

[http://www.youtube.com/watch?v=c7m\\_MpLFJXY](http://www.youtube.com/watch?v=c7m_MpLFJXY)

Учебный фильм по интерференции

<http://www.youtube.com/watch?v=SV3nlDWJBIs>

Учебный фильм по дифракции

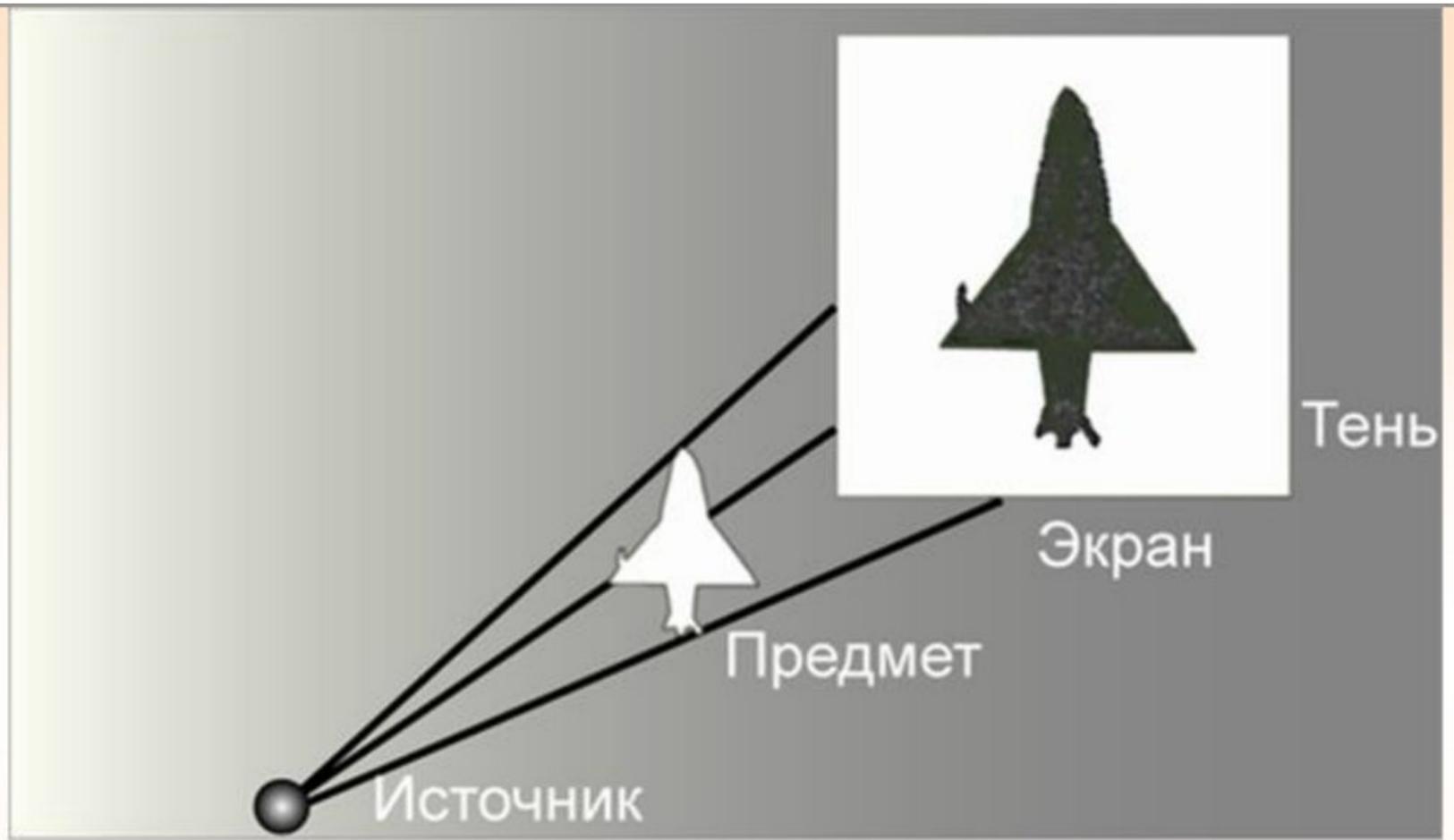
# Дифракция

света.

ОСНОВНЫЕ

ЭКСПЕРИМЕНТЫ.





Тень, отбрасываемая предметом, обусловлена прямолинейностью распространения световых лучей в оптически однородных средах

Если размеры препятствия много больше длины волны, то волны за него не проникают, создается область тени: световая тень, звуковая тень, ограничения при передаче телевизионного сигнала...



Область тени в случае поверхностных волн: невозмущенная поверхность воды за большим валуном

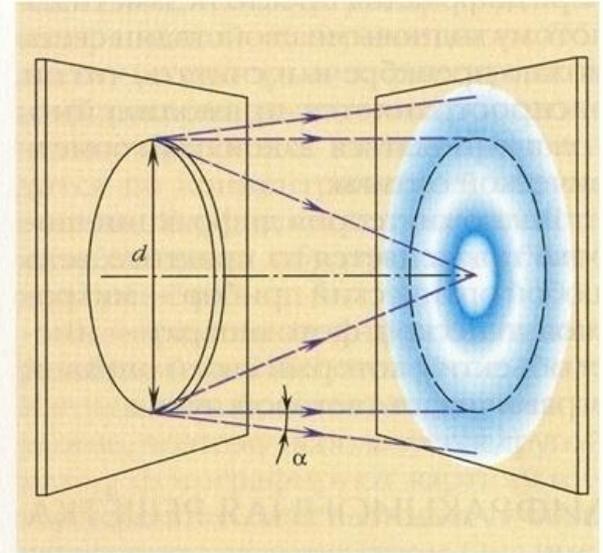
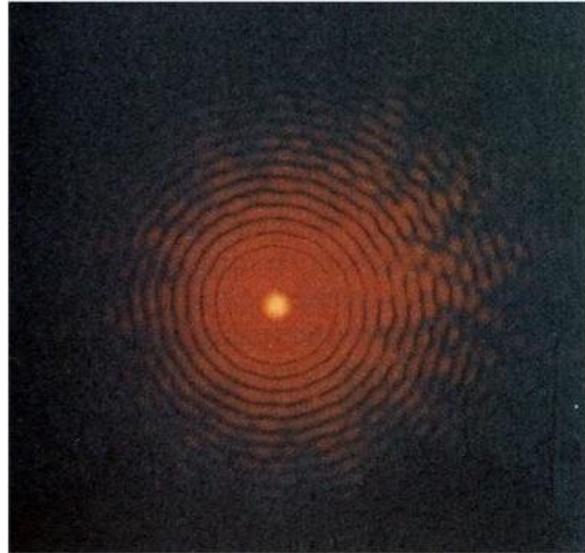
Дифракция— это всякое отклонение от прямолинейного распространения света, если оно не может быть истолковано как результат отражения, преломления или изгибания световых лучей в средах с непрерывно меняющимся показателем преломления.

1. Дифракция от точечного источника на диске.

«Пятно Пуассона»

Ж. Н. Делиль,  
1715 г.,

О. Ж. Френель,  
1818 г.



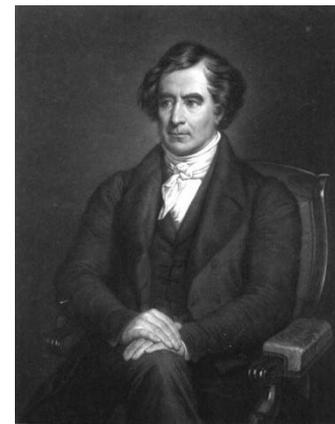
Пуассон «вывел из интегралов автора (Френеля) тот результат, что центр тени от круглого непрозрачного экрана должен быть таким же освещённым, как если бы экран не существовал» (Араго).

# ЕСТЬ ЛИ В ЦЕНТРЕ ТЕНИ СВЕТЛОЕ ПЯТНО?

Французская академия наук (1818 г)



*Симеон Дени Пуассон*



Доминик  
Франсуа  
Жан  
Араго



*Огюстен Жан Френель*

# Основные эксперименты по дифракции

1. Заложил основы теории дифракции света.
2. Исследовал поляризацию света («призма Френеля», представление о естественном свете, как сумме плоско поляризованных волн, поперечность световых волн).
3. Заложил основы кристаллооптики.
4. Изучил рефракцию света атмосферой.
5. Разработал систему освещения маяков, в которой важнейшей частью была сконструированная Френелем ступенчатая линза.



Огюст Жан Френель  
(1788 - 1827)

# Основные эксперименты по дифракции

## Дифракция плоских волн.

### (Йозеф Фраунгофер (1787 – 1826))

1. Дифракция на щели (отверстии).
2. Дифракция на преграде (нити).
3. Дифракция на периодической структуре (дифракционной решётке)

См. наши лабораторные работы

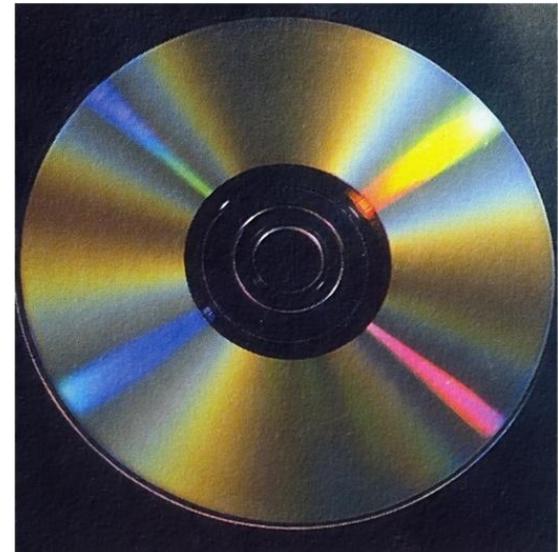
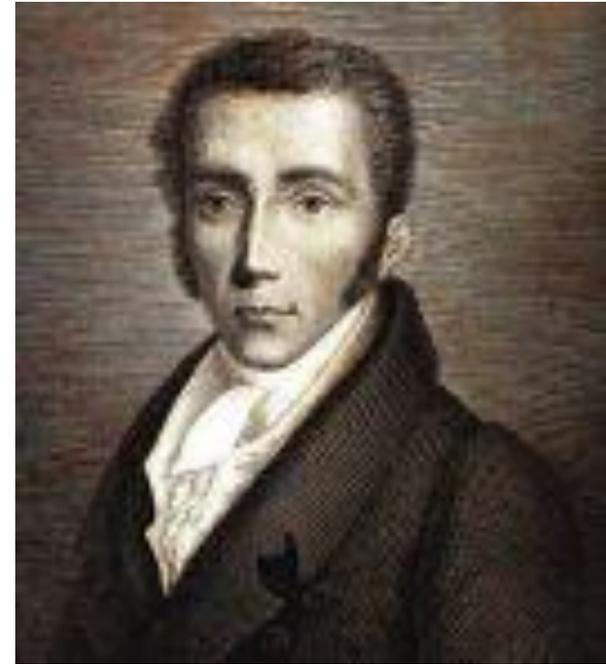
На сайте Варгина А.Н.

[http://www.ph4s.ru/book\\_ph\\_optica.html](http://www.ph4s.ru/book_ph_optica.html)

выложен сборник

**В.В. Лосев, Т.В. Морозова. Оптика.**

Лабораторный практикум по курсу общей физики. 2008 год. Рассмотрена подробно теория с поясняющими графиками и рисунками лабораторных работ.

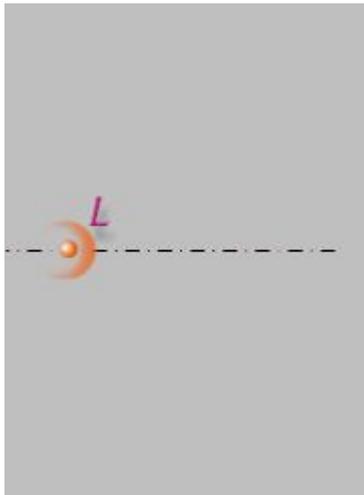
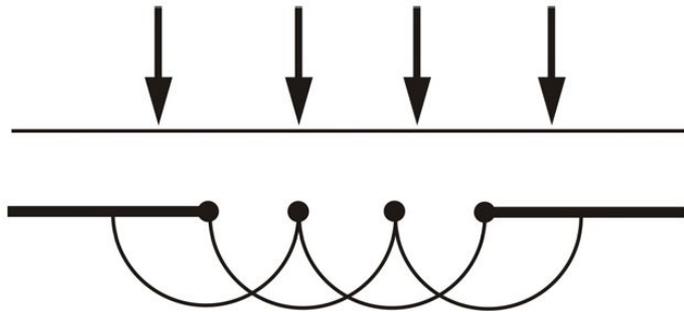


**Принцип  
Гюйгенса-Френеля.  
Метод зон Френеля.**



# Принцип Гюйгенса - Френеля.

Распространение электромагнитных волн можно описывать с помощью принципа Гюйгенса – Френеля.



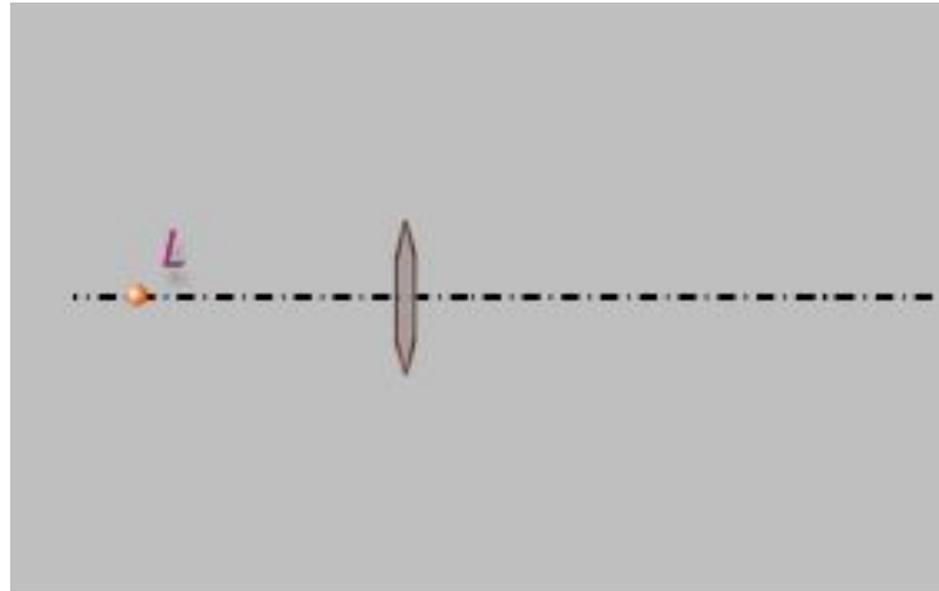
Построение огибающей волны:

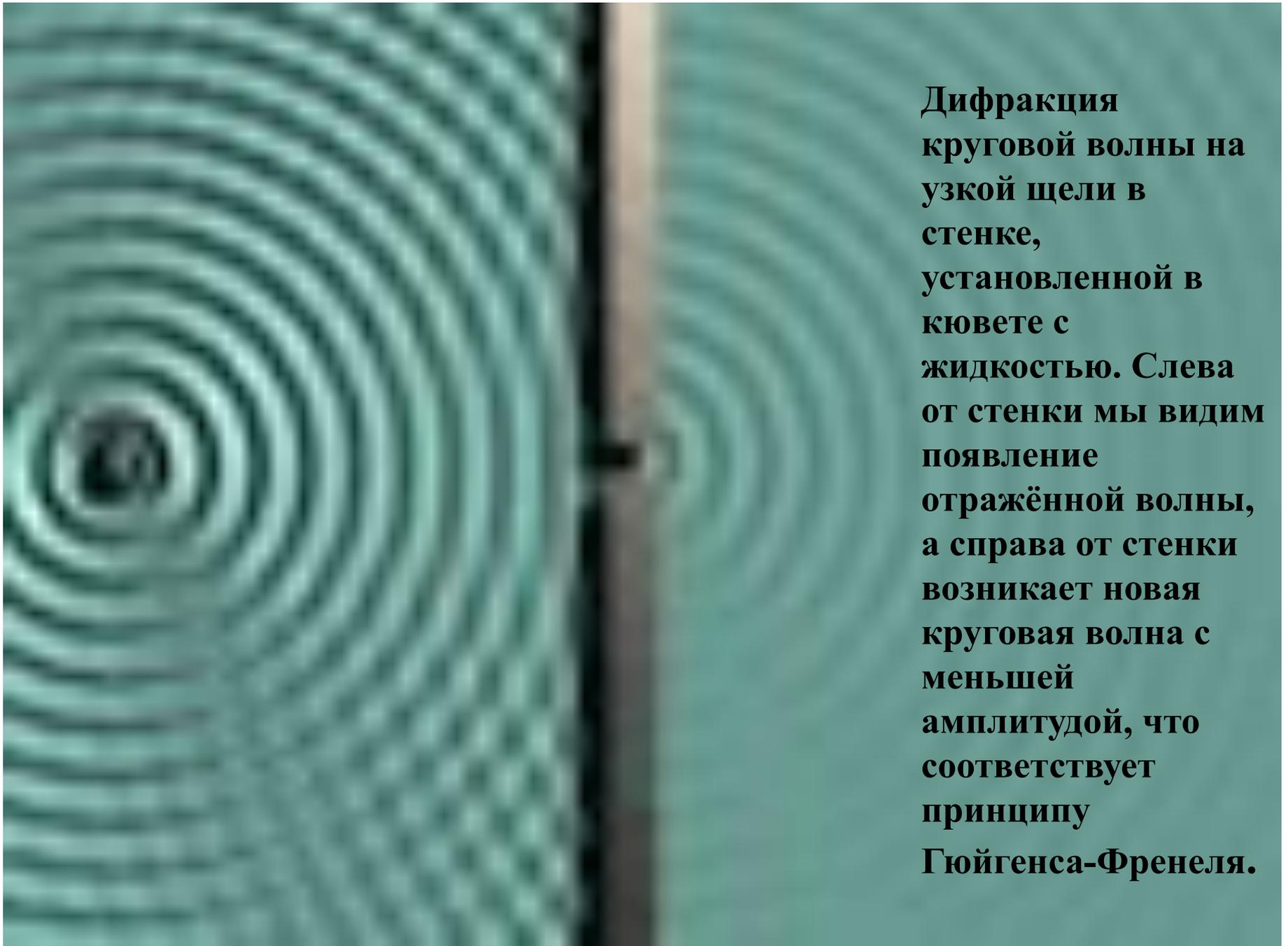
**Каждый элемент поверхности, которой достигла в данный момент волна (т.е. каждая точка волнового фронта) является центром вторичных волн, огибающая которых становится волновым фронтом в более поздний момент времени – принцип Гюйгенса**

**Принцип Гюйгенса** лежит в основе некоторых приближенных методов решений задач дифракции, так как позволяет получить волновой фронт в любой момент времени. Гюйгенс считал, что отдельные вторичные волны слишком слабы и что заметное световое действие они производят только на их огибающей. Огибающая вторичных волн обрывается на границе геометрической тени. За границу геометрической тени проникнут только отдельные вторичные волны, действие которых по предположению Гюйгенса пренебрежимо мало. Пользуясь этим принципом, можно объяснить такие явления как распространение света от точечного источника, распространение светового пучка, отражение и преломление света.

Для объяснения огибания световыми волнами препятствий, Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением о том, что вторичные световые волны могут, как усиливать, так и ослаблять друг друга. Иначе говоря, они могут интерферировать. Кроме того, Френель предположил, что амплитуда вторичной волны убывает с увеличением угла между нормалью к волновому фронту и направлением излучения вторичной волны.

Если световая волна в какой-то момент времени встречает на своем пути препятствие, то, пользуясь **принципом Гюйгенса-Френеля**, мы также можем найти волновой фронт в следующий момент времени, только в этом случае источником вторичных волн будет открытая часть волнового фронта, поскольку через непрозрачную часть препятствия излучение не проходит.

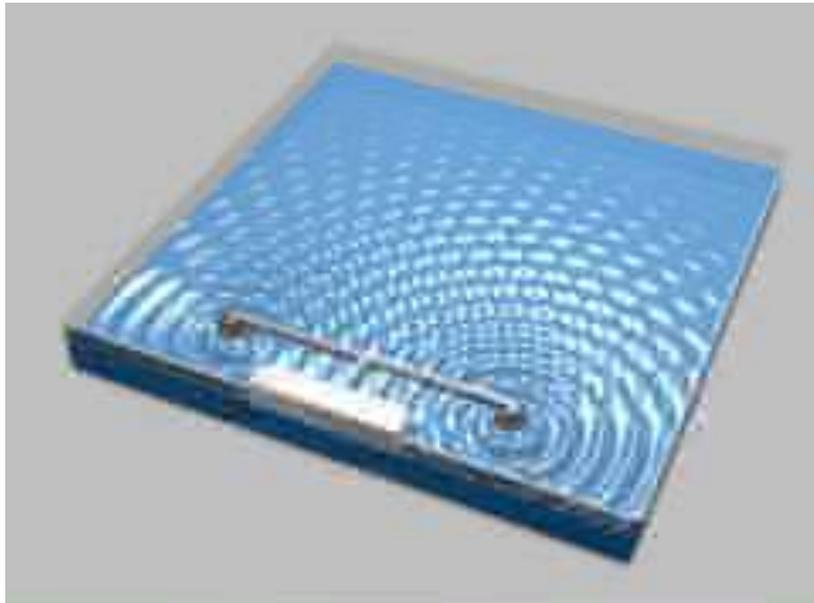




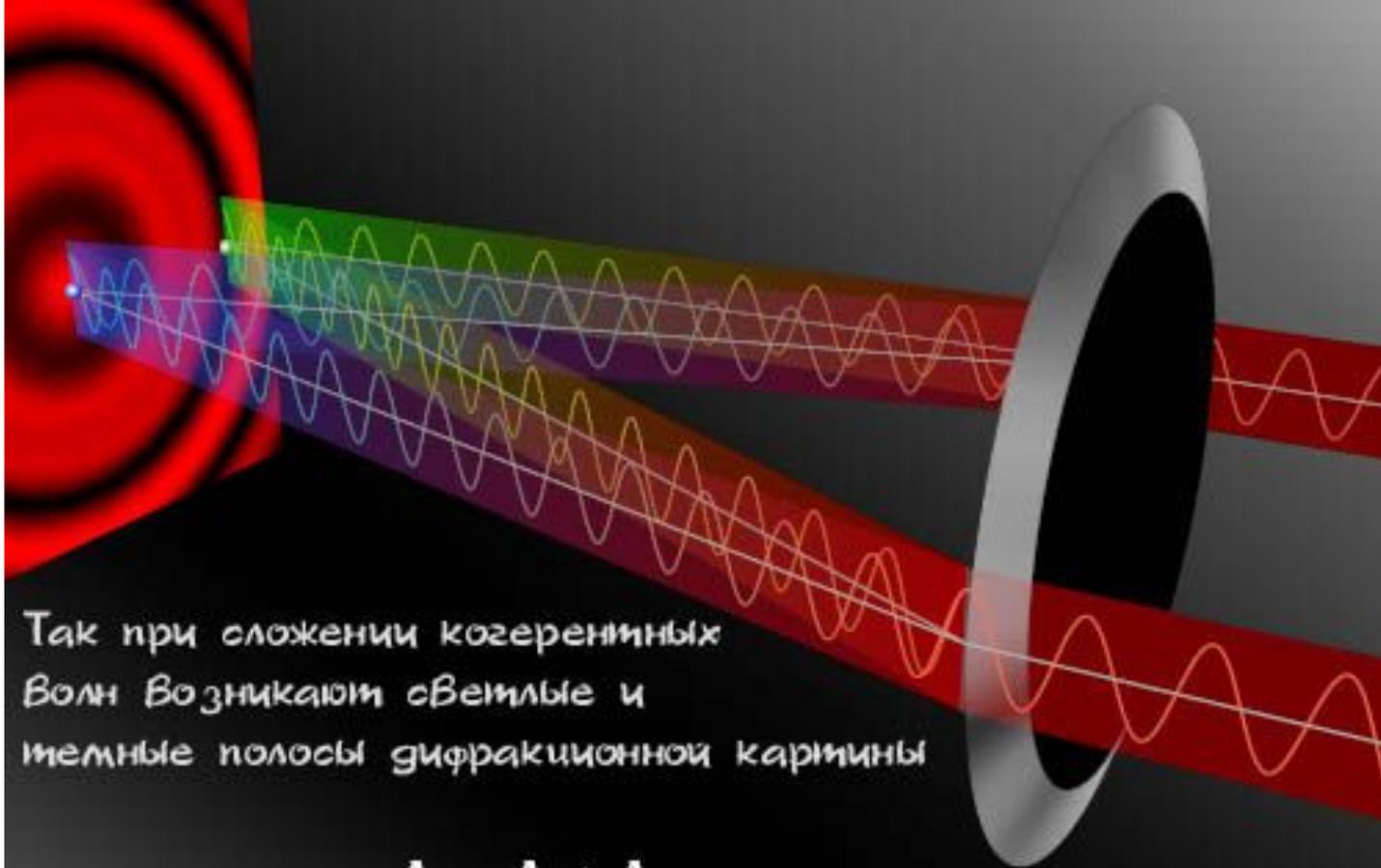
**Дифракция  
круговой волны на  
узкой щели в  
стенке,  
установленной в  
кювете с  
жидкостью. Слева  
от стенки мы видим  
появление  
отражённой волны,  
а справа от стенки  
возникает новая  
круговая волна с  
меньшей  
амплитудой, что  
соответствует  
принципу  
Гюйгенса-Френеля.**



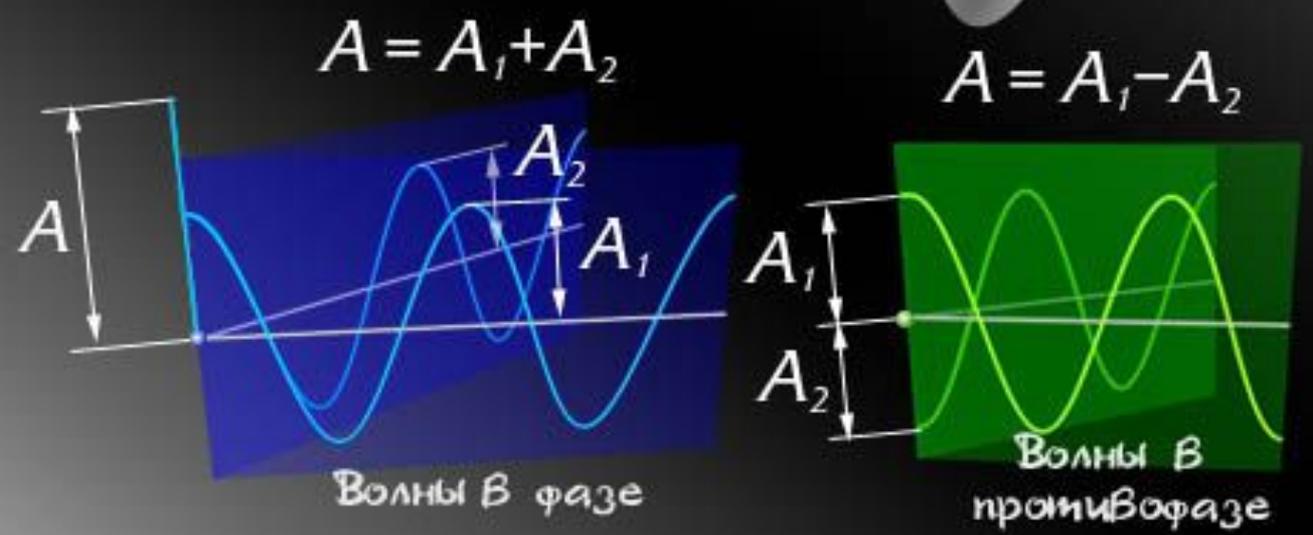
Вид дифракционной картины, возникающей на экране (систему чередующихся светлых и темных колец для случая, когда дифракция происходит на диске), можно объяснить, лишь принимая во внимание интерференцию вторичных волн. Освещенность в каждой точке экрана (то есть вид дифракционной картины) есть результат общего (суммарного) действия вторичных волн. Поэтому, чтобы найти световое поле в каждой точке экрана, нужно просуммировать напряженности электрических полей от всех вторичных источников, приходящих в данную точку. Результат сложения волн зависит как от амплитуды. Освещенность в каждой точке экрана (то есть вид дифракционной картины) есть результат общего (суммарного) действия вторичных волн. Поэтому, чтобы найти световое поле в каждой точке экрана, нужно просуммировать напряженности электрических полей от всех вторичных источников, приходящих в данную точку. Результат сложения волн зависит как от амплитуды, так и от разности фаз. Френель



Вспомним как складывались две когерентные волны на примере механических волн на поверхности жидкости. Мы видим, что в тех местах, где встречаются гребни волн (разность фаз равна нулю), происходит усиление возмущения поверхности воды, а там, где гребень одной волны встречается с впадиной другой (волны находятся в противофазе), поверхность воды практически не будет возмущена. Таким образом, в результате сложения когерентных волн образуется интерференционная картина - устойчивое во времени распределение суммарной амплитуды.



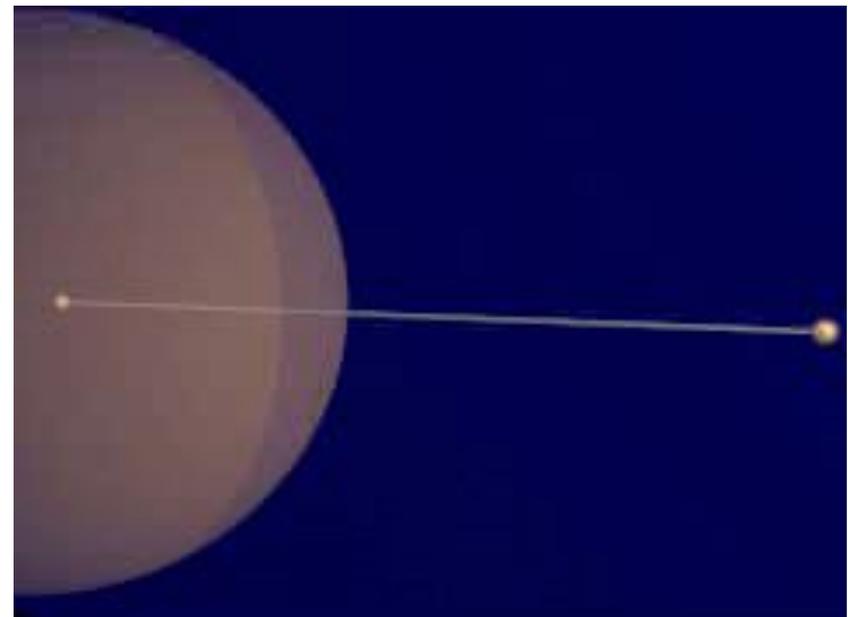
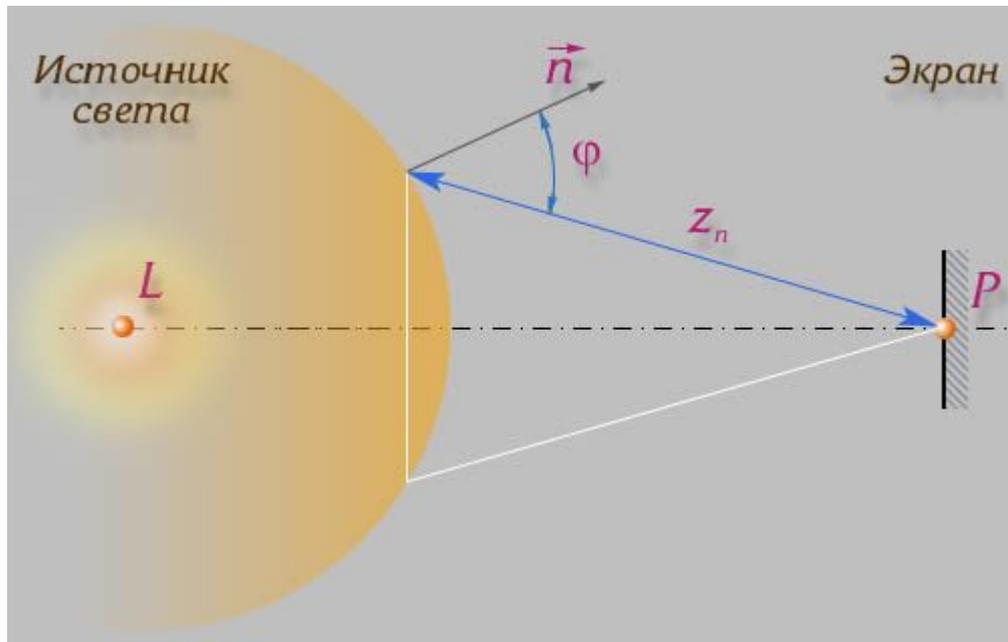
Так при сложении когерентных волн возникают светлые и темные полосы дифракционной картины

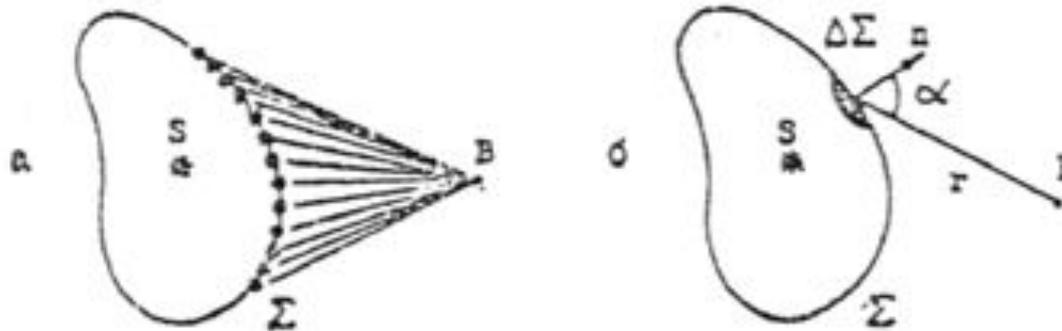


Таким образом, **принцип Гюйгенса-Френеля** формулируется следующим образом:

**Каждый элемент волнового фронта можно рассматривать как центр вторичного возмущения, порождающего вторичные сферические волны, а результирующее световое поле в каждой точке пространства будет определяться интерференцией этих волн.**

На этом принципе основан метод зон Френеля

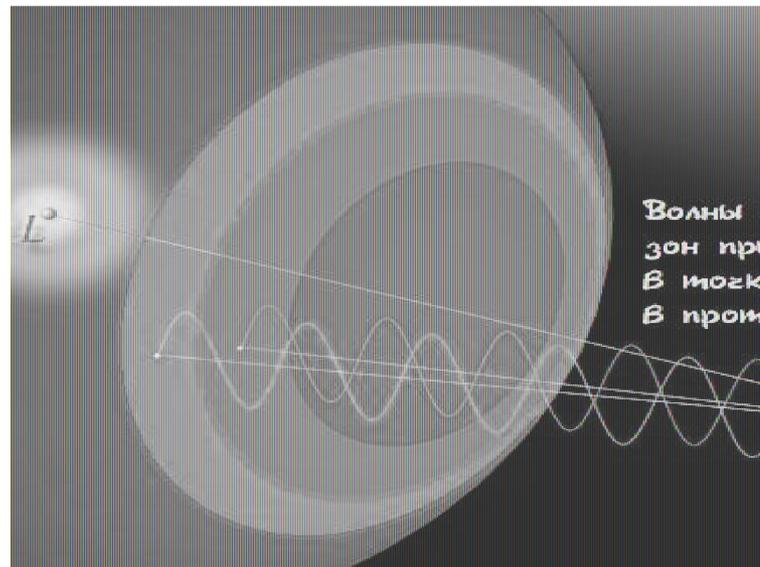


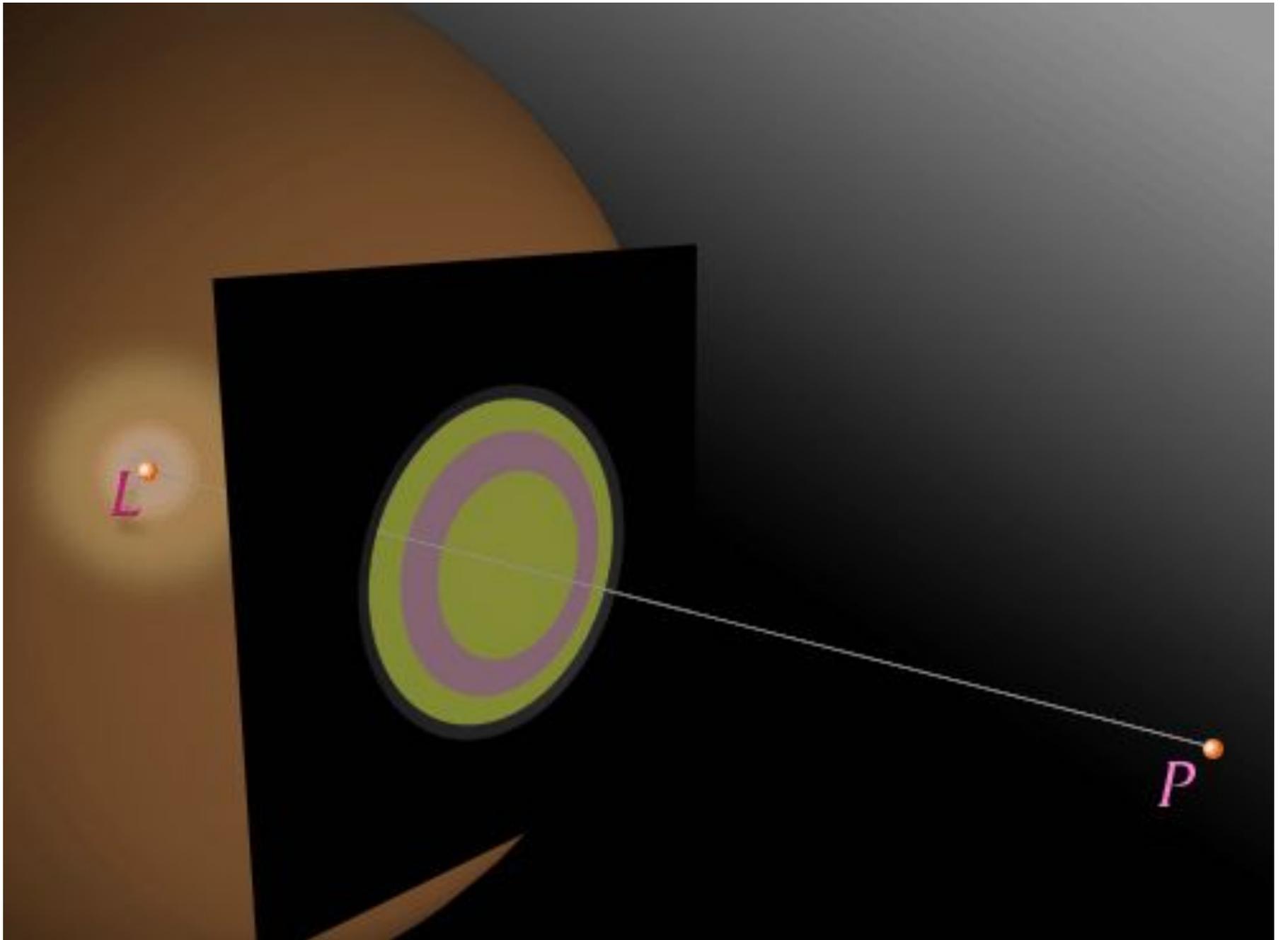


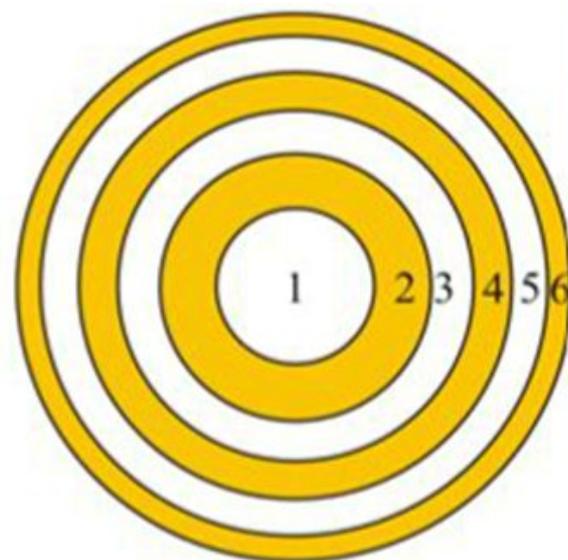
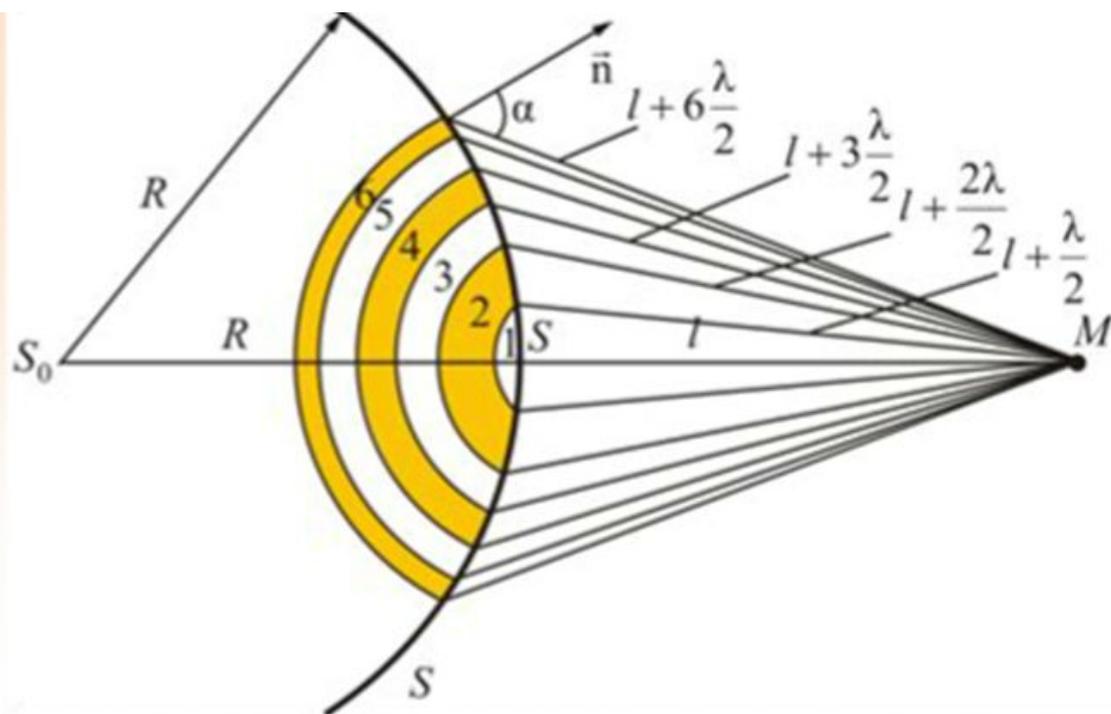
Используя принцип Гюйгенса-Френеля для объяснения дифракционной картины, необходимо учитывать ряд обстоятельств. **Во-первых**, следует считать, что вторичные источники заполняют поверхность непрерывно и равномерно, так то амплитуда колебания, идущего от малого участка поверхности  $\Sigma$ , пропорциональна площади  $\Delta\Sigma$  этого участка (рис. ). **Во-вторых**, поверхность  $\Sigma$ , как и всякая светящаяся поверхность, излучает в разных направлениях неодинаково: чем больше угол  $\alpha$  между направлением излучения и нормалью к элементу  $\Delta\Sigma$ , тем меньше амплитуда колебания, посылаемого в этом направлении. **В-третьих**, поскольку амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию  $r$  от источника, то колебания, приходящие в точку наблюдения от более удаленных участков поверхности  $\Sigma$ , будут иметь меньшую амплитуду.

## Метод зон Френеля

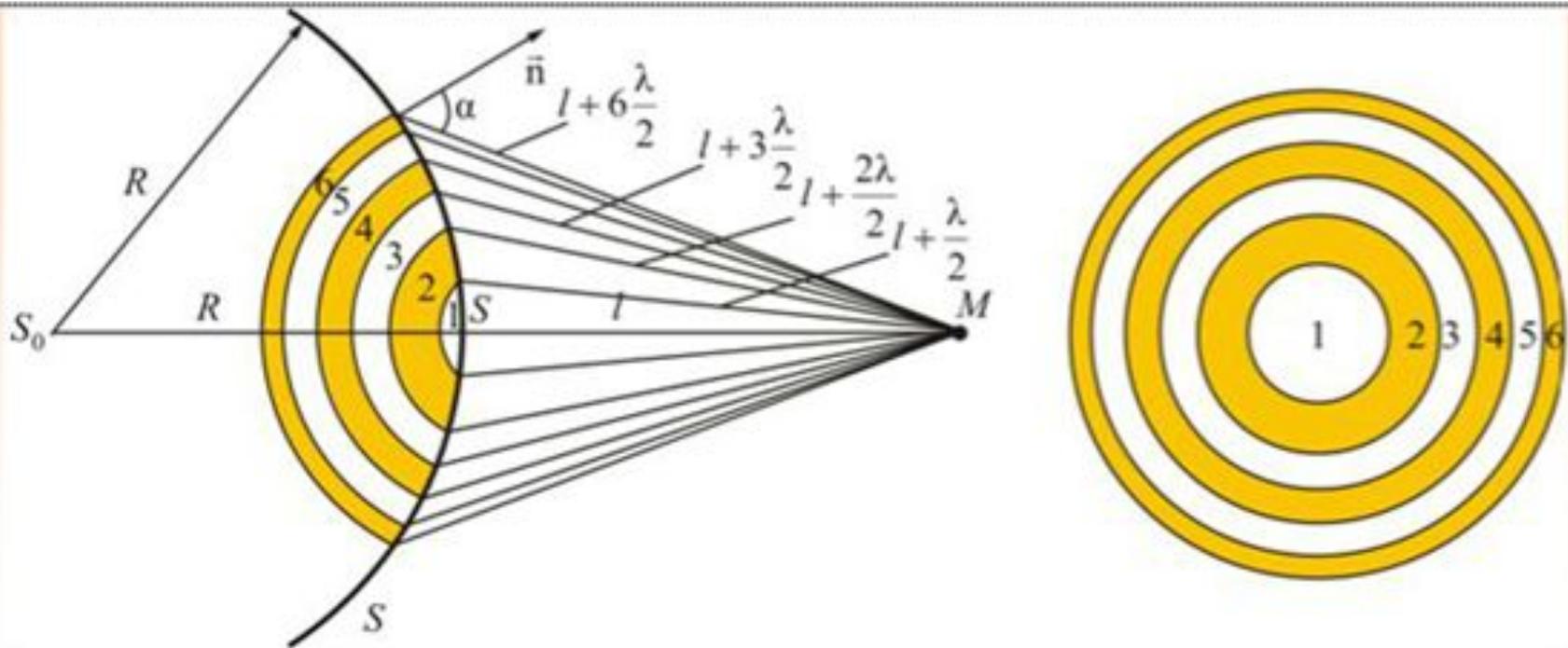
Две соседние зоны Френеля действуют как источники, колеблющиеся в противофазе, т.е. вторичные волны, распространяющиеся из **соседних зон** в точке наблюдения будут **гасить** друг друга. Чтобы найти освещенность в точке наблюдения **P** нужно просуммировать напряженности электрических полей от всех вторичных источников, приходящих в данную точку. Результат сложения волн зависит от амплитуды и разности фаз. Так как разность фаз между соседними зонами равна  $\pi$ , то можно перейти к суммированию амплитуд.







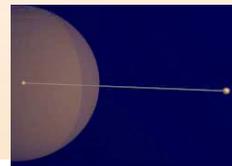
При  $R = l = 0,1 \text{ м}$   $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 500 \text{ нм}$  , **число зон**  $N \approx 3 \cdot 10^5$ , а радиус первой зоны  $r_1 \approx 0,16 \text{ мм}$



*Площади зон одинаковы, а амплитуды волн, приходящих в точку M от соседних зон примерно равны.*

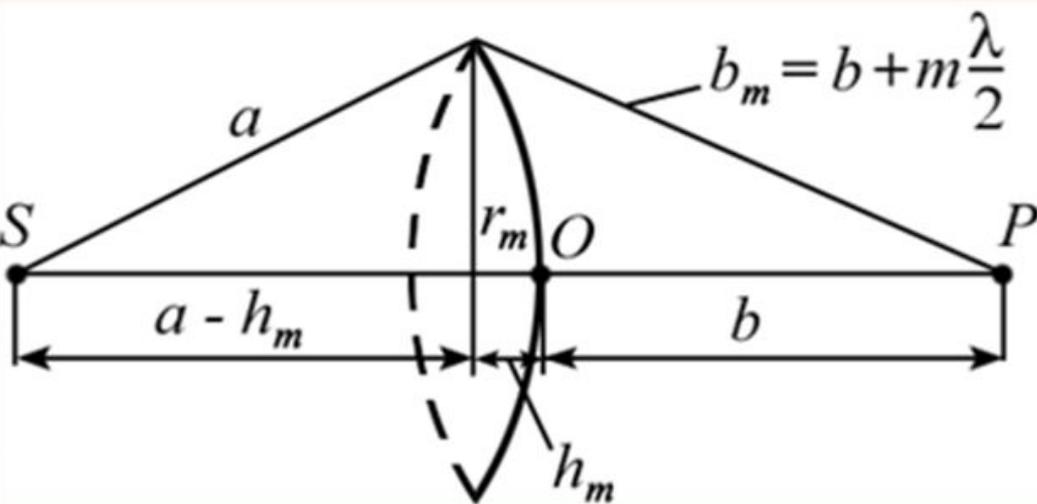
При сложении колебаний соседних зон, они должны взаимно ослаблять друг друга: (почему?)

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + A_i$$



## Свойства зон Френеля:

Если расстояние  $a$  до источника света  $S$  и расстояние  $b$  до точки наблюдения  $P$  много больше размеров зон Френеля, то (для небольших  $m$ ):



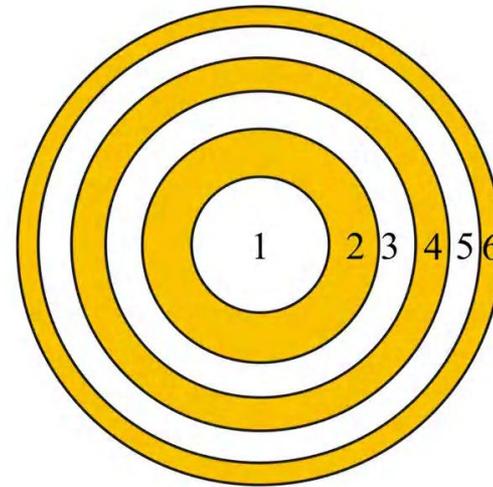
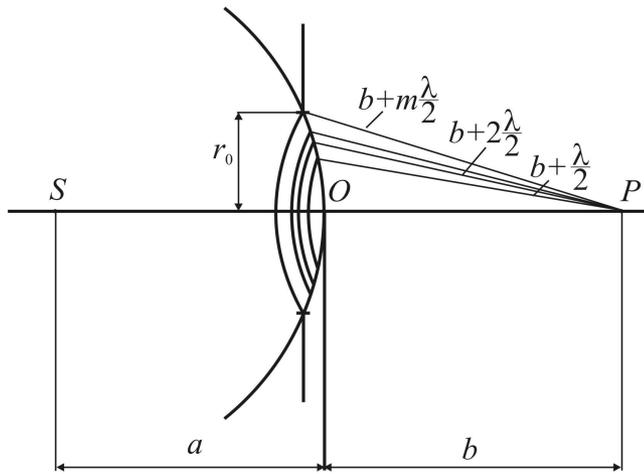
радиус внешней границы  $m$ -й зоны:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$$

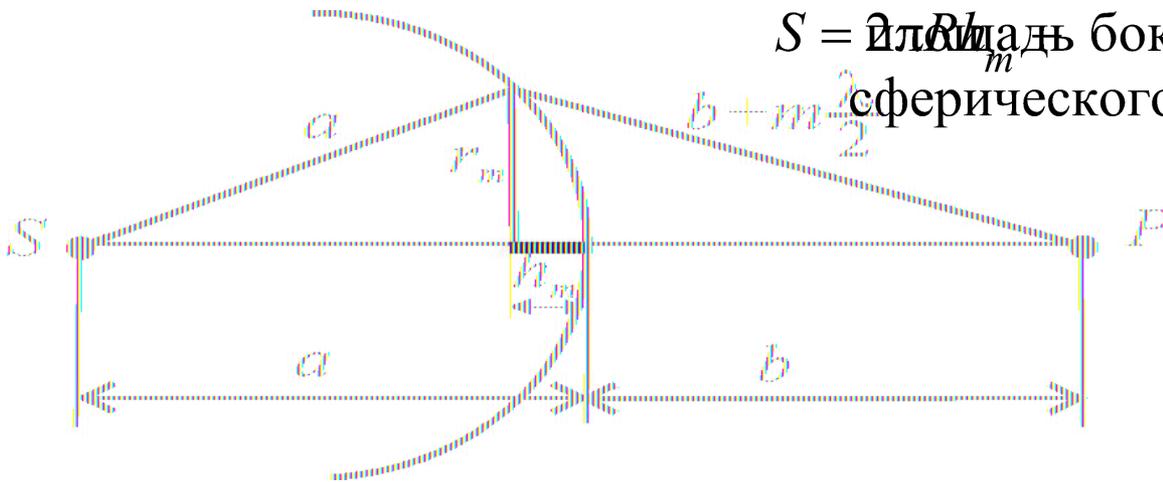
Площадь  $m$ -й зоны:

$$\Delta S_m = \frac{\pi ab}{a+b} \lambda$$

- не зависит от  $m$ , т.е. **при небольших  $m$  площади зон Френеля примерно одинаковы.**

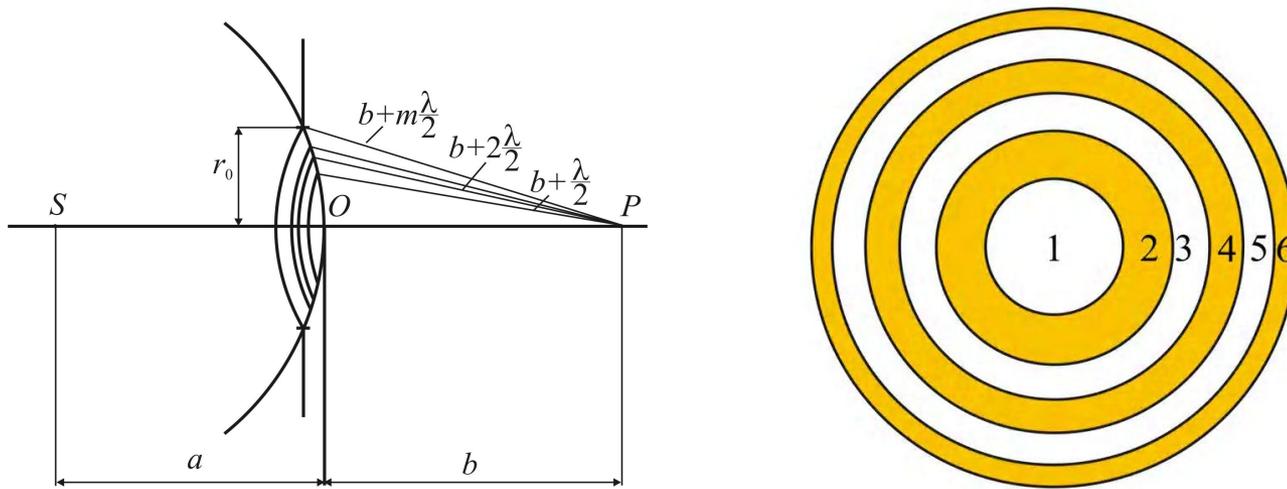


$S = \pi r_m^2$  - площадь боковой поверхности сферического сегмента



Радиус  $m$ -ой зоны определяется выражением  $r_m = \sqrt{\frac{ab\lambda m}{a+b}}$

Площадь  $m$ -зоны-  $S_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}$  не зависит от номера зоны.



Отверстие радиусом  $r_0$   
отрывает для точки число зон Френеля, равное

$$m = \frac{r_0^2 (a + b)}{\lambda ab}$$

Тогда, при нечетных  $m$ ,

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \left( \frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2}$$

а при четных  $m$

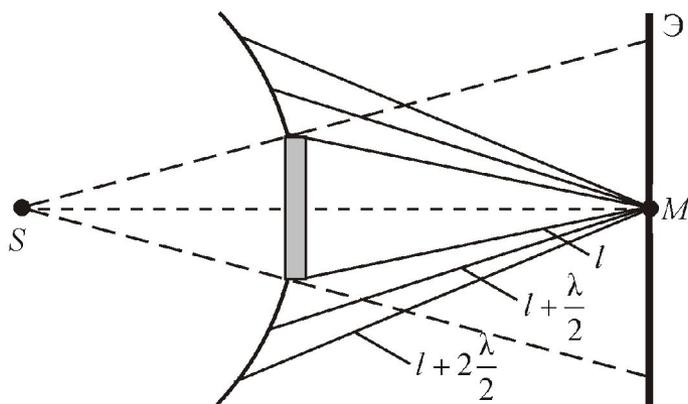
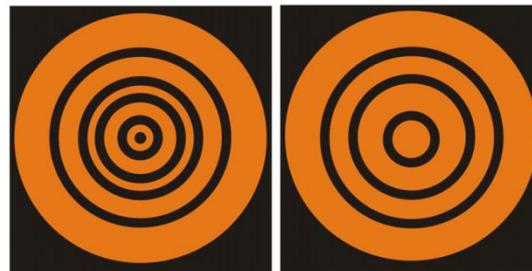
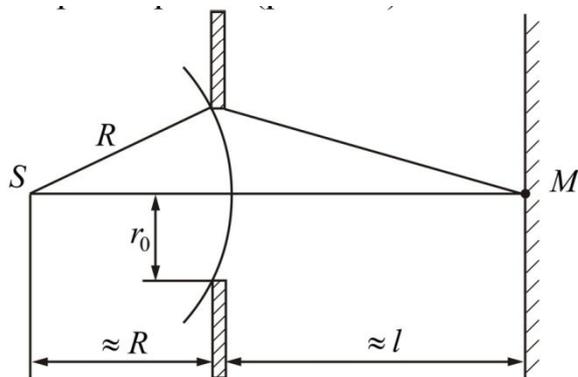
$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m$$

Так как в приведенных формулах выражения в скобках приблизительно равны нулю, то при нечетных  $m$

амплитуда результирующего колебания равна

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \approx A_1$$

в то время как для четных она близка к нулю



Результирующая амплитуда  $A = \frac{A_1}{2}$

Интенсивность излучения  $J \sim A^2$

Результирующая амплитуда, создаваемая в некоторой точке  $M$  всей сферической поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной, а интенсивность  $J = J_1 / 4$

Интенсивность света увеличивается в четыре раза  $J = 4J_1$ ,  
если закрыть все четные зоны, т.к.

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + A_i$$

1. Разделим волновой фронт в отверстии на такие участки (или зоны), из которых в точку наблюдения волны будут приходить с разностью хода в  $\lambda/2$ .
  2. Тогда волны, приходящие из соседних зон в точку наблюдения с разностью хода в  $\lambda/2$  будут при сложении давать минимум освещённости.
  3. Если интенсивность излучения, исходящего из двух соседних зон одинакова, то при сложении будет наблюдаться не просто минимум освещённости, но полная темнота.
- Этого можно добиться, если число точечных источников в каждой зоне одинаково. А для этого необходимо, чтобы площади зон были равны.

Участки волнового фронта одинаковой площади, из которых в точку наблюдения волны будут приходить с разностью хода в  $\lambda/2$  называются **зонами Френеля**.

Таким образом, если в открытом участке волнового фронта укладывается чётное число зон Френеля, то две каждые соседние зоны при сложении давать минимум освещённости и в результате в точке наблюдения мы увидим тёмное пятно (полосу).

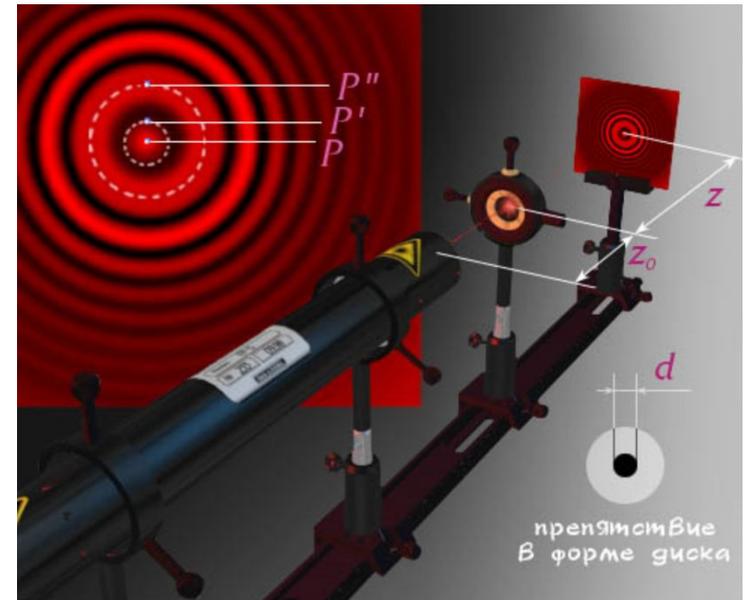
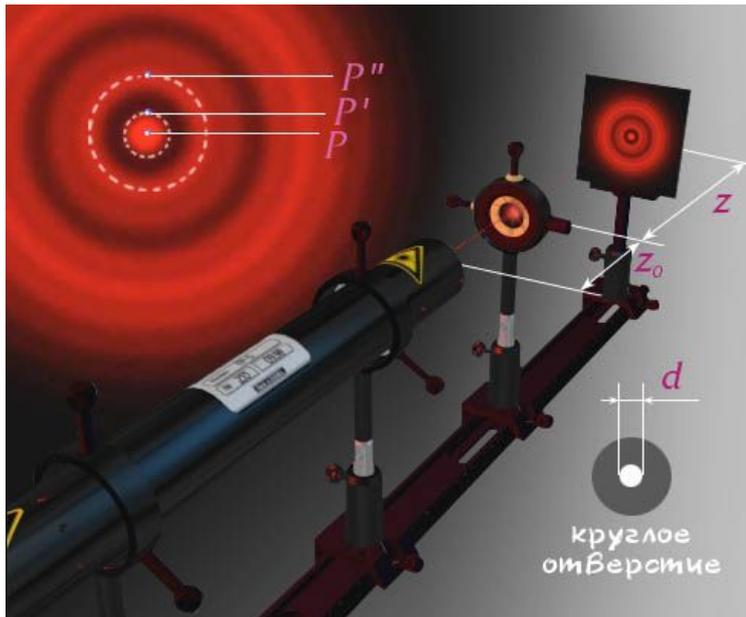
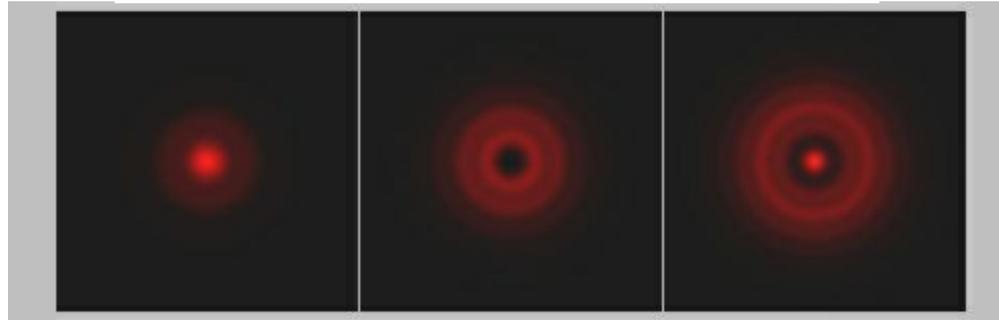
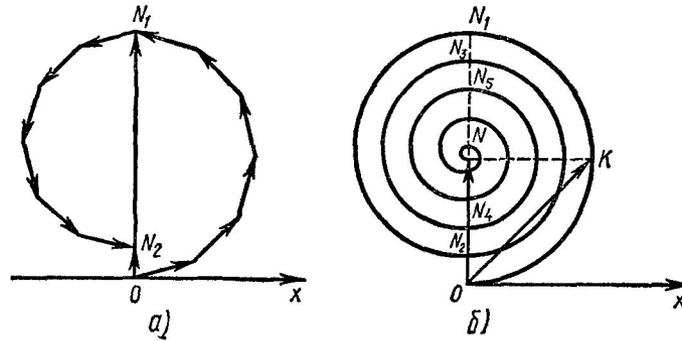
Напротив, если в открытом участке волнового фронта укладывается нечётное число зон Френеля, в точке наблюдения мы увидим светлое пятно (полосу) (Одна из зон не имеет «соседней» дающей разность хода с ней в  $\lambda/2$  .)

# Метод зон Френеля

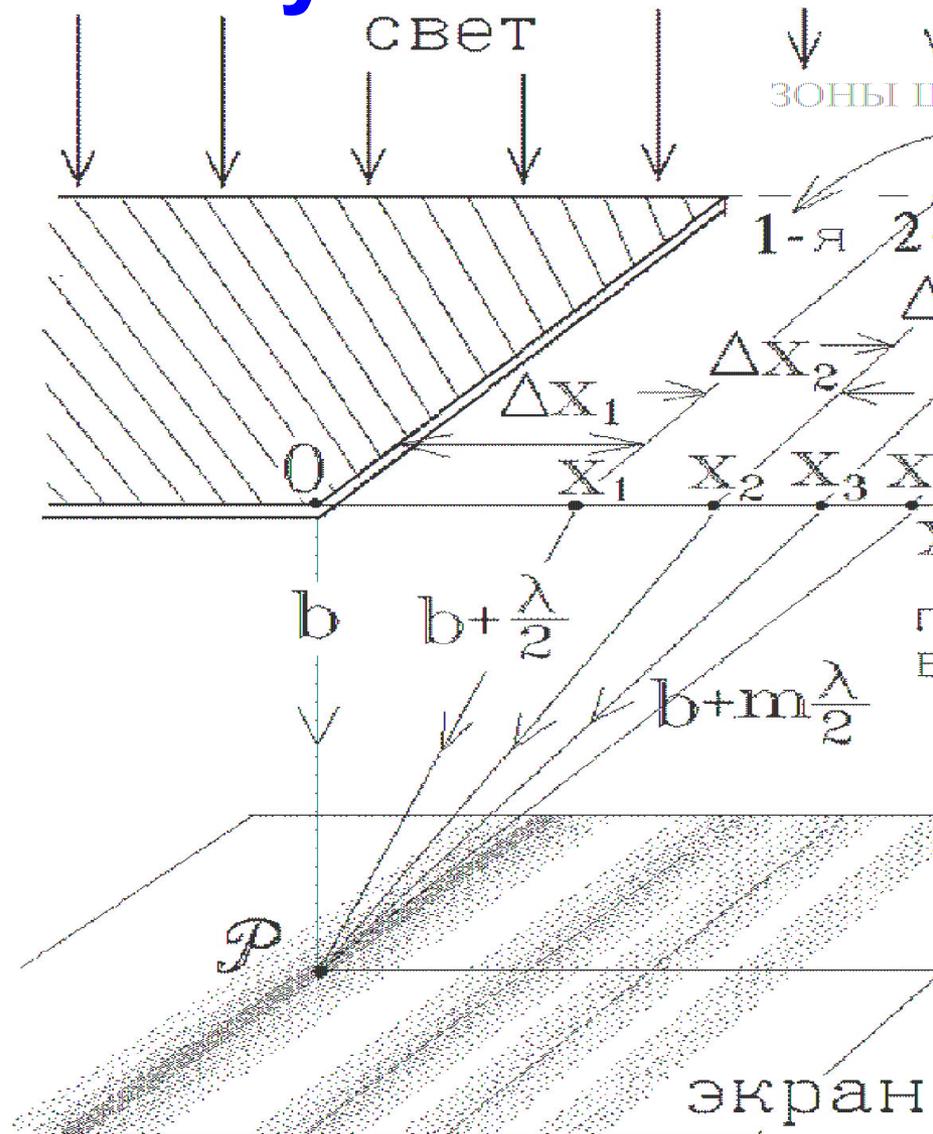
Для применения метода зон Френеля необходимо сделать следующее:

1. Построить чертёж, отражающий ход лучей от источника к точке наблюдения.
2. Разделить волновой фронт на зоны Френеля. При этом следует помнить, что площади зон Френеля должны быть равны.
3. Определить число зон Френеля, помещающееся в открытой части волнового фронта, на основании чего сделать выводы об освещённости точки наблюдения.
4. Разбиение волнового фронта на зоны Френеля определяется положением точки наблюдения, поэтому при переходе к другой точке наблюдения следует повторить всю процедуру сначала.

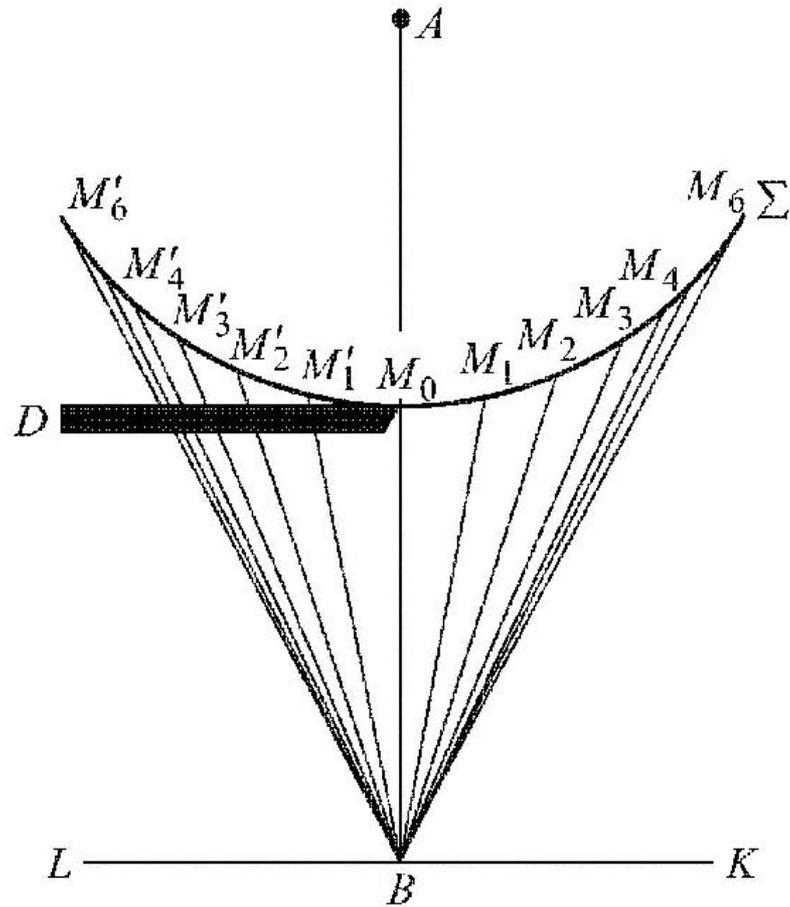
# Дифракция света на диске и круглом отверстии



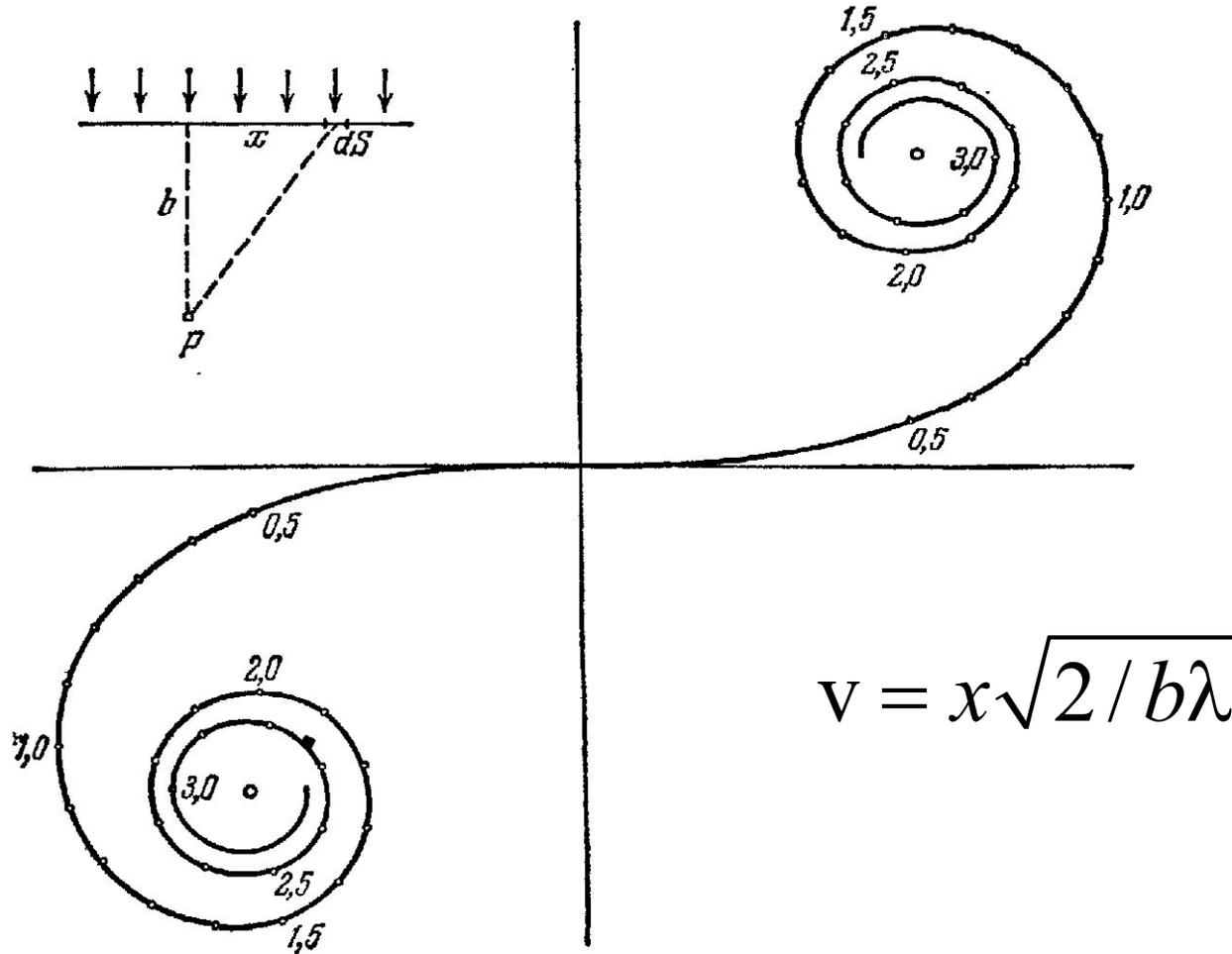
# Дифракция на краю полуплоскости



# Зоны Шустера

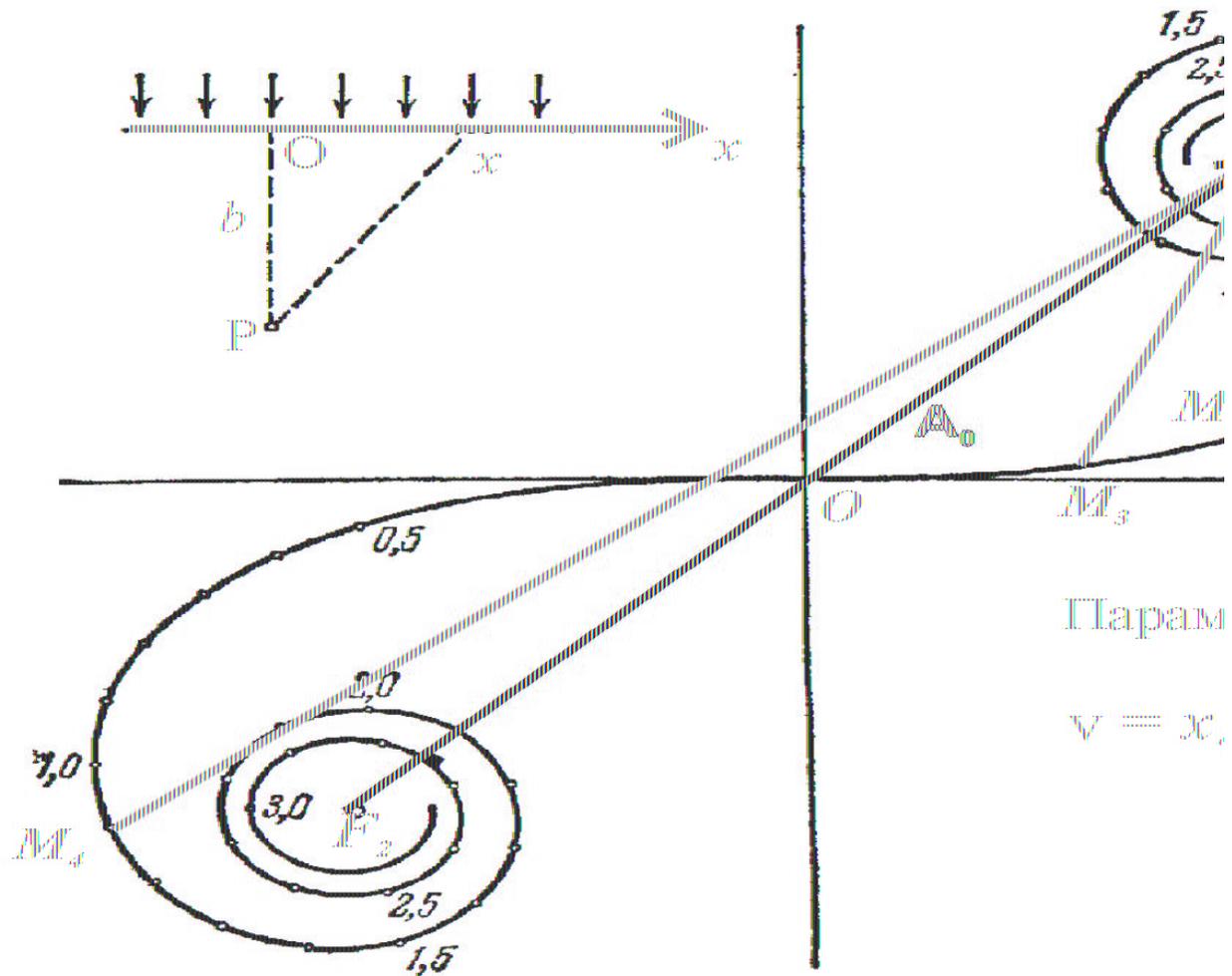


# Спираль Корню

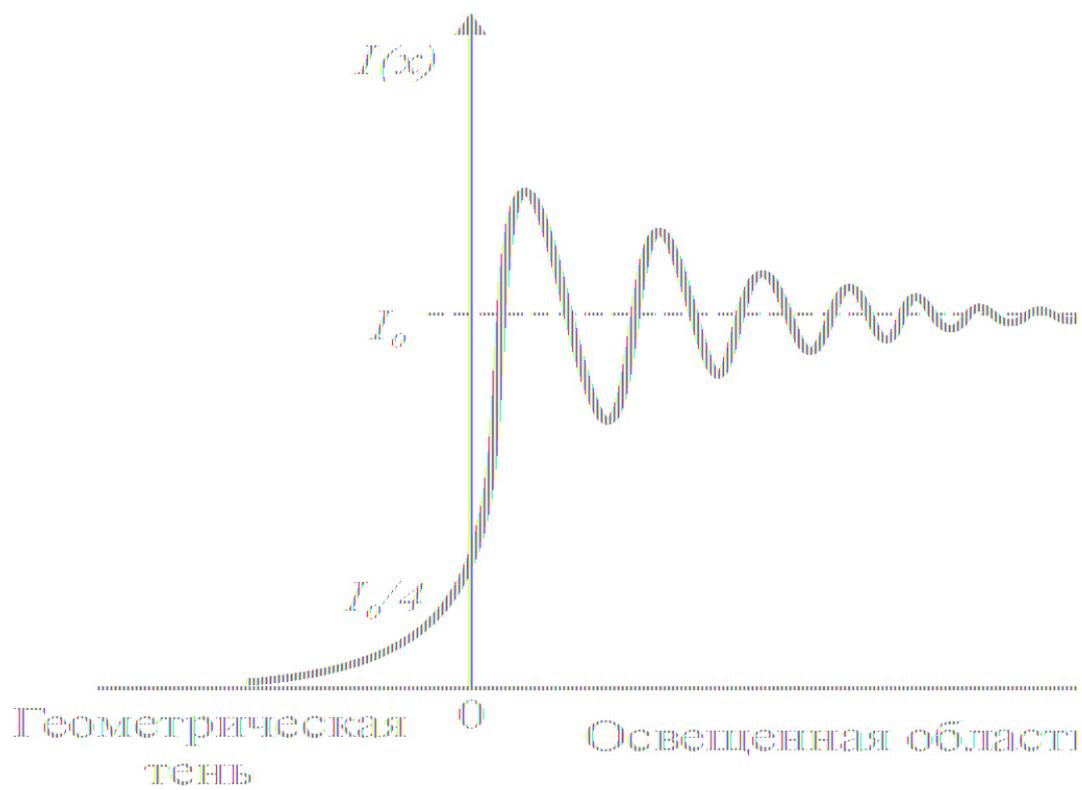
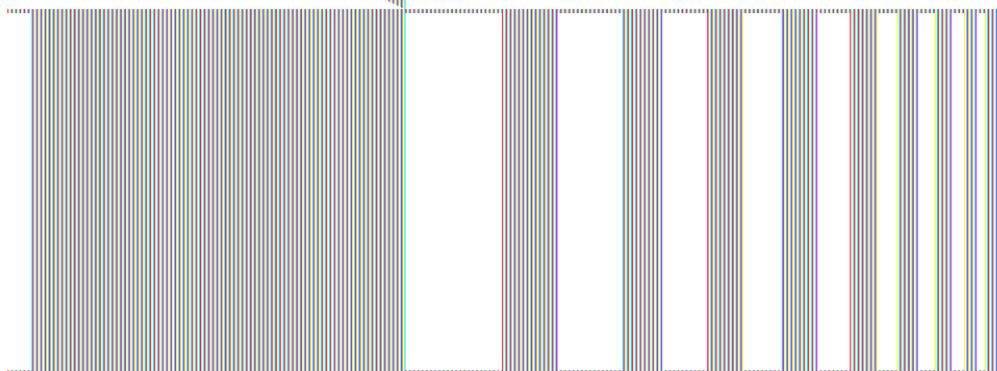


$$v = x\sqrt{2/b\lambda}$$

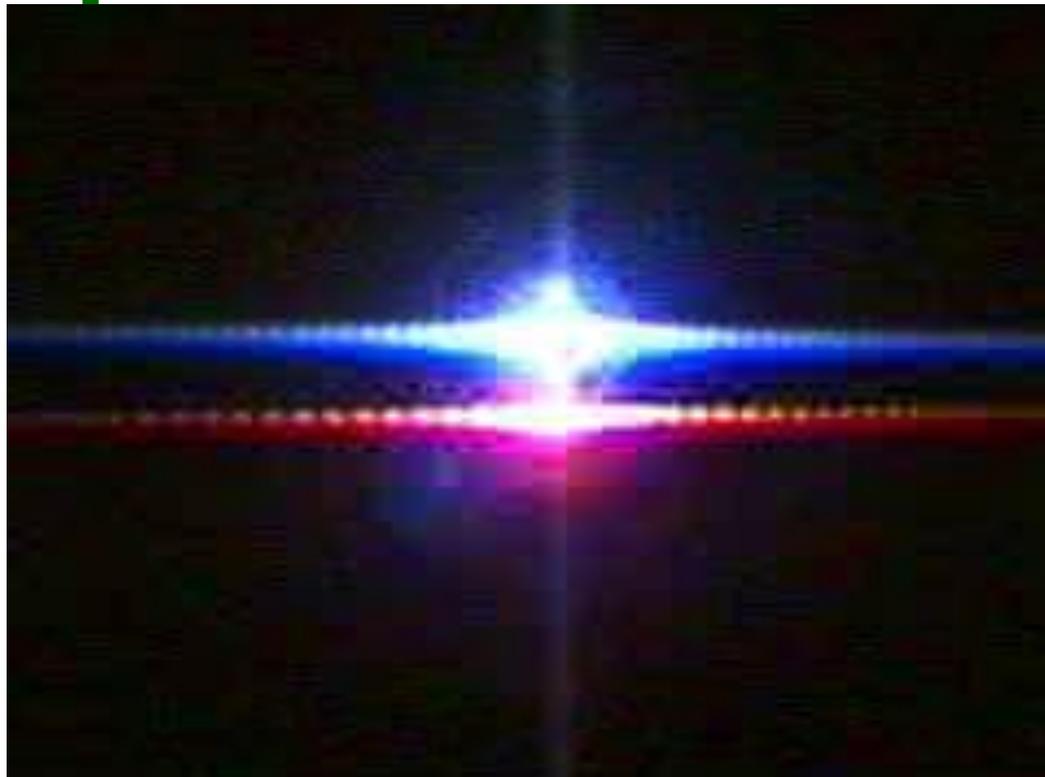
# Спираль Корню



край экрана

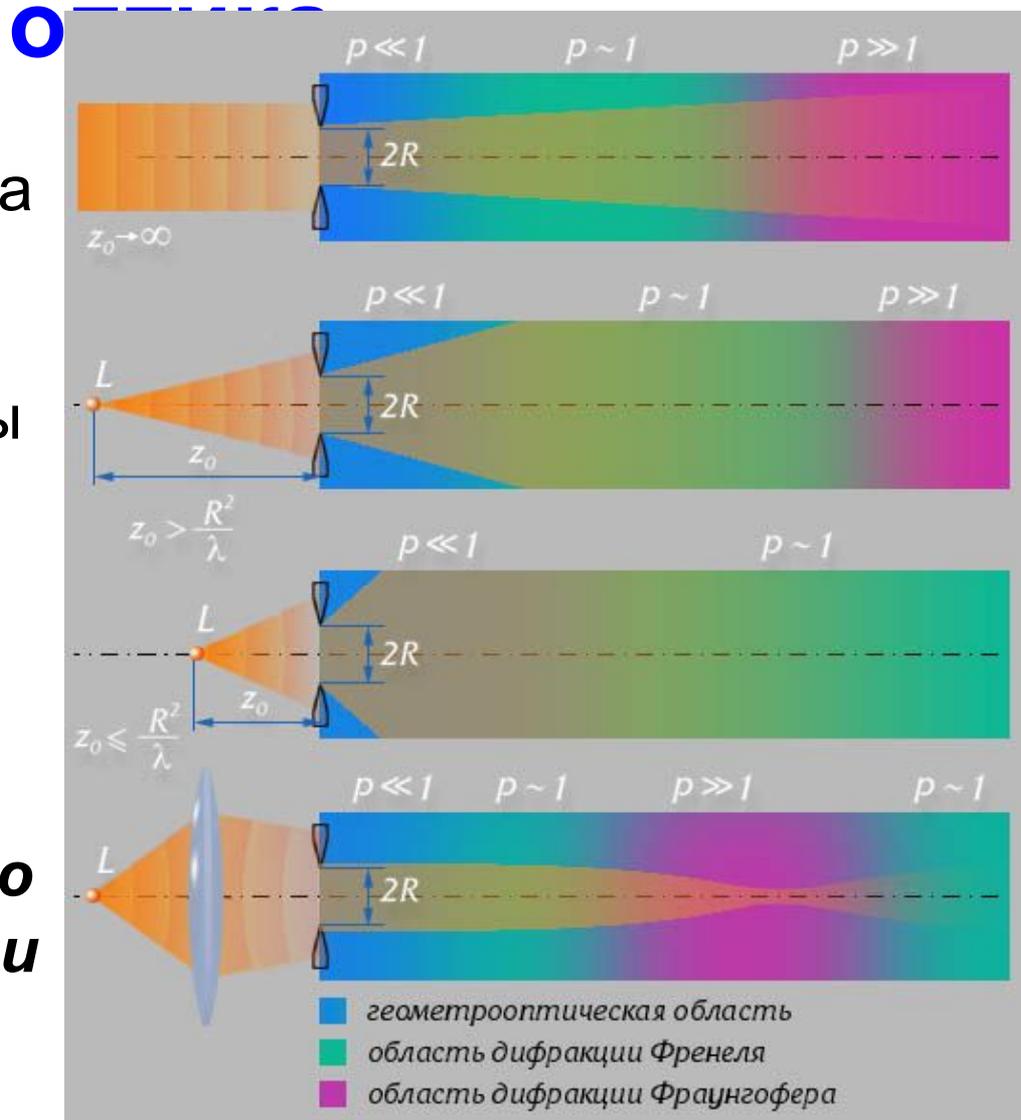


# Дифракция Фраунгофера. Метод векторных диаграмм



# Приближения Френеля, Фраунгофера и геометрическая

- В зависимости от расстояний от источника излучения и плоскости наблюдения до отверстия, длины волны излучения и размера отверстия можно выделить три характерные области дифракции: **геометрооптическую, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.**



- *Различные случаи дифракции отличаются количеством открытых зон Френеля.*
- *Количественным критерием* служит параметр  $p$ . Он равен отношению радиуса первой зоны Френеля к радиусу отверстия  $R$ . Если отверстие имеет щелевидную или квадратную форму, то полагают, что равен половине размера щели или стороны квадрата.
- Область приближения *геометрической оптики* соответствует значению  $p \ll 1$ . Открыто много зон Френеля.
- Область *дифракции Френеля* -  $p \cong 1$ . Открыты одна или несколько зон Френеля.
- Область *дифракции Фраунгофера* -  $p \gg 1$ . Открыта часть зоны Френеля.
- Отметим, что нет резких границ между различными областями дифракции. Они постепенно переходят друг в друга.

# Дифракция Фраунгофера на щели

Каждая точка отверстия является источником вторичных волн. Рассмотрим участок длиной  $dx$ , расположенный внутри отверстия на расстоянии  $x$  от края.

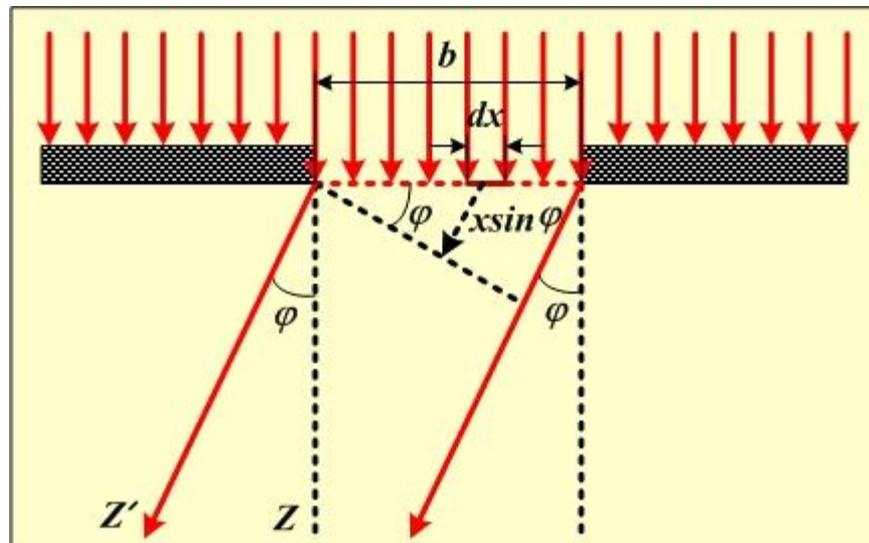
Волны, излучённые с отрезка  $dx$  распространяются по всем направлениям ( $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ).

Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль прямой, образующей угол  $\varphi$  с перпендикуляром к преграде.

Волны, излучённые с отрезка  $dx$ , запаздывают по фазе на

$$\Delta = kx \sin \varphi,$$

$$k = \frac{\omega}{v} \text{ - волновое число (модуль волнового вектора).}$$



# Дифракция Фраунгофера на щели

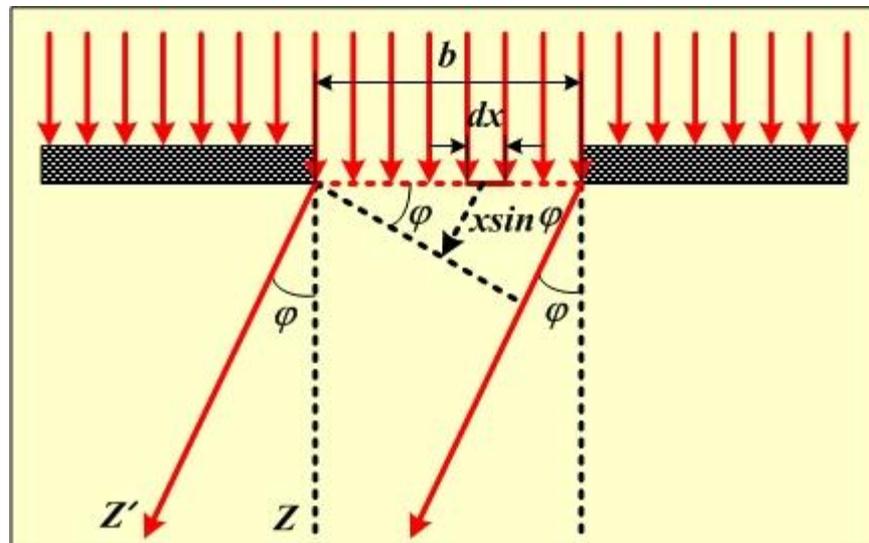
## Точная теория (Углубленный уровень)

Запишем уравнение волны, испущенной с участка  $dx$  в рассматриваемом направлении. Пусть  $E_0$  – амплитуда волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении, тогда амплитуда волны, испущенной с участка  $dx$  равна

$$E_{0x} = \frac{E_0}{b} dx.$$

Уравнение волны, испущенной с участка  $dx$  в рассматриваемом направлении:

$$dE_{\varphi} = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$



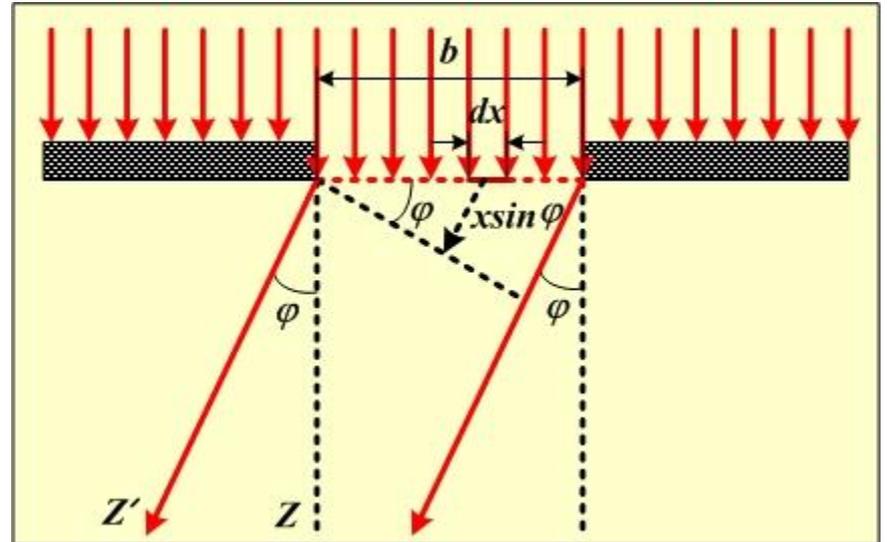
## Точная теория

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

Для волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении.

$$E_\varphi = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx = \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \int_0^b e^{-ikx \sin \varphi} dx = \\ &= \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \left. \frac{e^{-ikx \sin \varphi}}{-ik \sin \varphi} \right|_0^b = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi}. \end{aligned}$$



## Точная теория

$$E_{\varphi} = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi}.$$

Преобразуем полученное выражение к симметричной форме.

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-ikb \sin \varphi} = \\ &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-2ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} = \frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu}, \end{aligned}$$

где  $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

## Точная теория

$$\frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu} = \frac{\sin u}{u} e^{-iu}.$$

Итак,

$$E_{\varphi} = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} = E_0 e^{i(\omega t - u)} \frac{\sin u}{u}.$$

где  $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi$ .

Уравнение волны, испущенной из всей щели в рассматриваемом направлении:

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)}.$$

## Точная теория

Интенсивность излучения, испущенного из всей щели в рассматриваемом направлении определяется квадратом амплитуды

$$I \approx |E|^2$$

$$E_{\varphi}^2 = E_0^2 \left| e^{i(\omega t - u)} \right|^2 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2.$$

$$I_{\varphi} = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2,$$

где  $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

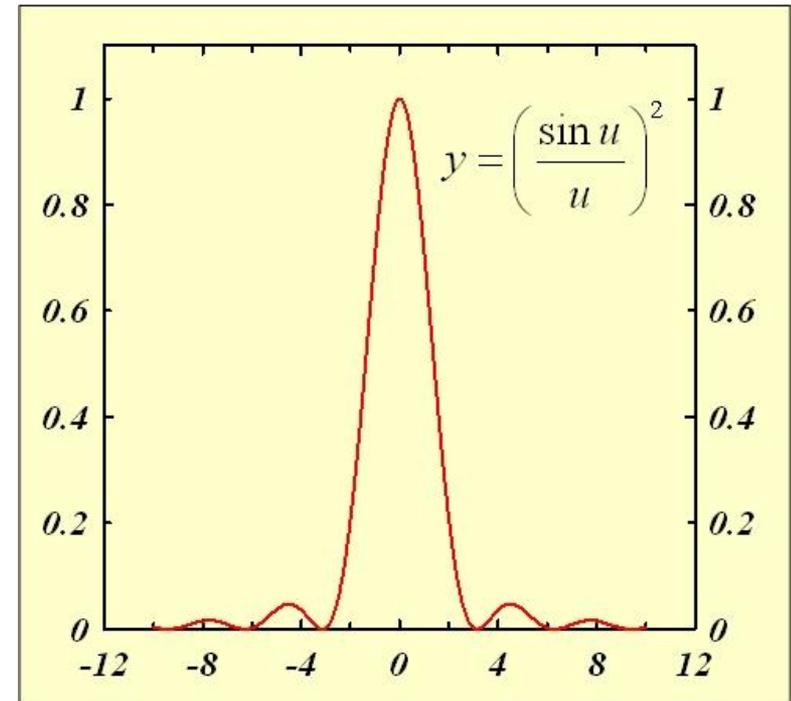
## Точная теория

$$I_{\varphi} = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2}$$

Исследуем полученную функцию. При  $u \rightarrow 0$   $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$ .

Это максимальное значение этой функции. При возрастании модуля  $u$  функция будет убывать. Это убывание не будет монотонным вследствие осцилляций числителя.

Теперь можно определить, при каких значениях угла дифракции наблюдаются максимумы и минимумы интенсивности излучения.



## Точная теория

$$u = k \frac{b}{2} \sin \varphi, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \varphi = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi.$$

Функция

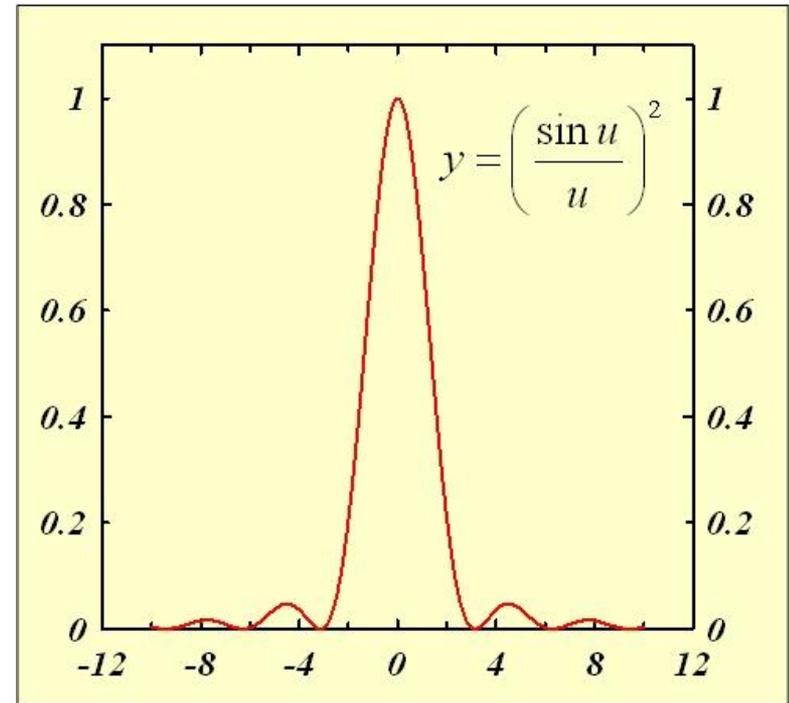
$$I_{\varphi} = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

имеет локальные минимумы при условии

$$\sin u = 0.$$

$$u = m\pi, \quad \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = m\pi,$$

$$b \sin \varphi = m\lambda.$$



# Метод векторных диаграмм для вывода дифракции Фраунгофера на щели (Базовый уровень)

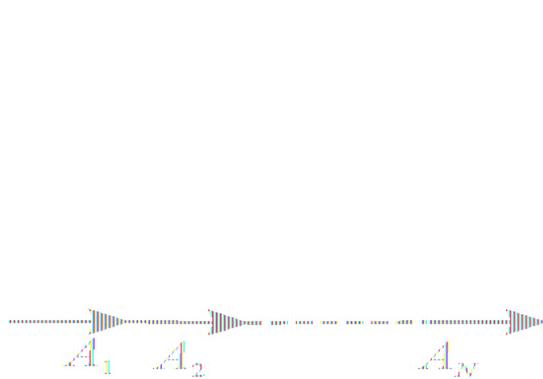
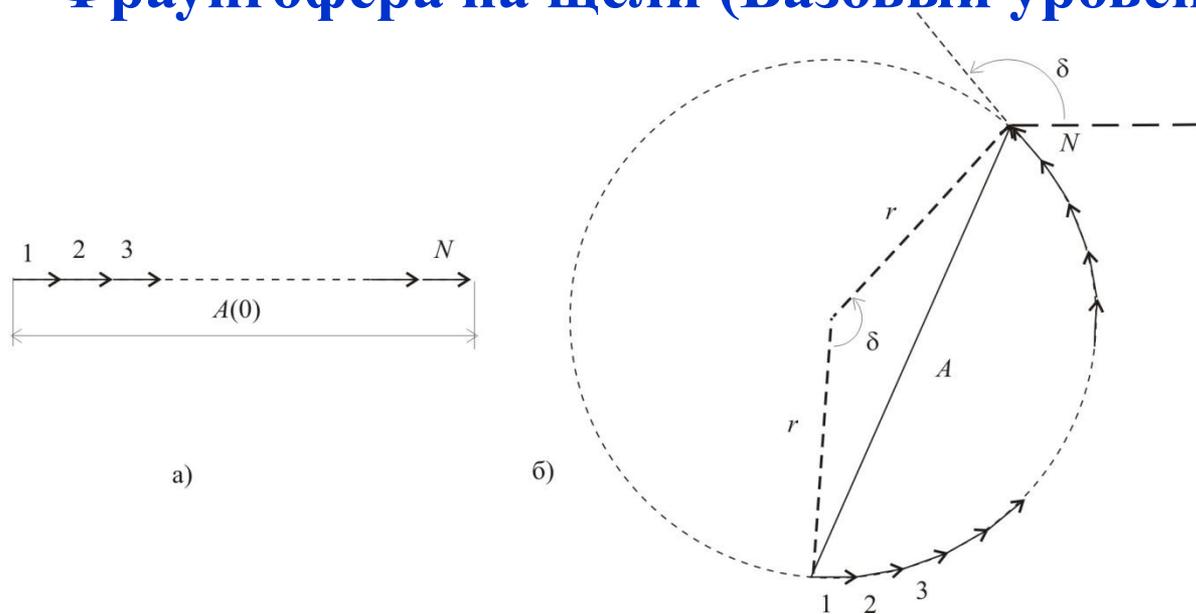


Рис.1.

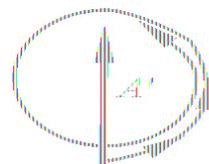


Рис.2

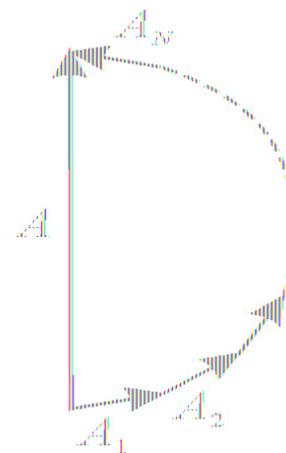


Рис.3.

## Дифракция Фраунгофера на щели

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{b}$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$x_m = \frac{m\lambda L}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{b}\right)^2}}$$

При малых углах, когда

$$\sin \theta_m \ll 1$$

$$x_m = \frac{m\lambda L}{b}$$

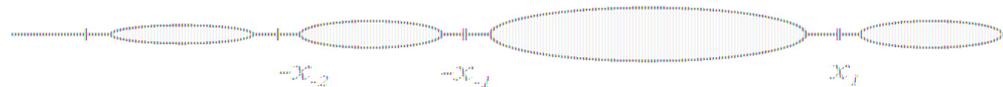
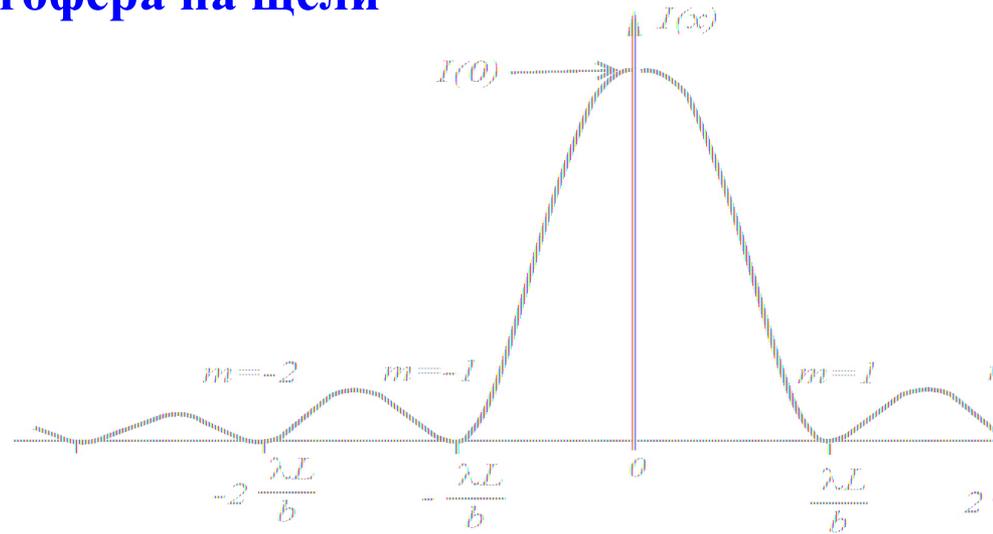
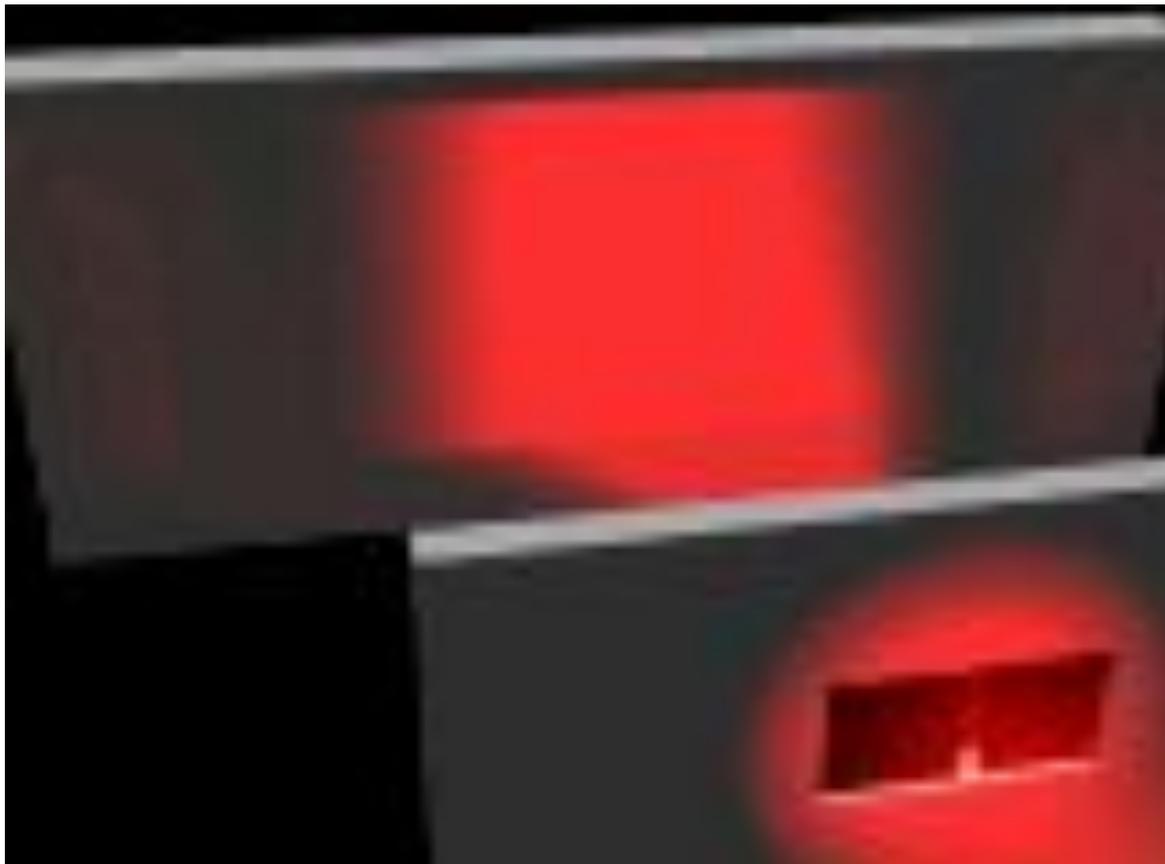


Рис. Дифракция узкого светового пучка на щели:

а) распределение интенсивности;

б) картина из светлых пятен

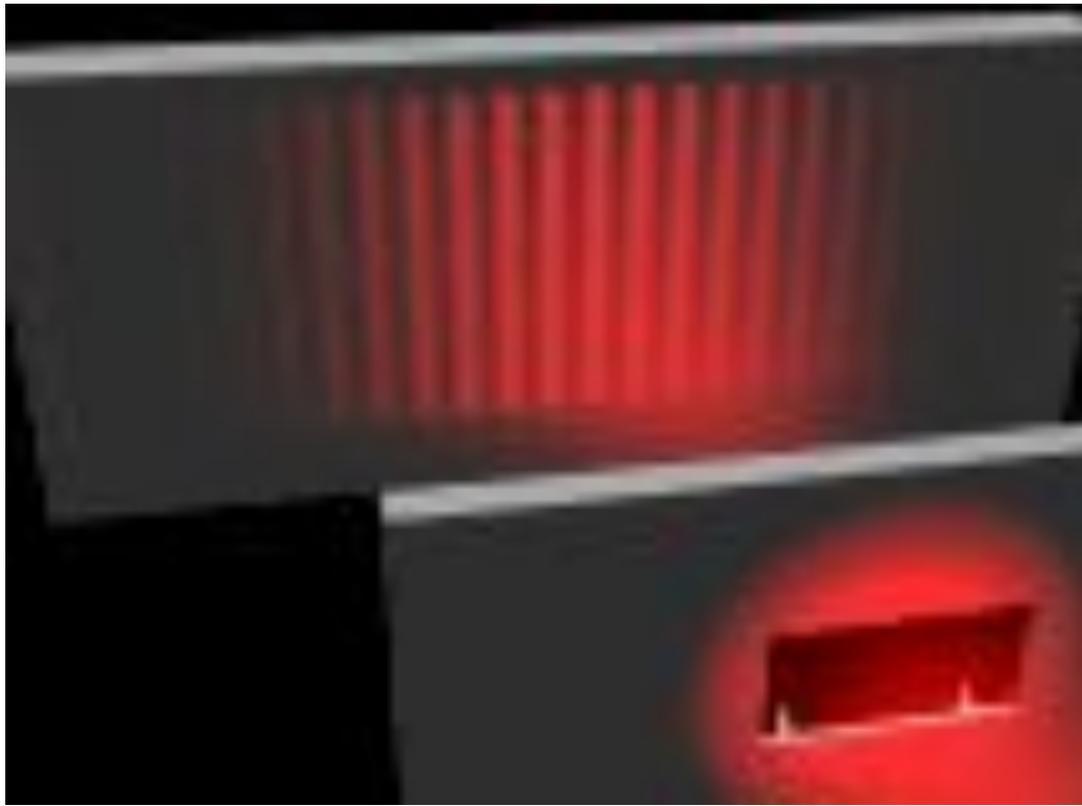
$$I = I(0) \left( \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} \right)^2, \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta$$



**Дифракция Фраунгофера на одной щели при изменении её ширины. Ширина дифракционного максимума на экране увеличивается обратно пропорционально ширине щели. Можно наблюдать также два боковых максимума.**



**Анимация показывает эксперимент с дифракцией Фраунгофера на двух щелях, когда ширина каждой щели меняется, а расстояние между щелями остается постоянным. В результате период интерференционных полос на экране остаётся неизменным, но меняется общее наблюдаемое число полос. Чем уже щели, тем шире интерференционная картина, тем меньше её яркость.**

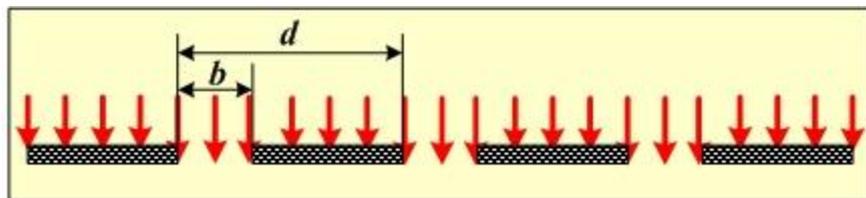


**Анимация показывает эксперимент с дифракцией Фраунгофера на двух щелях, когда ширина щелей остается постоянной, а расстояние между щелями меняется. Мы видим, что период интерференционных полос на экране изменяется обратно пропорционально расстоянию между щелями, а общая ширина дифракционной картины остаётся неизменной.**

# **Дифракция Фраунгофера на периодической структуре (решётке)**

# Дифракция Фраунгофера на периодической структуре

**Дифракционная решётка** – совокупность большого числа регулярно расположенных штрихов (канавок, щелей, выступов), нанесённых на плоскую или сферическую поверхность.



**Период дифракционной решётки** – наименьшая часть решётки, перемещая которую, можно воспроизвести всю решётку.

Для плоской одномерной дифракционной решётки длина периода равна

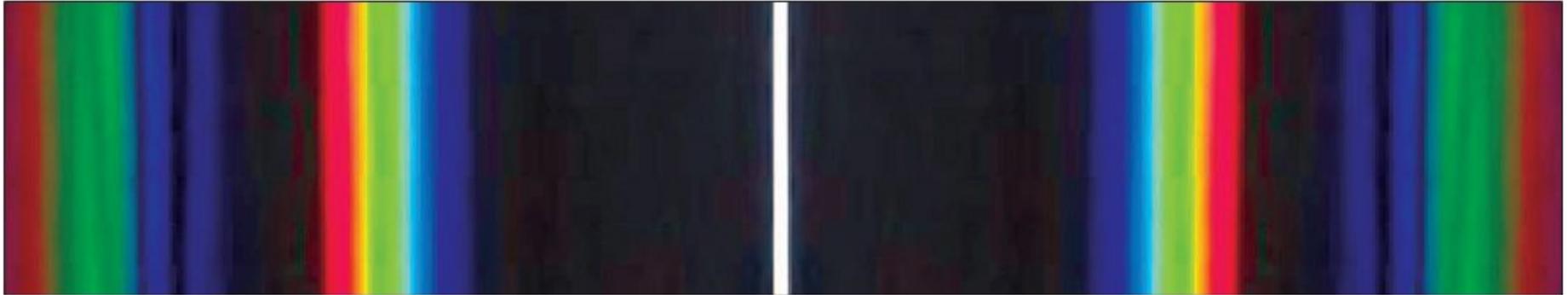
$$d = b + a,$$

где  $b$  – ширина отверстия,  $a$  – ширина штриха (непрозрачной части). Период дифракционной решётки связан с числом нанесённых на неё штрихов соотношением

$$d = \frac{1}{N},$$

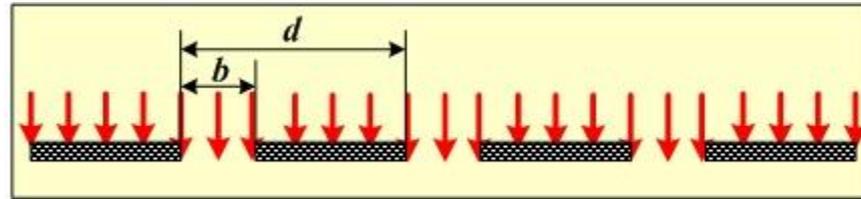
где  $N$  – число штрихов на единицу длины.

# АМПЛИТУДНЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ РЕШЕТКИ

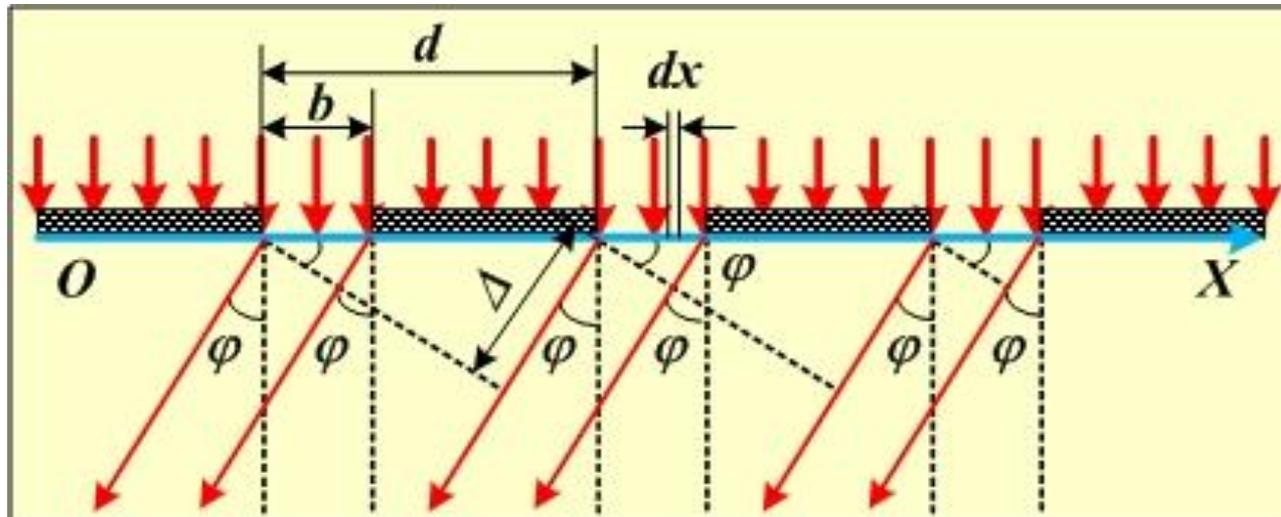


**Наиболее яркие дифракционные максимумы соответствуют низшим порядкам. Это позволяет наблюдать дифракционную картину даже от источника белого цвета. В центре расположена белая (ахроматическая) полоса, поскольку положение нулевого максимума для всех волн одинаковое.**

# Дифракция Фраунгофера на периодической структуре



На дифракционную решётку падает плоская волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны  $\lambda$ , размер отверстия  $b$ , период решётки  $d$ , расстояние до экрана  $L$ . Требуется определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям (на экране).



# Дифракция Фраунгофера на периодической структуре

Чтобы решить поставленную задачу, нам необходимо просуммировать вклады в интенсивность результирующей волны от всех точечных источников, расположенных во всех щелях дифракционной решётки. Вся процедуру вывода формулы можно разделить на четыре этапа.

1. Записать уравнение волны, излучаемой одним точечным источником.

2. Записать уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками одной щели.

3. Записать уравнение волны, излучаемой всеми щелями дифракционной решётки.

4. Записать и исследовать выражение для суммарной интенсивности излучения по заданному направлению

# Дифракция Фраунгофера на периодической структуре

Результирующая интенсивность является произведением двух функций:

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 (N\delta)}{\sin^2 (\delta)},$$

где

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi.$$

На следующем рисунке этот факт проиллюстрирован для соотношения между шириной щели и периодом дифракционной решётки

$$\frac{d}{b} = 4.$$

# Дифракция Фраунгофера на периодической структуре

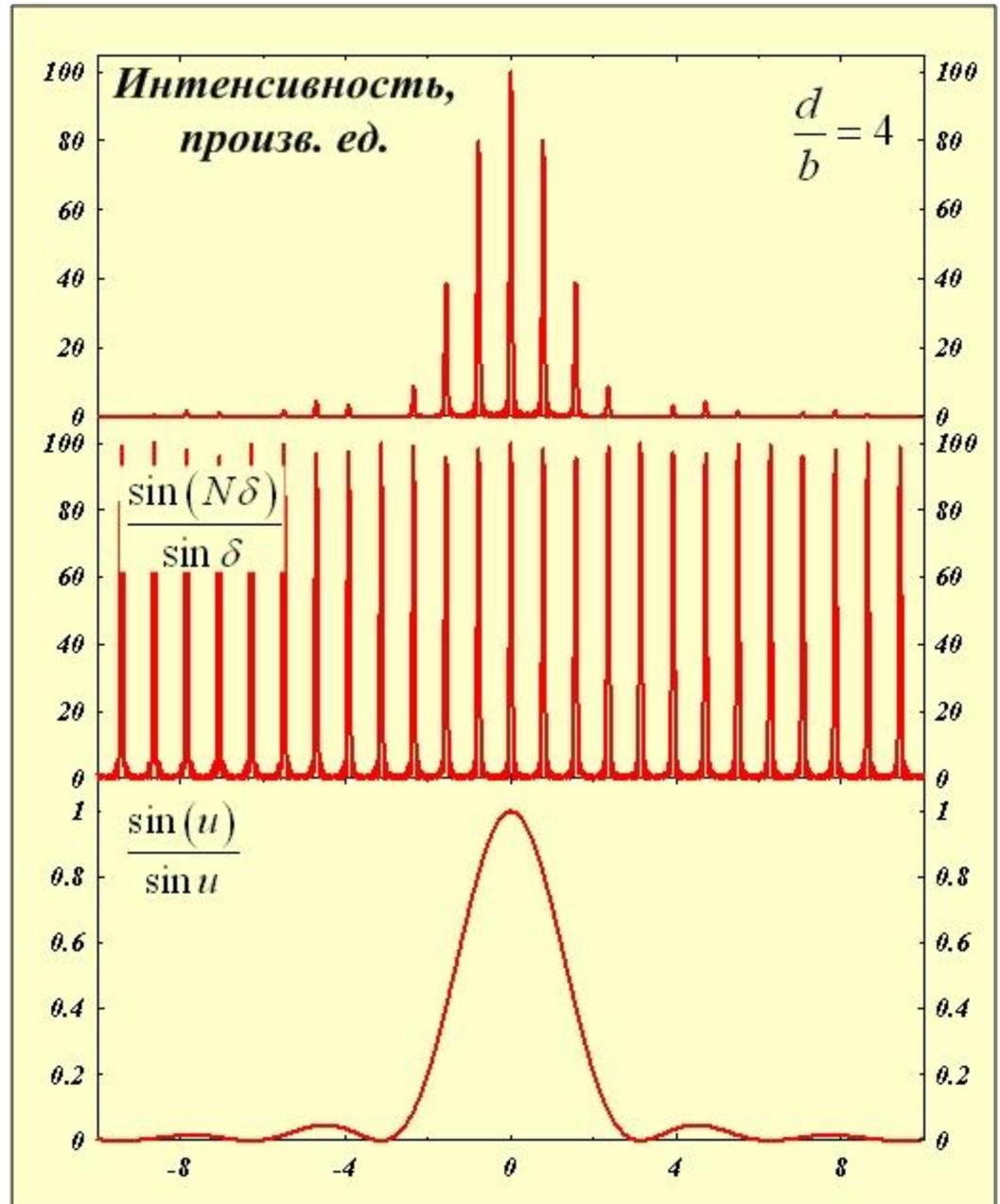
## Распределение интенсивности излучения

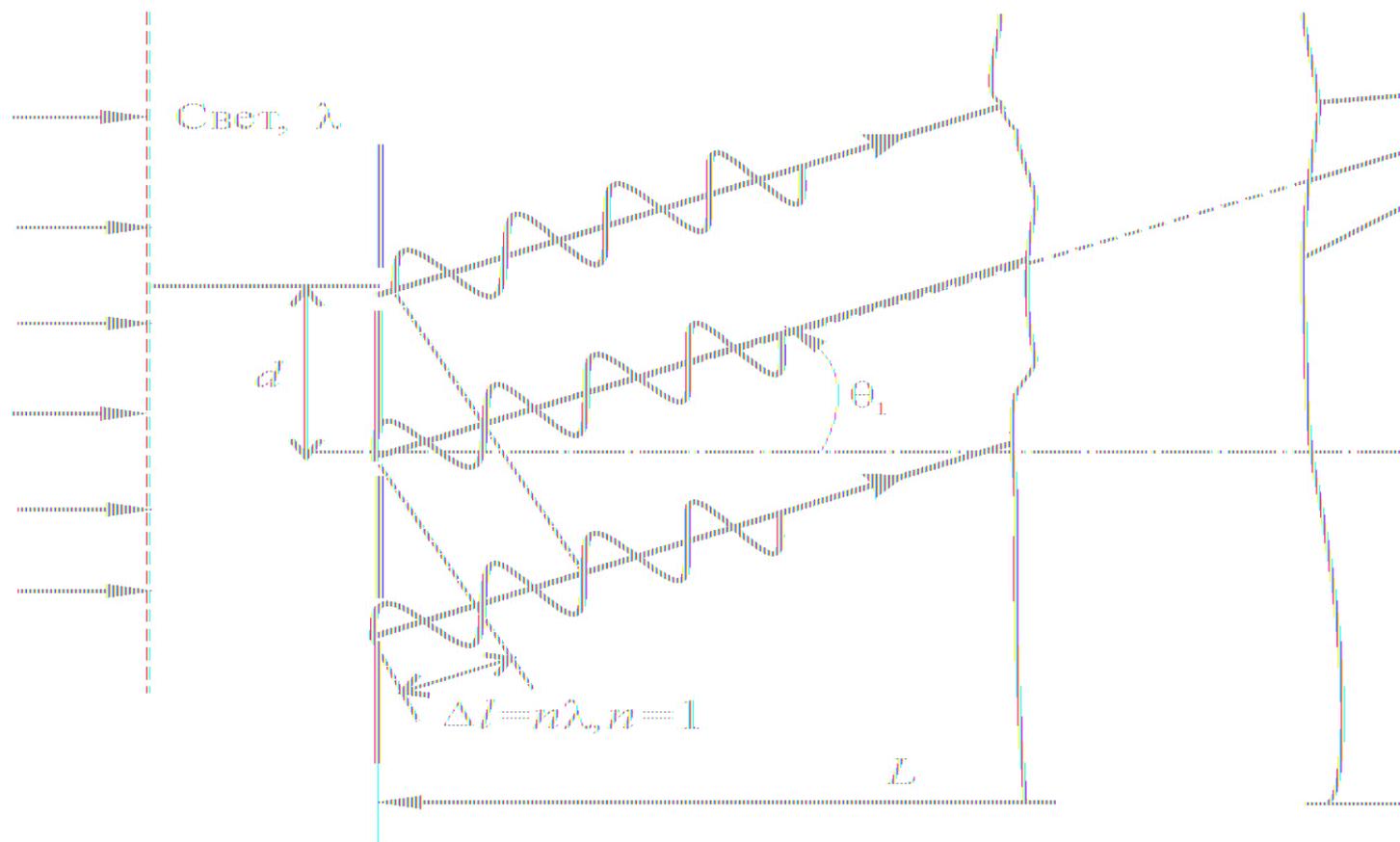
$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)},$$

где

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi,$$

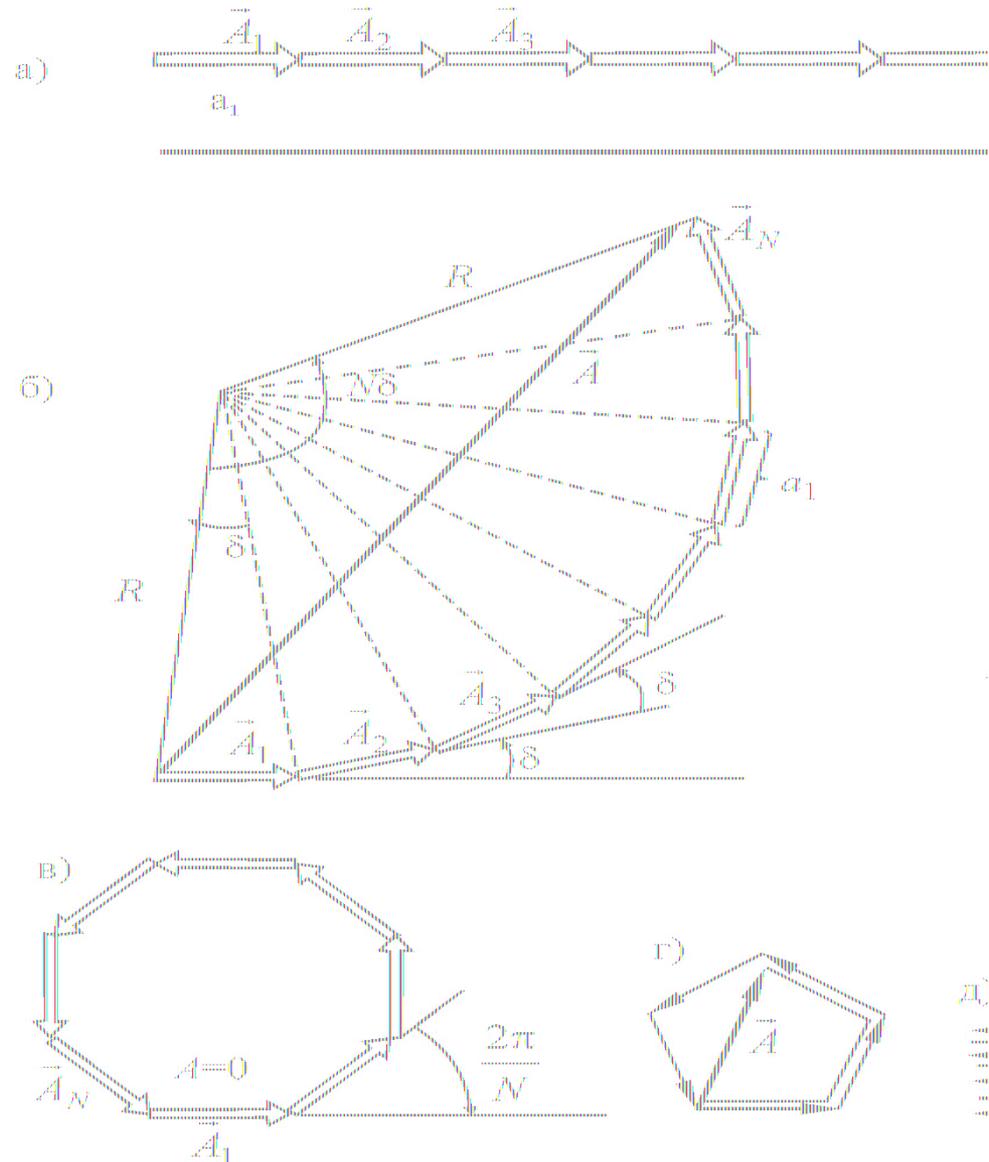
$$u = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi.$$

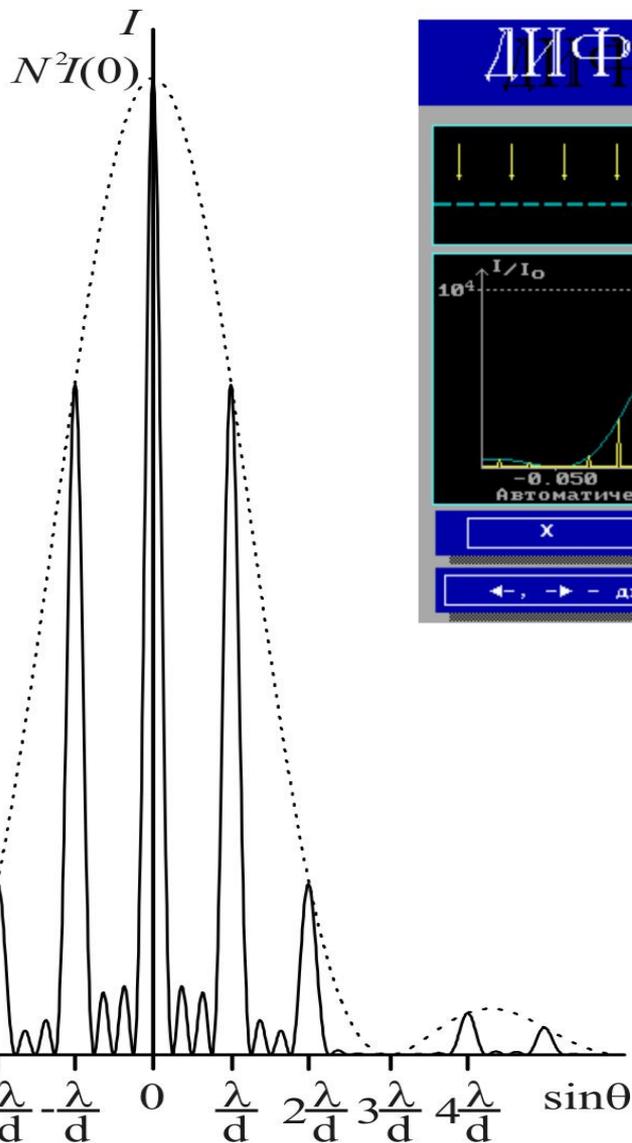




*Рис.* Схема дифракции света на решетке  
 $d$  - период,  $L$  - расстояние от решетки до экрана  
 Показаны только два главных максимума на экране

# Векторная диаграмма при дифракции на решетке





*Распределение интенсивности при  
дифракции  
Фраунгофера на дифракционной  
решетке.*

## ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

1

3

падающий свет  
 $\lambda = 520 \text{ нм}$

2

$\frac{\lambda}{b} = 0.052$

Автоматический подбор масштаба

4

параметры решетки

$b = 10 \text{ мкм}$     $d = 50 \text{ мкм}$

$D = 5 \text{ мм}$

$D = N \cdot d$

$N = 100$

X
Увелич.
Лупа
λ
Решетка

←, → - движение по меню, Enter - выбор, Esc возврат, F1, F2 - помощь

$y, \text{ см}$

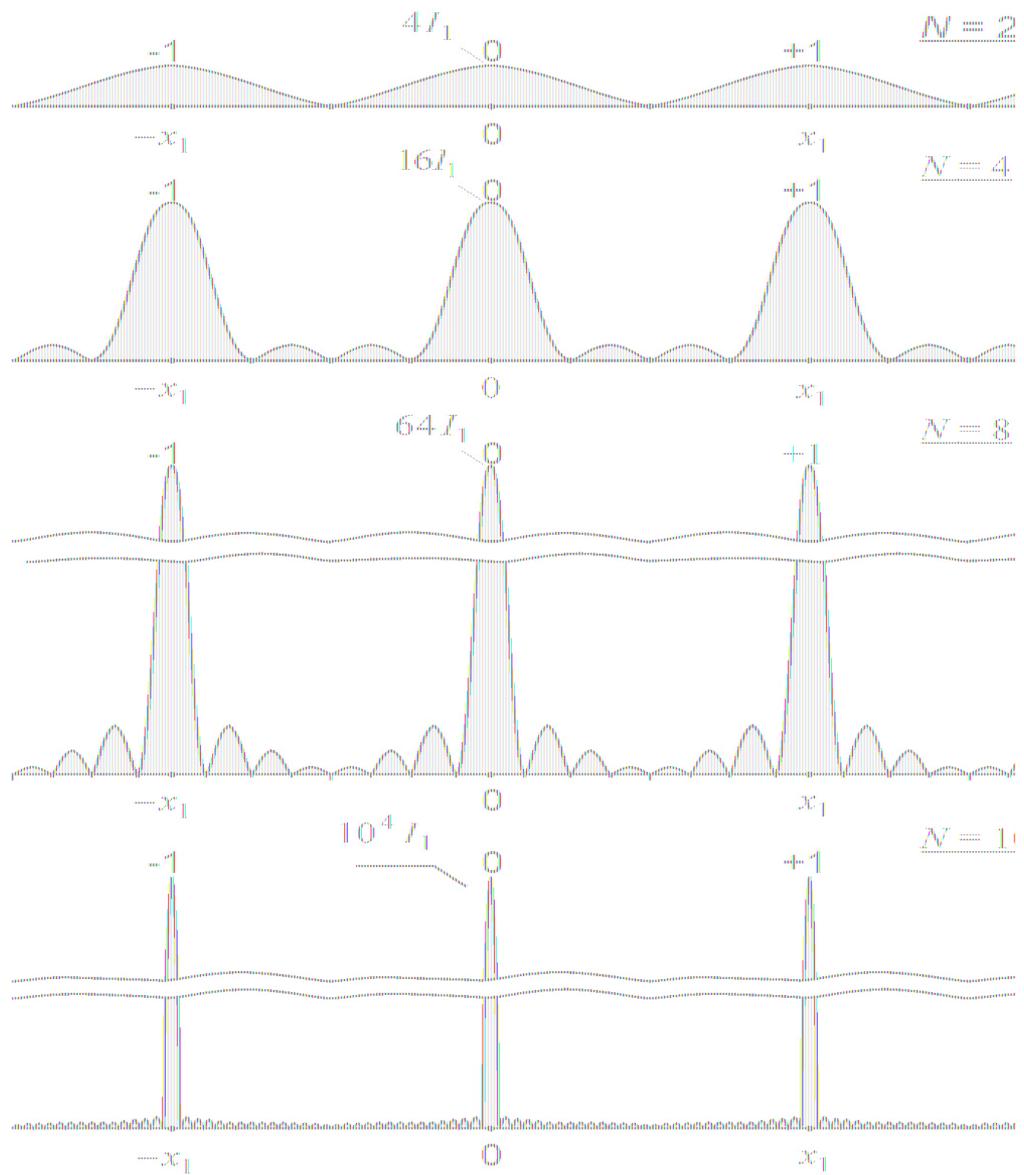
5.0  
4.0  
3.0  
2.0  
1.0  
0.0  
-1.0  
-2.0  
-3.0  
-4.0  
-5.0

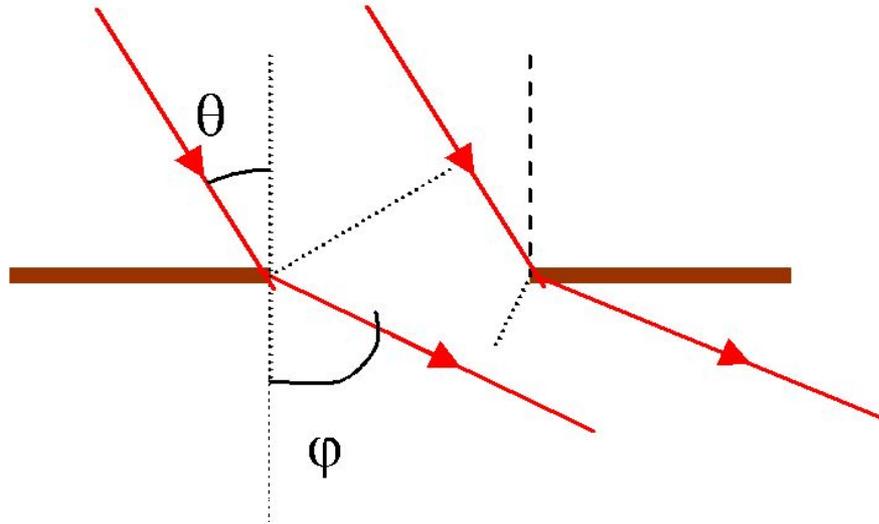
$\theta_m$

$F$

$d = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ 
 $\lambda = 450 \text{ нм}$

$d \sin \theta_m = m\lambda$ 
 $m = 1$ 
 $F = 50 \text{ см}$ 
 $y_m = m \frac{\lambda f}{d} = 1,13 \text{ см}$





Если рассмотреть *наклонное падение* волны на дифракционную решетку, то разность хода между крайними точками равна

$$\Delta l = d(\sin \varphi - \sin \theta)$$

отсюда условие минимумов

$$d(\sin \varphi - \sin \theta) = m\lambda,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

# Дифракция Фраунгофера на периодической структуре

## Краткие выводы.

1. Распределение интенсивности излучения при дифракции монохроматической волны на периодической структуре можно представить, как результат двух процессов: 1) дифракции волны на отверстии, 2) интерференции пучков, исходящих из всех отверстий.
2. Положение главных дифракционных максимумов определяется интерференцией пучков, исходящих из разных отверстий решётки.  
Условие наблюдения главных максимумов

$$d \sin \varphi = m\lambda$$

3. Интенсивность главных максимумов определяется как процессом дифракции на отдельном отверстии, так и процессом интерференции волн, исходящих из всех отверстий.

## Дифракционная решетка как спектральный прибор

Положение узких главных максимумов зависит от длины волны. Это позволяет использовать решетку в качестве спектрального прибора. Решетка способна разлагать свет в спектр. Для этого могут быть использованы дифракционные максимумы различных порядков (кроме  $m=0$ ). Практически, однако, используются главные максимумы, расположенные в пределах основного лепестка диаграммы излучения одиночной щели, имеющего полуширину  $b$ . Отсюда можно получить оценку:

$$m_{\max} \leq \frac{d}{b}$$

## Угловая дисперсия

*Угловой дисперсией* спектральных приборов называется величина  $D = \frac{d\theta}{d\lambda}$

В случае решетки, угловая дисперсия равна  $D = \frac{m}{d \cos \theta}$

Приближенное выражение справедливо в случае малых дифракционных углов  $D \approx \frac{m}{d}$

## Разрешающая способность

*Разрешающей способностью* спектрального прибора принято называть отношение  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ ,

где  $\delta\lambda$  – минимальный интервал между двумя близкими спектральными линиями, при котором они могут быть разрешены, то есть, отделены одна от другой.

В качестве критерия разрешения используется обычно **критерий разрешения Рэля**. Спектральные линии с близкими значениями  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$  считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной спектральной линии совпадает по своему положению с первым дифракционным минимумом для другой спектральной линии.

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

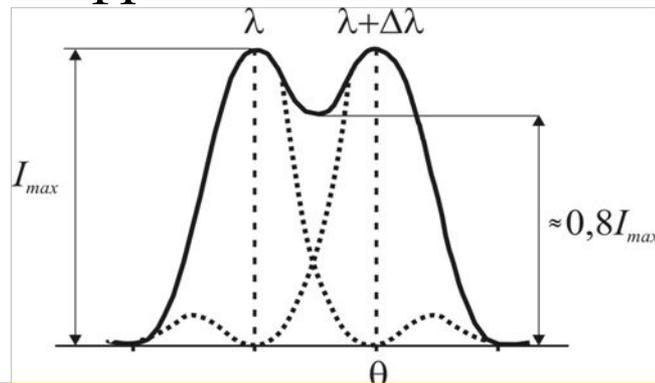
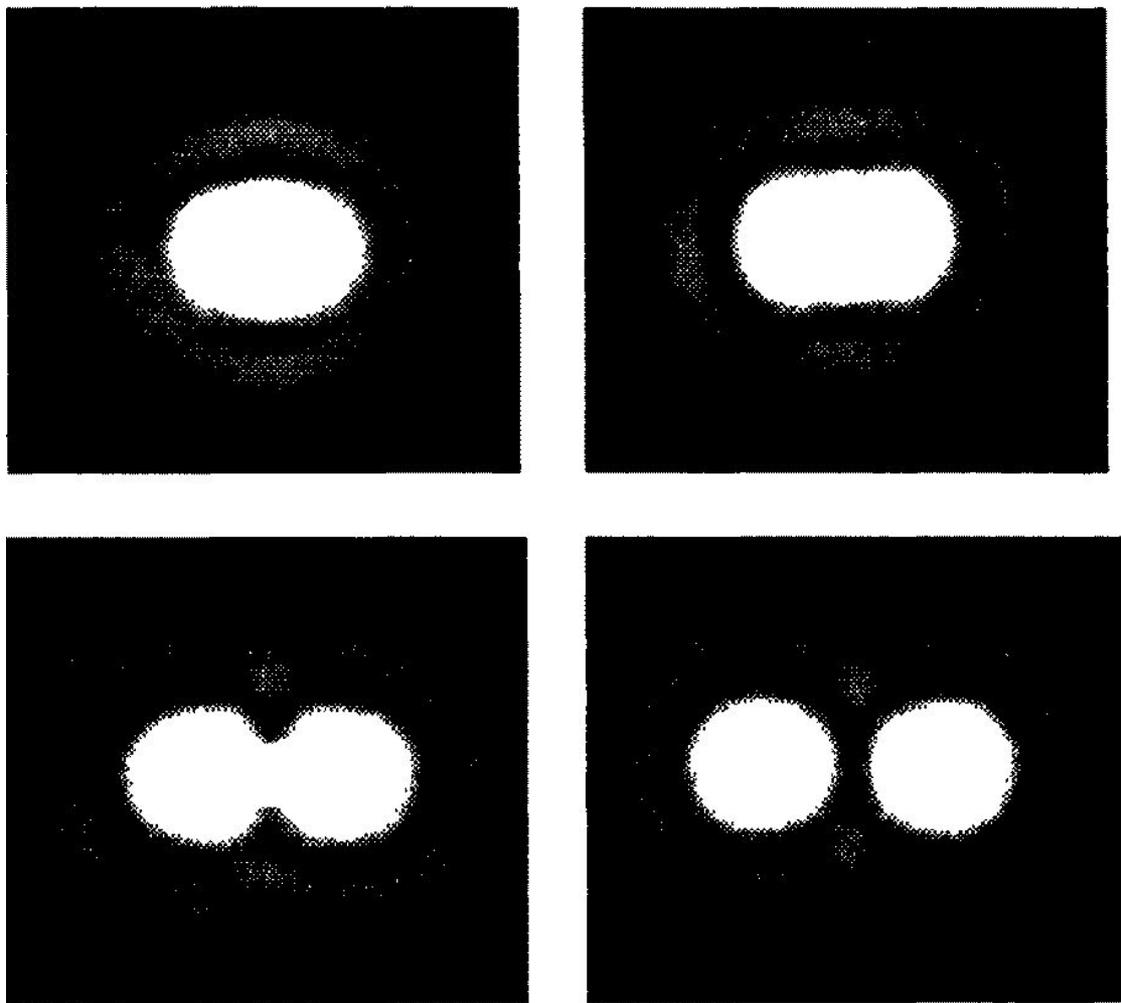


Рис. Критерий Рэля.



Фотографии дифракционных изображений двух близких источников приведены на рис. 8.14. На первых двух фотографиях представлены случаи недостаточного разрешения, на двух следующих — искомые точки разрешаются.

# Примеры решения задач. (Дифракция Фраунгофера)

**1.** На щель шириной  $b = 20$  мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ( $\lambda = 500$  нм). Найти ширину изображения  $A$  щели на экране, удаленном от щели на расстояние  $L = 1$  м.

**Дано:**

$$\lambda = 500 \text{ нм}$$

$$L = 1 \text{ м}$$

$$b = 20 \text{ мкм}$$

**A - ?**

**Решение**

Шириной изображения будем считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

Положение дифракционных минимумов на экране определяется формулой

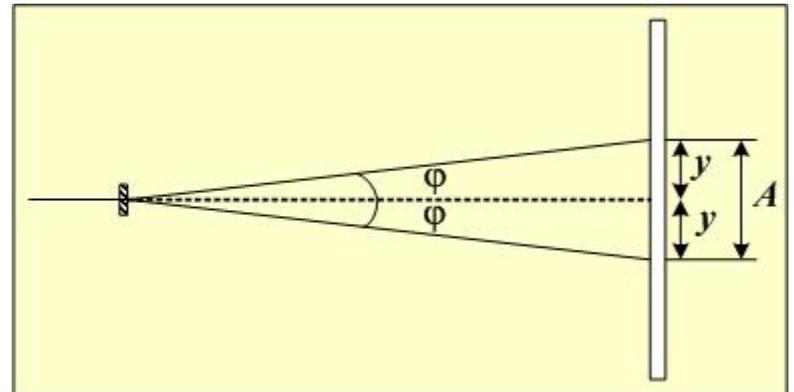
$$b \sin \varphi = m\lambda.$$

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{L}, \quad m = 1.$$

$$b \frac{y}{L} = \lambda, \quad y = \lambda \frac{L}{b}, \quad A = 2y = 2\lambda \frac{L}{b},$$

$$A = 2\lambda \frac{L}{b} = 2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{-2} (\text{м}).$$

**Ответ:**  $A = 5 \text{ см.}$



**2.** На щель шириной  $b = 6\lambda$  падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda$ . Под каким углом  $\alpha$  будет наблюдаться третий дифракционный минимум интенсивности света?

**Дано:**

$$b = 6\lambda$$

$\alpha - ?$

**Решение**

Положение дифракционных минимумов на экране определяется формулой

$$b \sin \alpha = m\lambda.$$

$$\sin \alpha = \frac{m\lambda}{b}.$$

$$\alpha = \arcsin \frac{m\lambda}{b} = \arcsin \frac{3\lambda}{6\lambda} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

**Ответ:**  $\alpha = 30^\circ$ .

**3.** На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия ( $\lambda_1 = 589$  нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции  $\varphi_1 = 17^\circ 8'$ . Некоторая линия дает в спектре второго порядка угол дифракции  $\varphi_2 = 24^\circ 12'$ . Найти длину волны этой линии и число штрихов на единицу длины решетки.

**Дано:**

$$\lambda_1 = 589 \text{ нм}$$

$$\varphi_1 = 17^\circ 8'$$

$$\varphi_2 = 24^\circ 12'$$

---

$$\lambda_2 - ?$$

$$N - ?$$

**Решение**

Положение дифракционных максимумов на экране определяется формулой

$$d \sin \varphi = m \lambda.$$

Запишем условие максимума для обеих линий:

$$d \sin \varphi_1 = \lambda_1,$$

$$d \sin \varphi_2 = 2 \lambda_2.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = 2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Отсюда:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 \sin \varphi_2}{2 \sin \varphi_1} \approx 410 \text{ (нм)}.$$

**3.** На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия ( $\lambda_1 = 589$  нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции  $\varphi_1 = 17^\circ 8'$ . Некоторая линия дает в спектре второго порядка угол дифракции  $\varphi_2 = 24^\circ 12'$ . Найти длину волны этой линии и число штрихов на единицу длины решетки.

**Решение (продолжение)**

Число штрихов на единицу длины решётки

$$N = \frac{1}{d}.$$

$$d \sin \varphi_1 = \lambda_1, \quad d = \frac{\lambda_1}{\sin \varphi_1}.$$

$$d = \frac{\lambda_1}{\sin \varphi_1} \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

**Ответ:**  $\lambda_2 = 409,9$  нм;  $N = 500$  мм<sup>-1</sup>.

**4.** На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ( $\lambda_1 = 670$  нм) спектра второго порядка?

**Дано:**

$$\lambda_1 = 670 \text{ нм}$$

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = 2$$

---

$$\lambda_2 - ?$$

**Решение**

Дифракционные максимумы на экране накладываются друг на друга, если для них равны углы дифракции.

Величины углов дифракции определяется формулой

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}.$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{m_1 \lambda_1}{d} = \frac{m_2 \lambda_2}{d}.$$

$$m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1 m_1}{m_2}.$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 m_1}{m_2} = \frac{2 \cdot 670}{3} \approx 447 \text{ (нм)}.$$

**Ответ:**  $\lambda = 447$  нм

**5.** Найти наибольший порядок спектра  $k$  для желтой линии натрия ( $\lambda = 589 \text{ нм}$ ), если период дифракционной решетки  $d = 2 \text{ мкм}$ .

**Дано:**

$$\lambda = 589 \text{ нм}$$

$$d = 2 \text{ мкм}$$

$$m_{\max} - ?$$

**Решение**

Величины углов дифракции определяется формулой

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

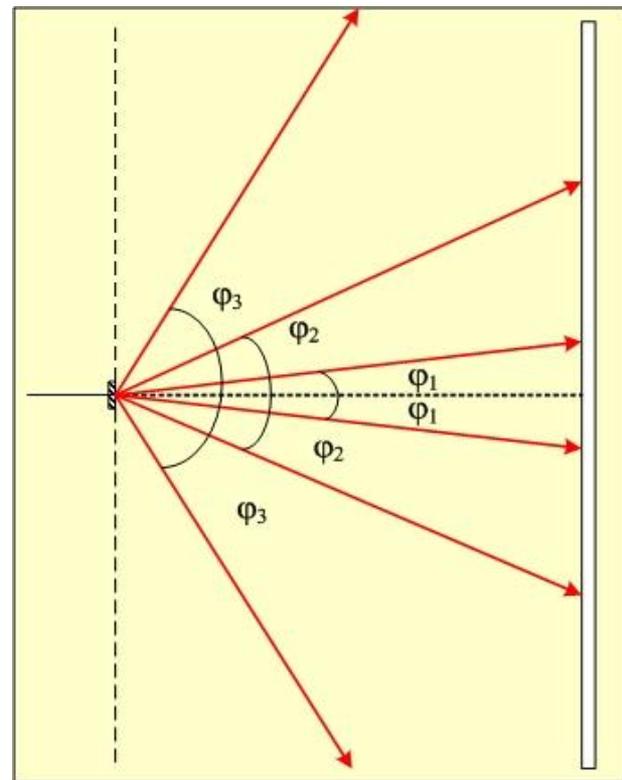
Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}.$$

Допустимы такие  $m$ , когда  $\frac{m\lambda}{d} \leq 1$ .

$$m \leq \frac{d}{\lambda}. \quad m \leq \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,589 \cdot 10^{-6}} \approx 3,396.$$

$$k = m_{\max} = 3.$$



**Ответ:**  $k = 3$ .

