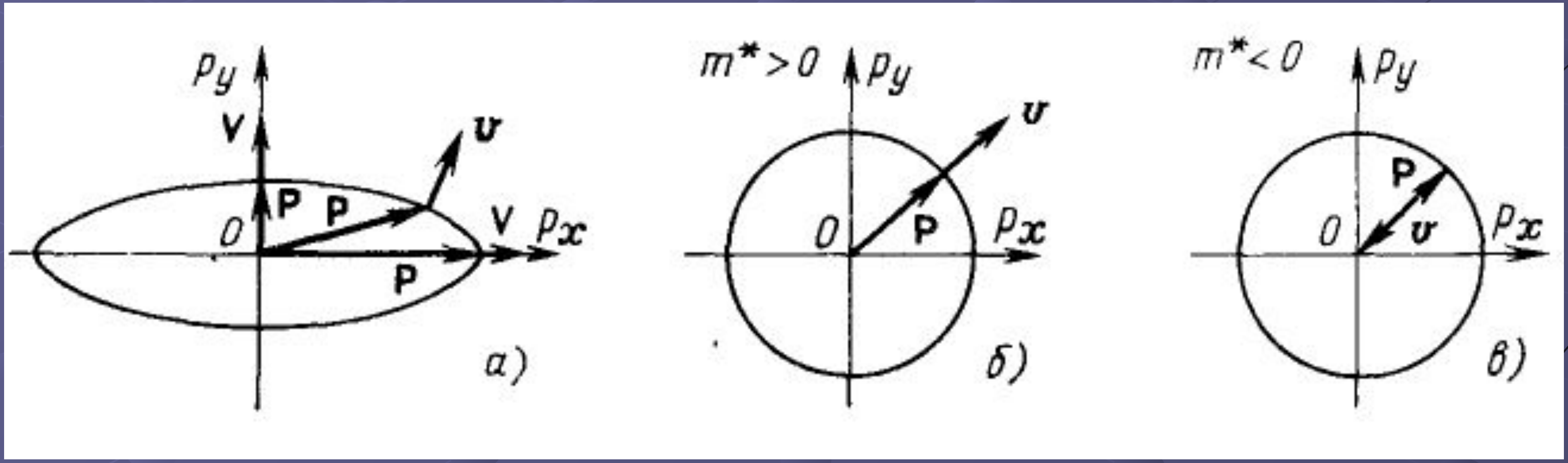
Предельные случаи:

- Зона почти свободна. $m_n^* = \mathrm{const} > 0$
- Зона почти заполнена электронами. $m_p^* = \mathrm{const} > 0$

Эллипсоидальные и сферические поверхности

Скорость и квазиимпульс электрона на эллипсоидальной поверхности энергии. Вектор v нормален к поверхности энергии; векторы v и p в общем случае неколлинеарны.





Направление радиуса-вектора и нормали к изоэнергетической поверхности.

а) эллипсоидальные поверхности энергии; б) сферические поверхности энергии при положительной эффективной массе; в) сферические поверхности энергии при отрицательной эффективной массе.

Циклотронный резонанс

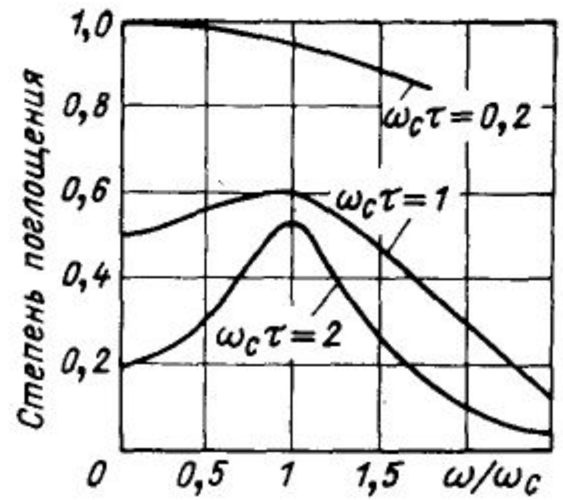
В постоянном магнитном поле с индукцией B на движущийся со скоростью v электрон действует сила Лоренца: $\mathbf{F} = -e[\mathbf{vB}]$. При этом электрон будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

Круговую частоту вращения (циклотронную частоту) можно вычислить из равенства центробежной силы и силы Лоренца $m^* v^2/r = evB$ $\quad \omega_c = \dfrac{v}{r} = \dfrac{eB}{m^*}$

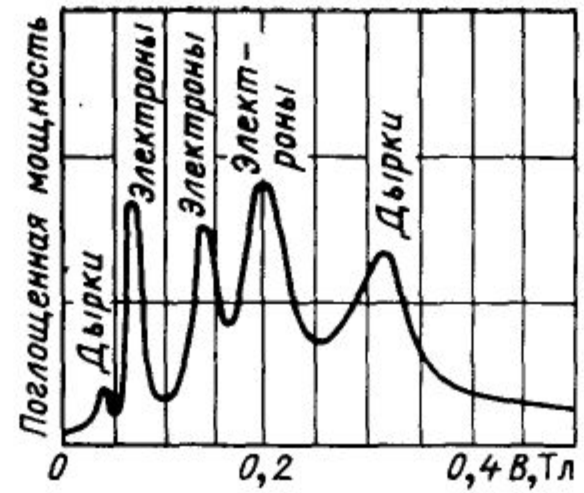
ЦИКЛОТРОННАЯ ЧАСТОТА НЕ ЗАВИСИТ ОТ СКОРОСТИ И РАДИУСА ОКРУЖНОСТИ!!!

Условие эксперимента:

$$\tau \gg \frac{1}{\omega_c}$$



Поглощение при циклотронном резонансе в зависимости от напряженности постоянного магнитного поля (в единицах ω/ω_c)



Поглощение при циклотронном резонансе в германии (B — индукция)

Распределение носителей в зонах

Плотность состояний: $N(E) = \frac{dZ}{dE}$

Изменение концентрации электронов: $dn = f(E,\ T)\,dZ = f(E,\ T)\,N(E)\,dE$.

Интегрируем: $n = \int_{E_1}^{E_2} f(E,\ T)\,N(E)\,dE$.

Плотность квантовых состояний у дна зоны проводимости:

$$N(E) = 4\pi\left(2m_n^*/h^2\right)^{3/2}(E - E_c)^{1/2}.$$

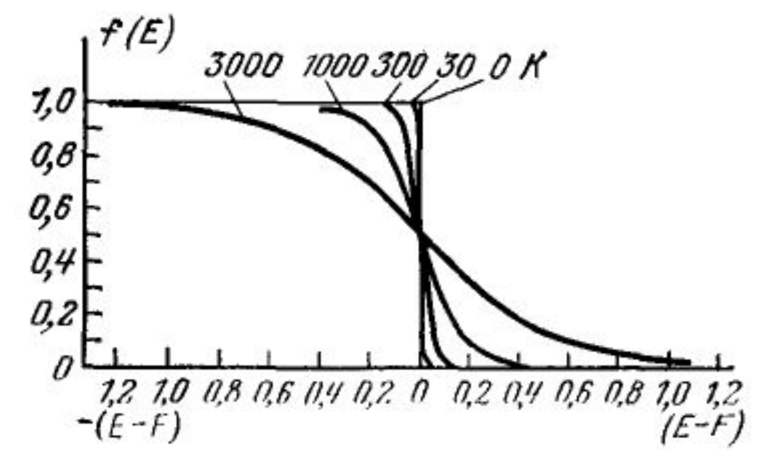
Плотность квантовых состояний у потолка валентной зоны:

$$N(E) = 4\pi\left(2m_p^*/h^2\right)^{3/2}(E_v - E)^{1/2}.$$

Распределение Ферми-Дирака

Функция распределения Ферми-Дирака заполнения уровня электроном:

$$f_0(E) = \frac{1}{e^{(E-F)/kT} + 1},$$



Вид функции распределения Ферми—Дирака

При T=0 при 0<=E<F f_0=1

При T=0 при E>F f_0=0

Все квантовые состояния с E<F заняты электронами, а уровни E>F не заняты электронами.

При T>0 при E=F f0=1/2

При T>0 при E<F по функции f(E)

При T>0 при E>F по функции f(E)

Функция распределения Ферми-Дирака заполнения уровня дыркой:

$$f_{0p}(E) = 1 - f_0(E) = 1 - \frac{1}{e^{(E-F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{(F-E)/kT} + 1}$$

Если E-F>>kT, то п/п невырожденный.

(статистика Больцмана)

$$f_0(E) = e^{(F-E)/kT} = Ce^{-E/kT}$$