Сегодня: *

Тема 2 СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

- 2.1 Способы представления гармонических колебаний
- 2.2 Сложение гармонических колебаний. Биения
- 2.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний
- 2.4 Фигуры Лиссажу (частные случаи)

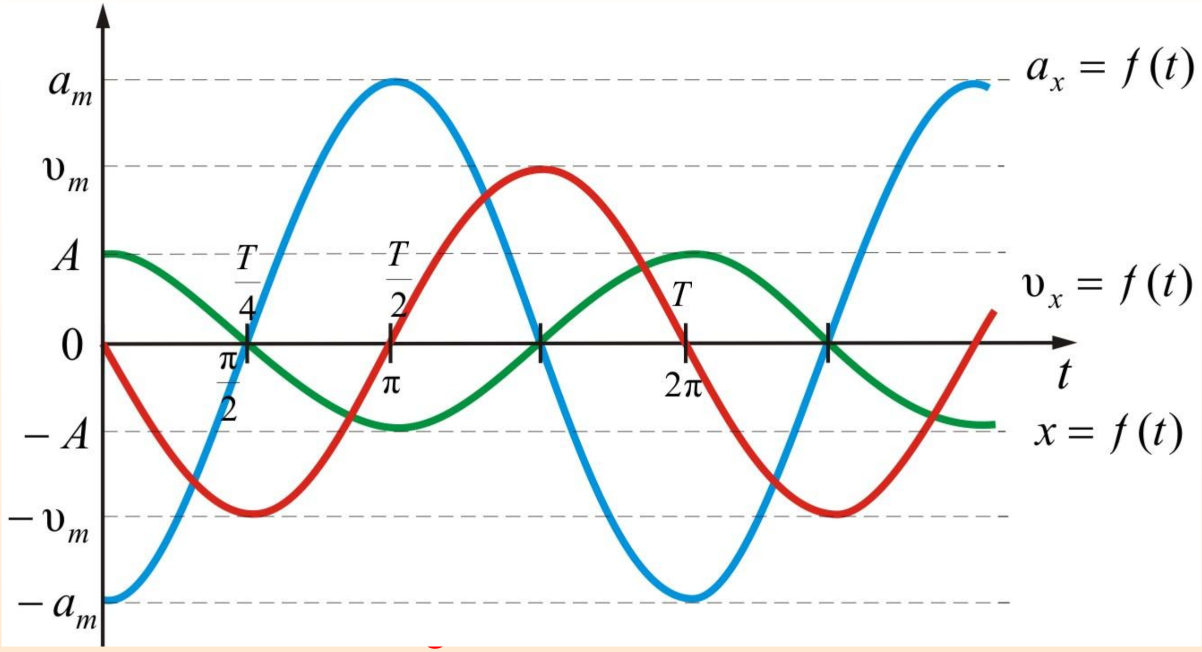
2.1 Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

•***аналитический:*** $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

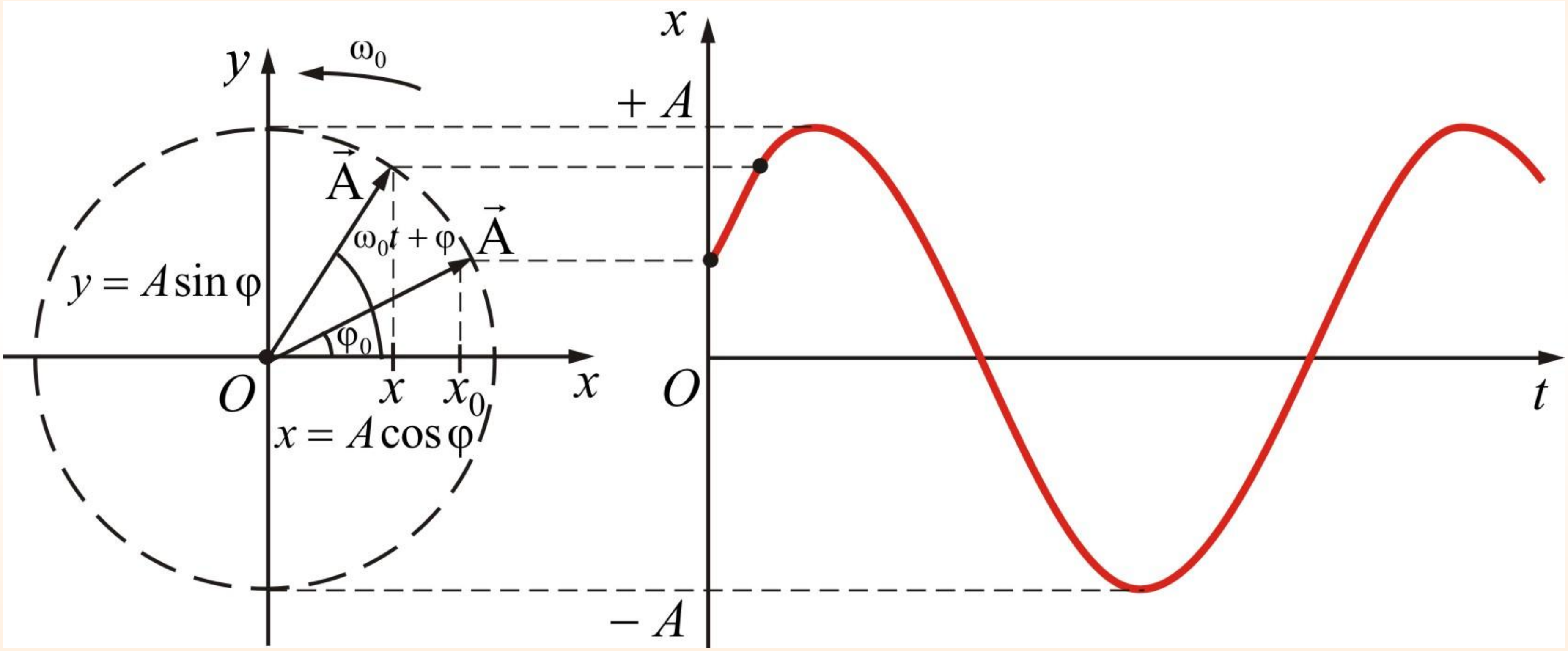
$\upsilon_x = \upsilon_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $a_x = -a_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

•***графический;***



•***геометрический,*** с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм).

Рассмотрим подробнее ***геометрический*** способ, с помощью вектора амплитуды ***(метод векторных диаграмм).***



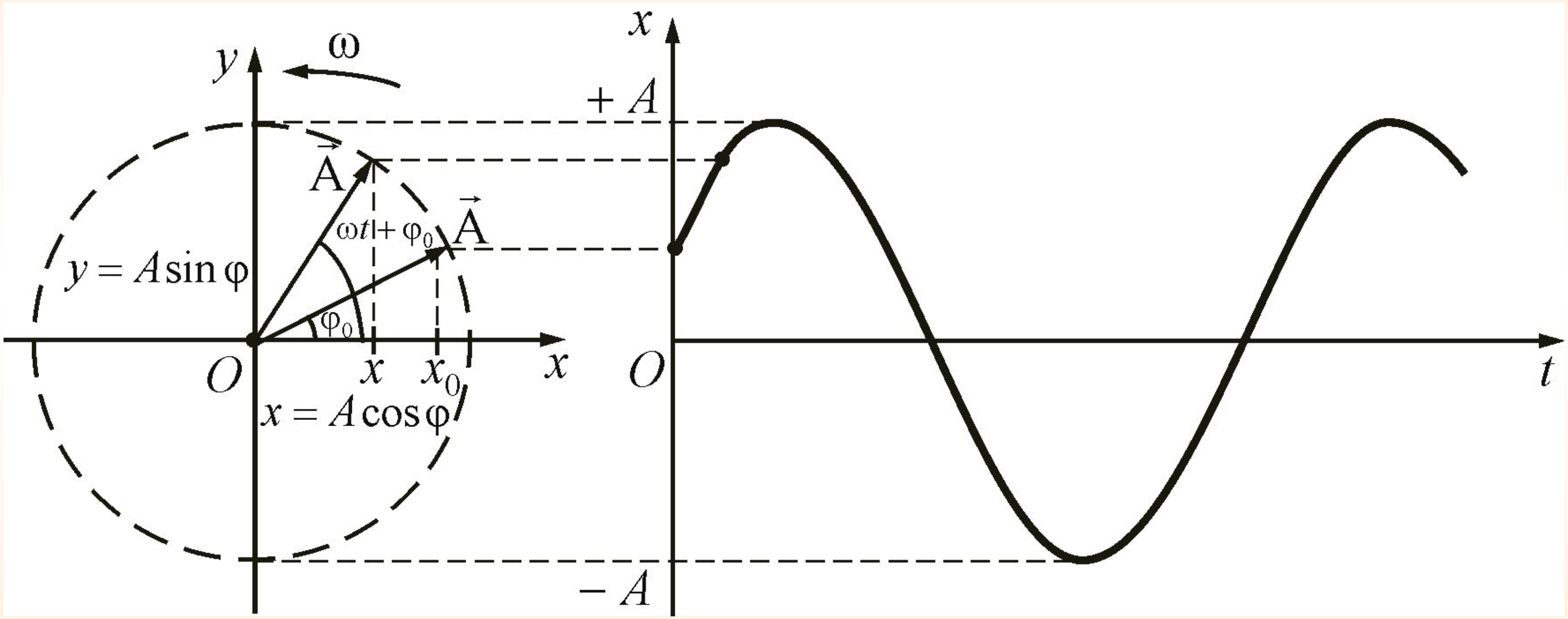
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$

Ox – опорная прямая

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad\qquad x_0 = A\cos\varphi_0$$

Вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.



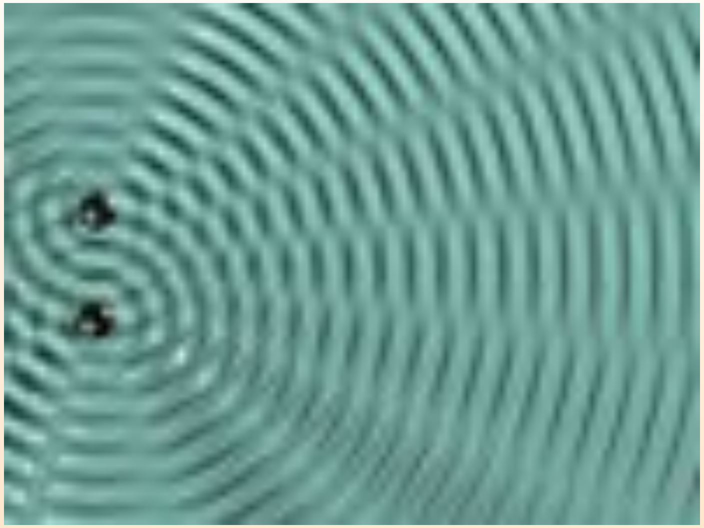
Проекция кругового движения на ось *y*, также совершает гармоническое колебание

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

2.2 Сложение гармонических колебаний. Биения

Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая гармонически колеблющимся шариком.

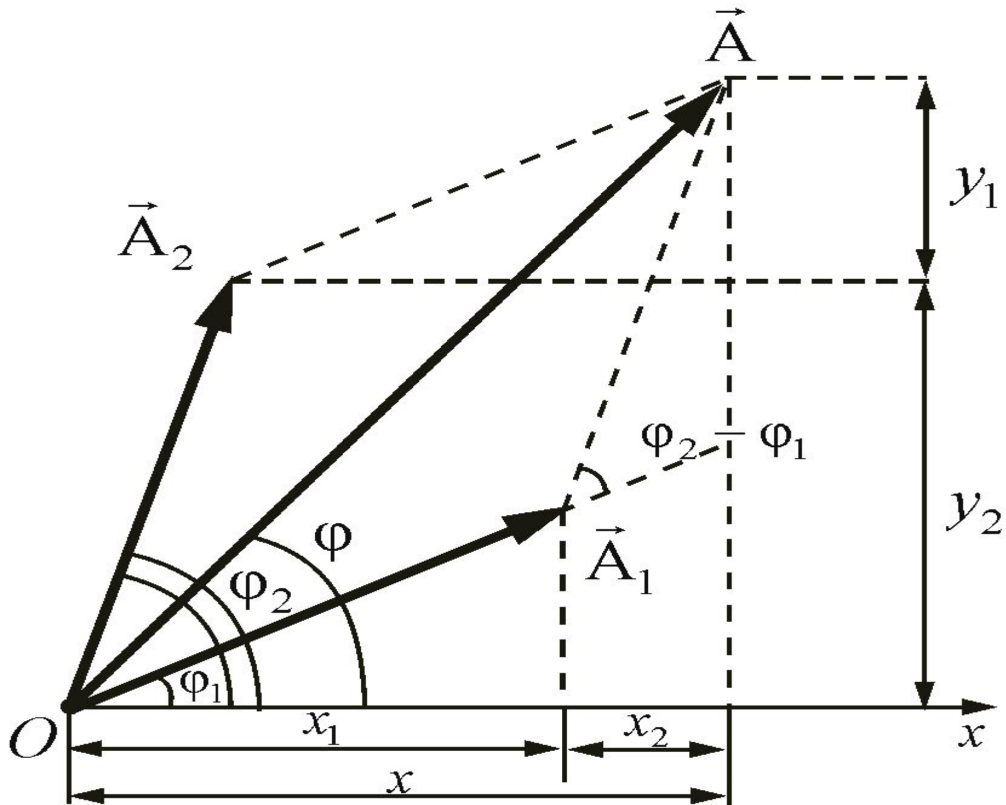
Интерференция между двумя круговыми волнами от точечных источников, колеблющихся в фазе друг с другом. На поверхности жидкости образуются узловые линии, в которых колебание max или отсутствует.



Пусть ***точка*** одновременно участвует ***в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.***

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \qquad (2.2.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



Такие два колебания называются когерентными, их разность фаз не зависит от времени:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{const}$$

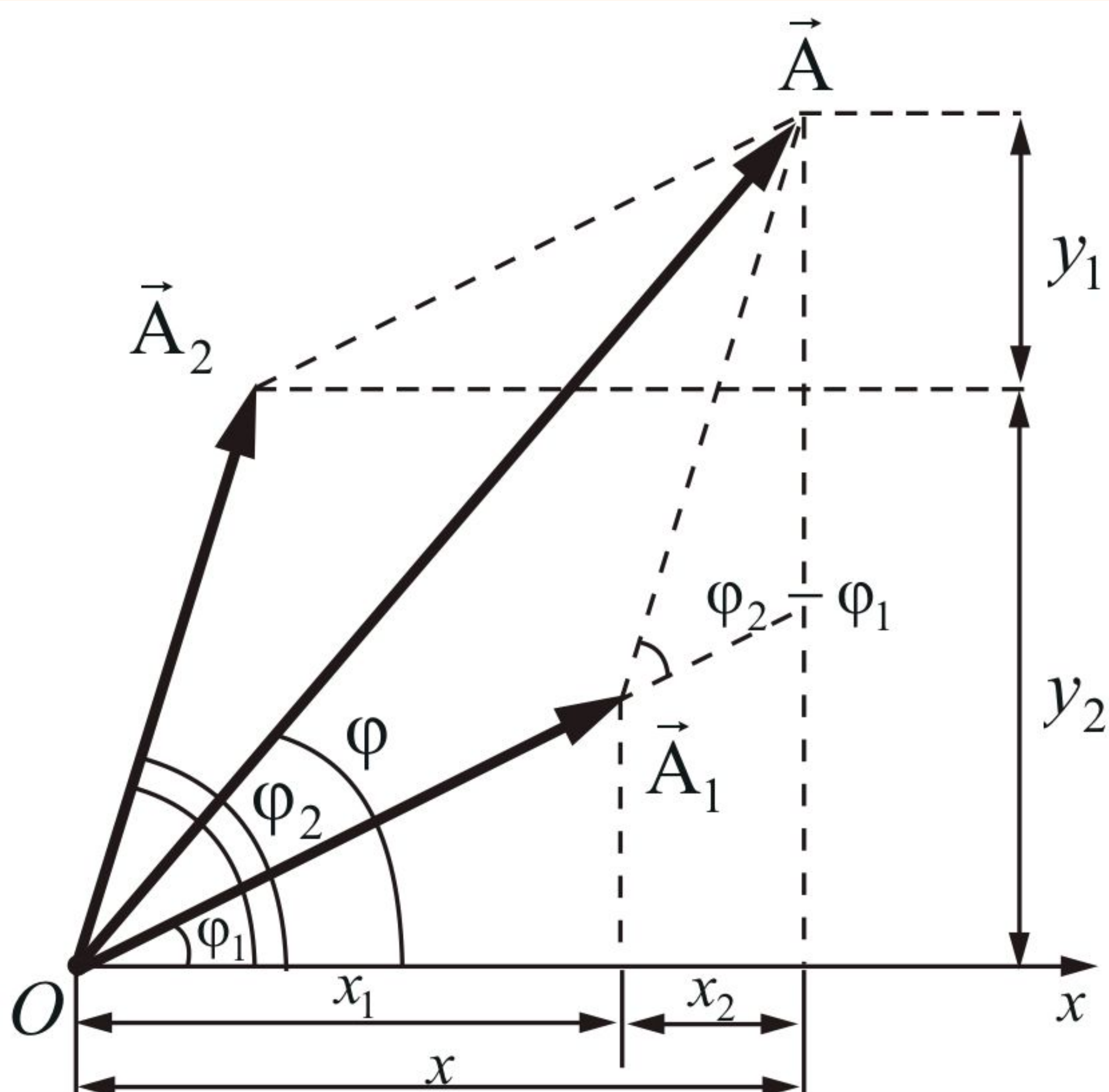
$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

Ox – опорная прямая

A_1 – амплитуда 1-го колебания

φ_1 – фаза 1-го колебания.



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

- ***результирующее колебание,*** тоже гармоническое, с частотой **ω**:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду, результирующего колебания:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (2.2.2)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}} \qquad (2.2.3)$$

Амплитуда ***A*** результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$

Рассмотрим несколько простых случаев.

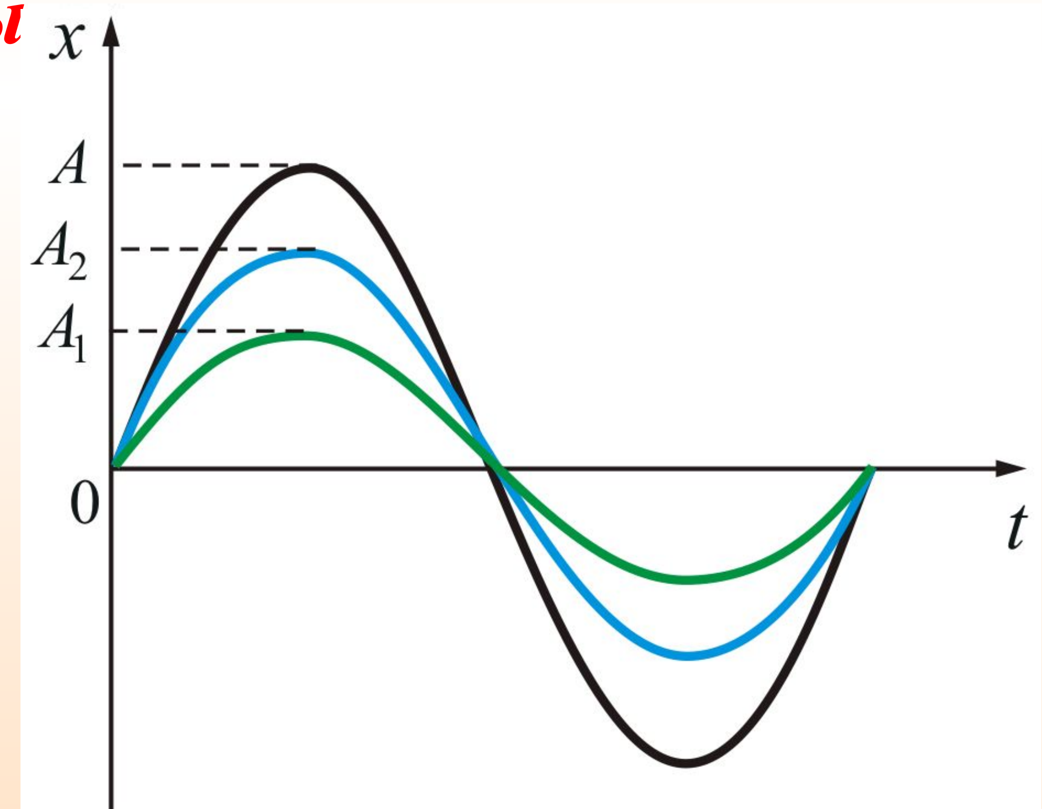
1. Разность фаз равна нулю или четному числу π,

то есть $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ и

$$A = A_1 + A_2 \qquad (2.2.4)$$

колебания синфазны

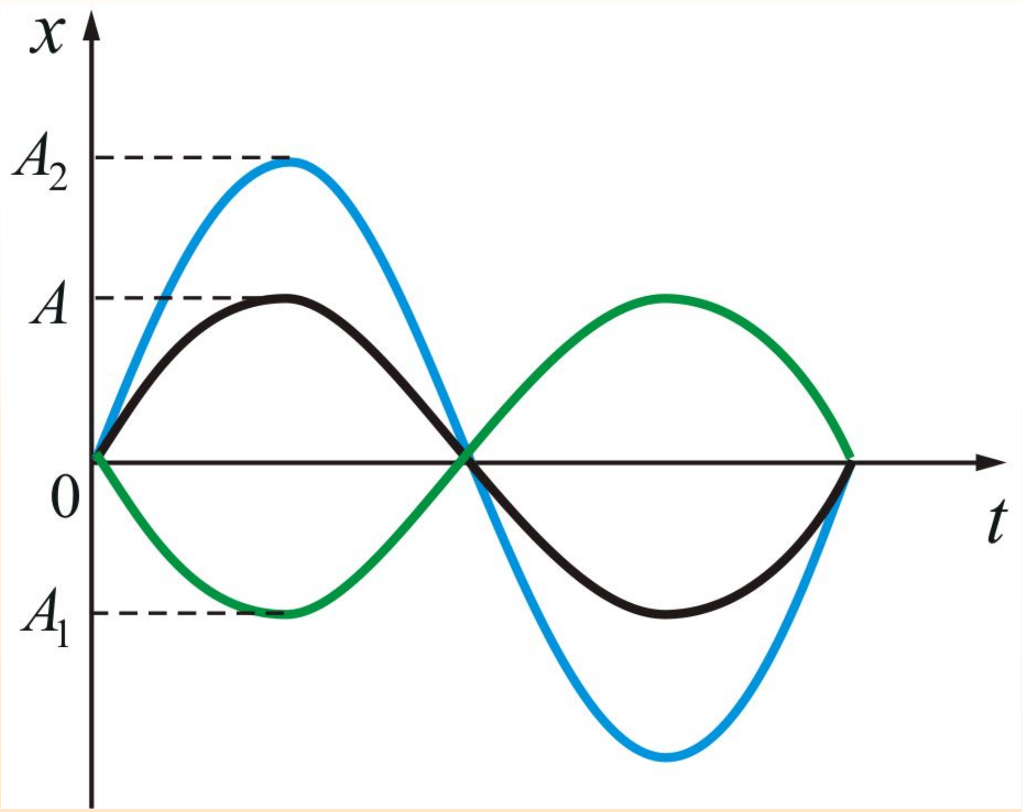


2. Разность фаз равна нечетному числу π, то есть $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$. Отсюда

$$A = |A_2 - A_1| \qquad (2.2.5)$$

колебания ***в противофазе***



3. Разность фаз изменяется во времени произвольным образом

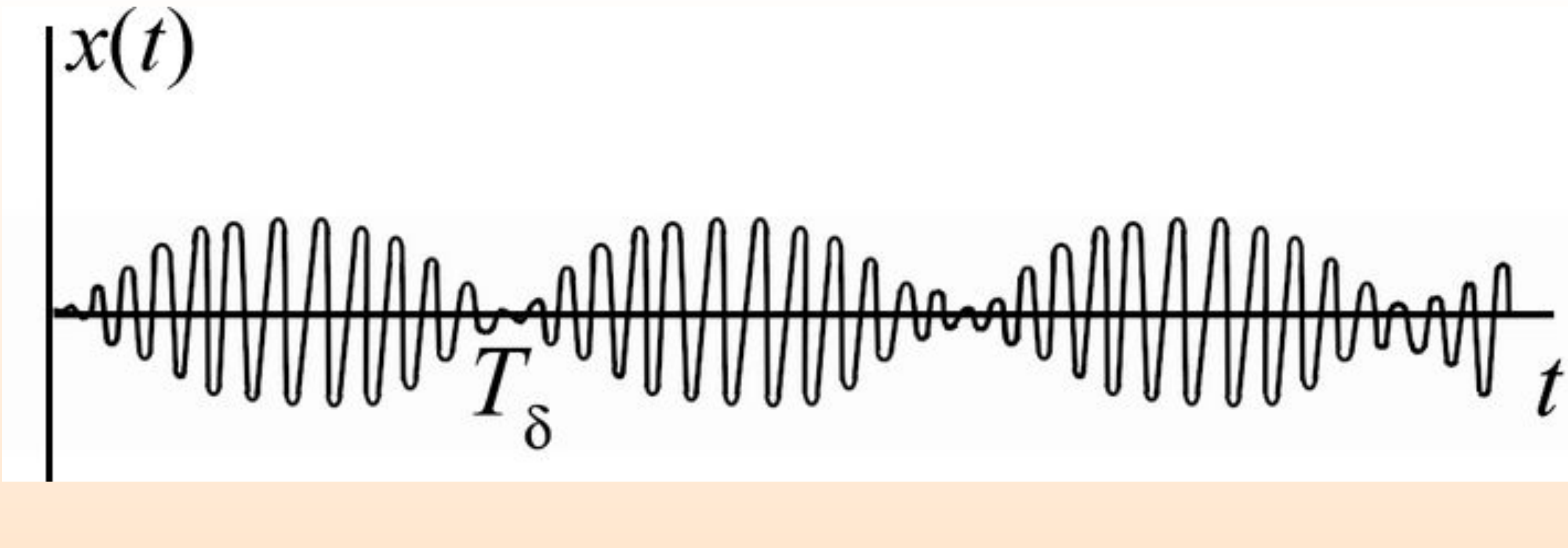
$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)] \\ x_2 = A_2\cos\left[\omega_2 t + \varphi_2(t)\right] \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

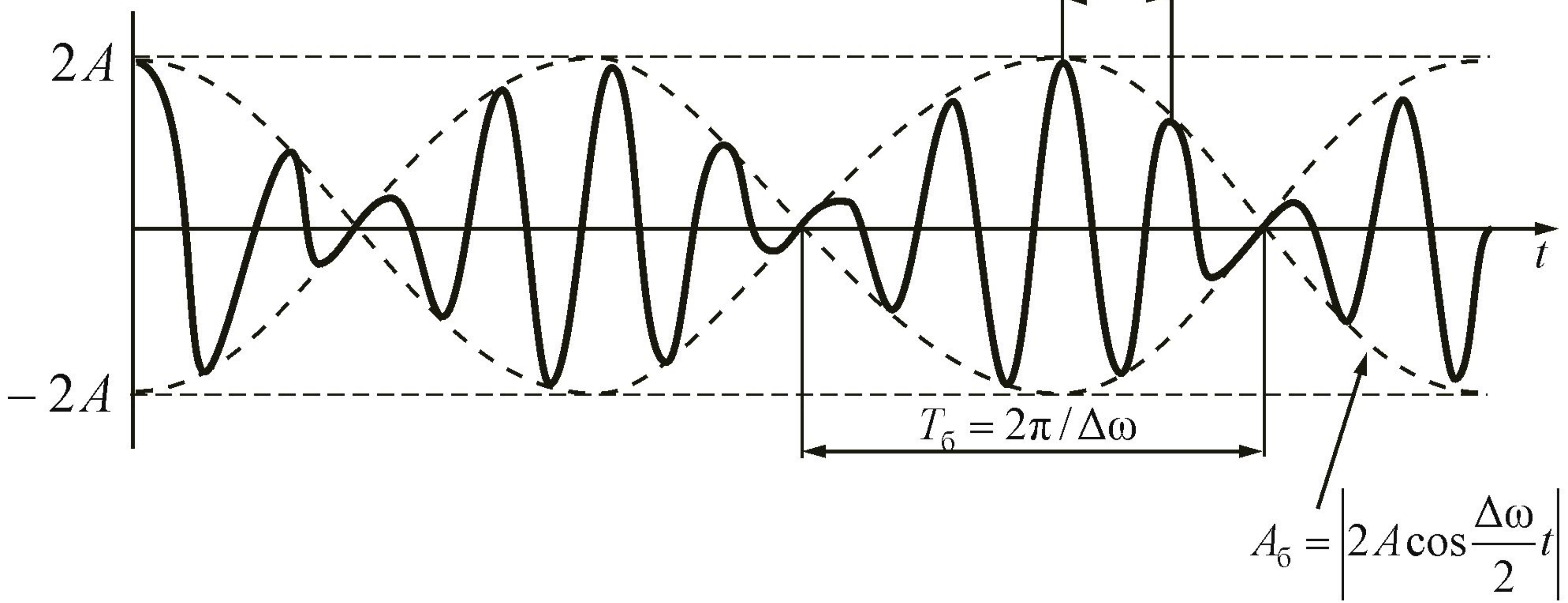
Это ***некогерентные колебания***

Здесь интересен случай, называемый биениями, когда частоты близки $\omega_1 \approx \omega_2$

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$, называются биениями.

$$x = A_б \cos \omega_0 t$$





Колебания вида $x = A(t)\cos\left[\omega t + \varphi(t)\right]$

называются ***модулированными.***

Метод ***биений*** используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

Любые сложные периодические колебания можно представить в виде ***суперпозиции*** одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами кратными циклической частоте ω:

$$S(t) = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(\omega + \varphi_1) +$$

$$+ A_2\cos(2\omega t + \varphi_2) + ... + A_n\cos(m\omega t + \varphi_n)$$

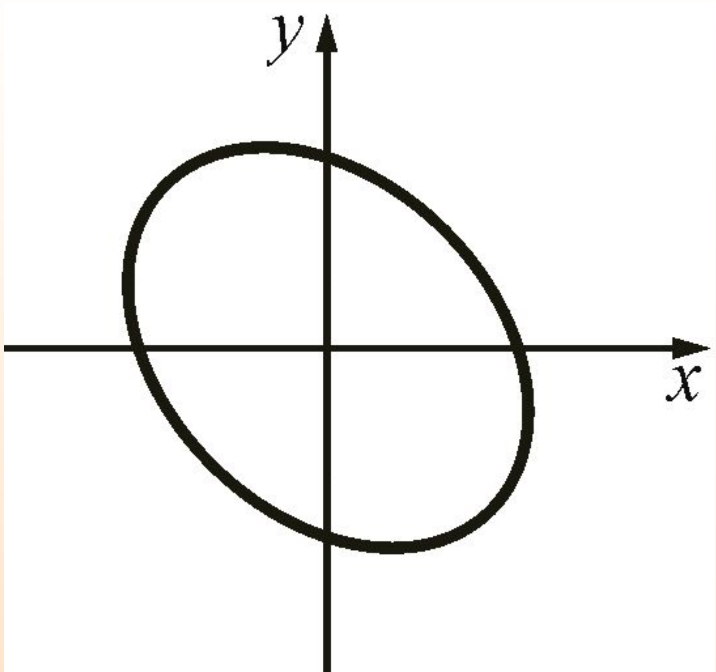
Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами ω, 2ω, 3ω, ..., называются *первой (или основной)*, *второй*, *третьей* и т.д. *гармониками* сложного периодического колебания.

2.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1); \qquad y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad \Delta\phi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.3.1)$$



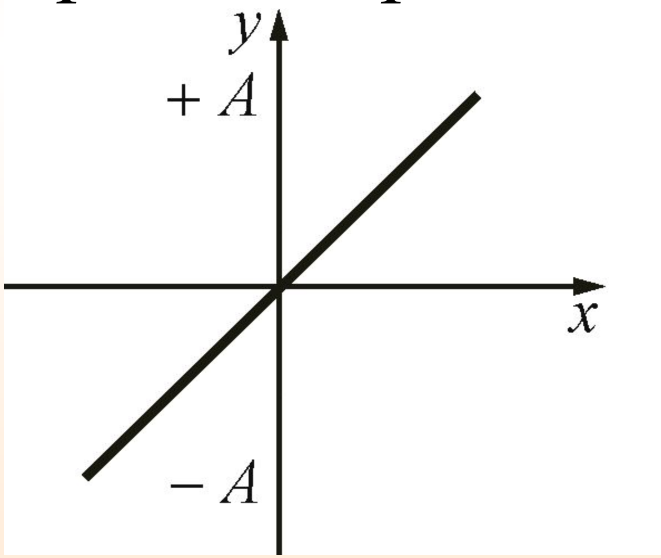
В результате получили уравнение **эллипса** с произвольно расположенными осями

2.4 Фигуры Лиссажу (частные случаи)

1. Начальные фазы колебаний одинаковы $\varphi_1 = \varphi_2$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \qquad (2.4.1)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат

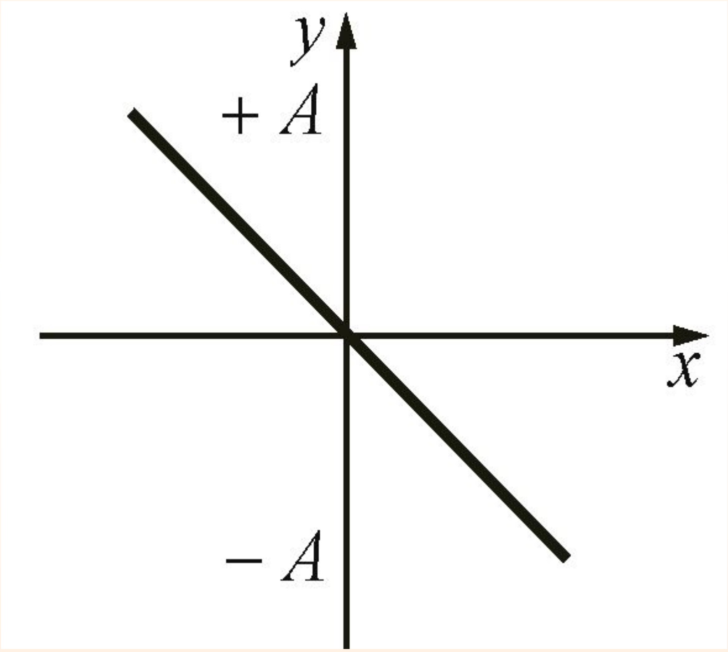


$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Такие колебания называются ***линейно поляризованными.***

2. Начальная разность фаз равна π. $\cos\pi = -1$

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x \qquad (2.4.2)$$

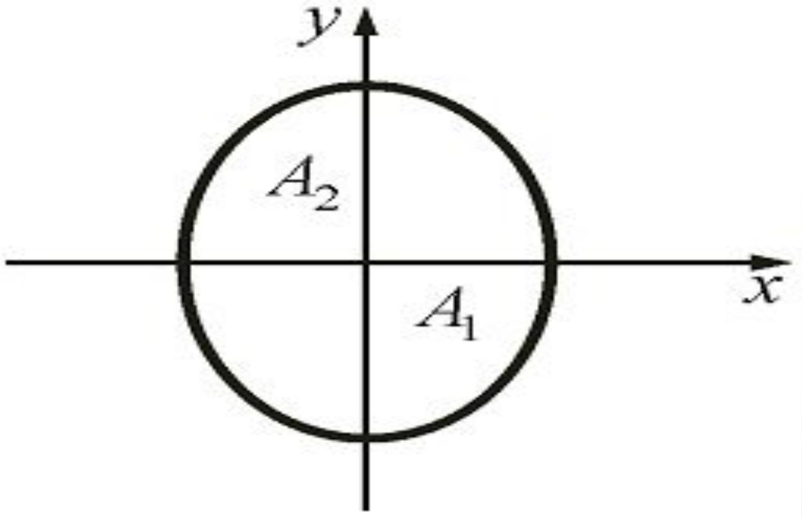


$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad (2.4.3)$$

3. Начальная разность фаз равна π/2. $\cos\pi/2=0$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1 \qquad (2.4.4)$$

– это уравнение эллипса с полуосями A_1 и A_2 (***Эллиптически поляризованные колебания***)



При $A_1 = A_2$ – получим уравнение окружности (***циркулярно-поляризованные колебания***).

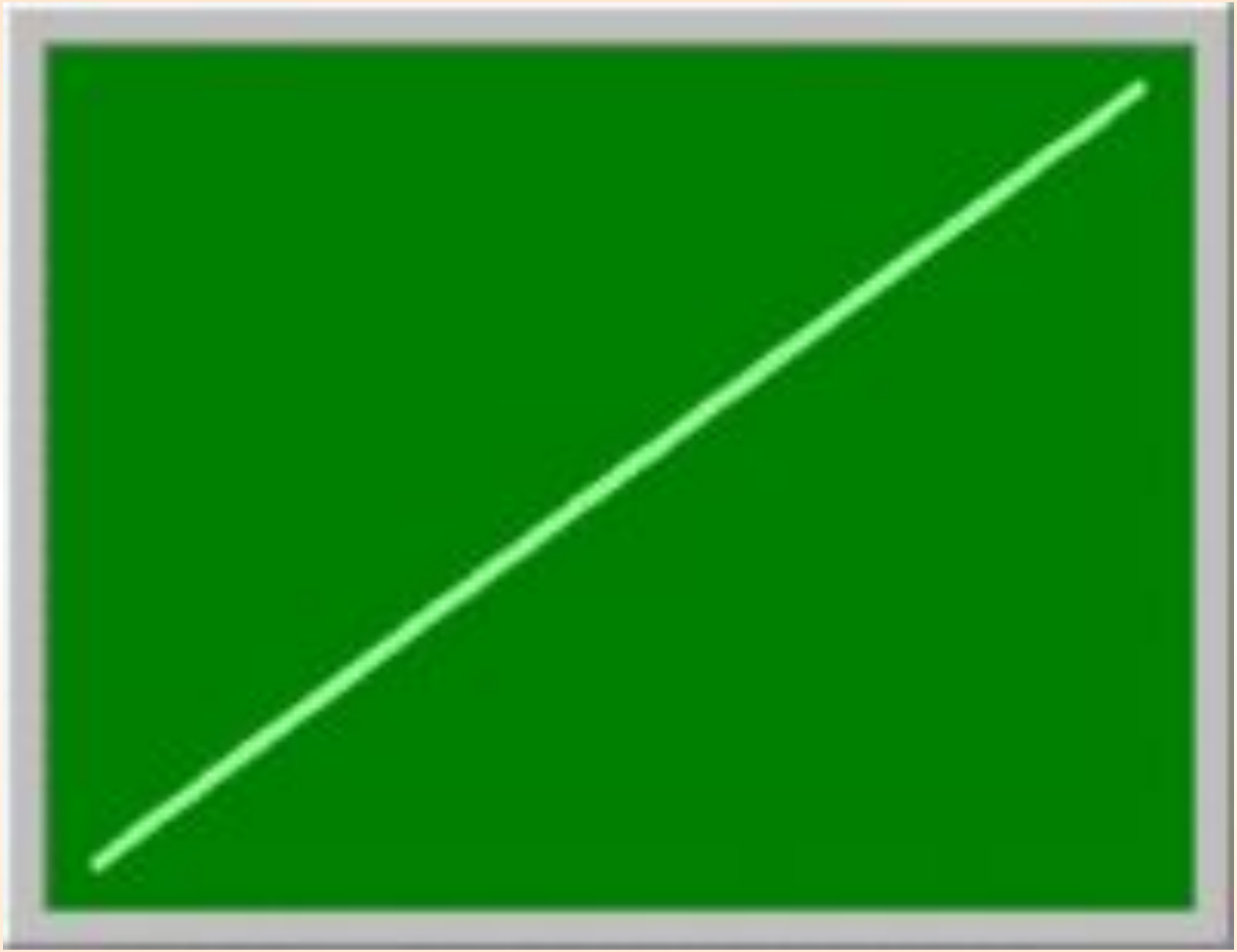
4. Все остальные разности фаз дают эллипсы *с различным углом наклона относительно осей координат.*

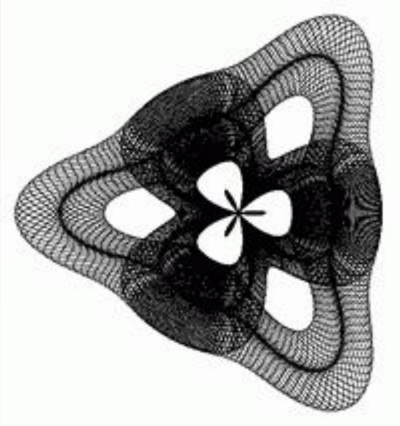
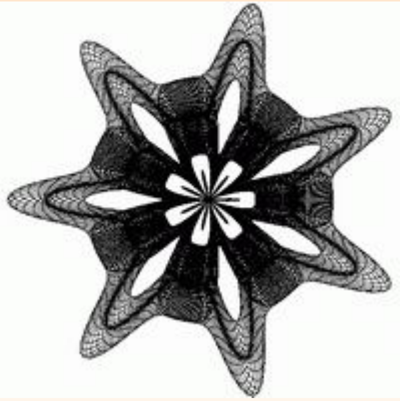
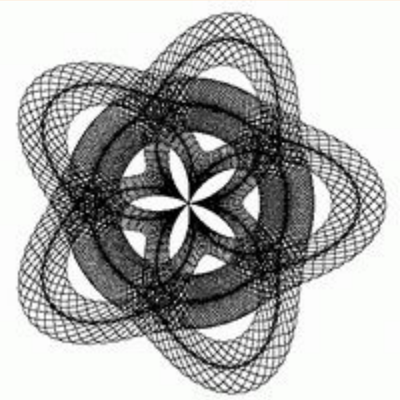
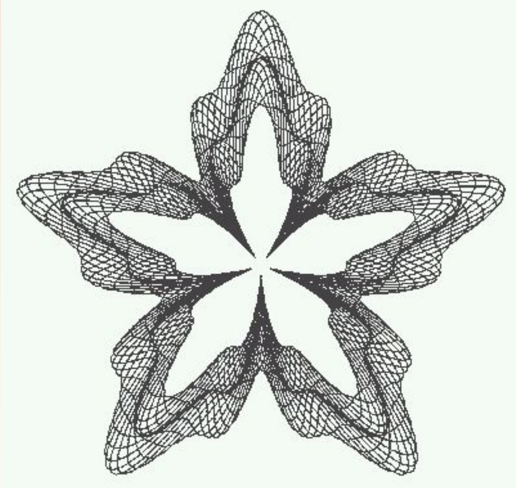
Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются фигурами Лиссажу.

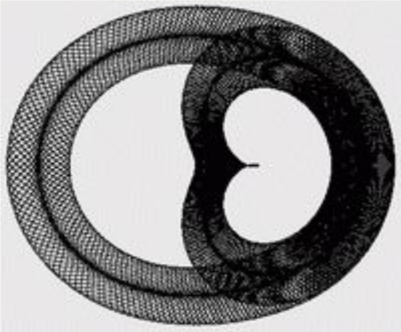
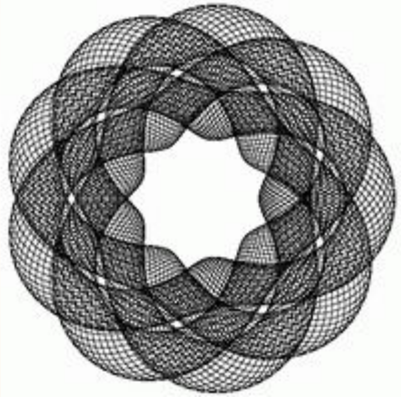
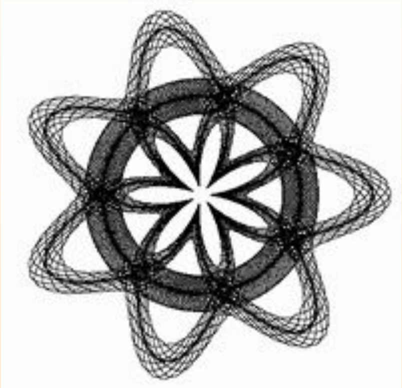
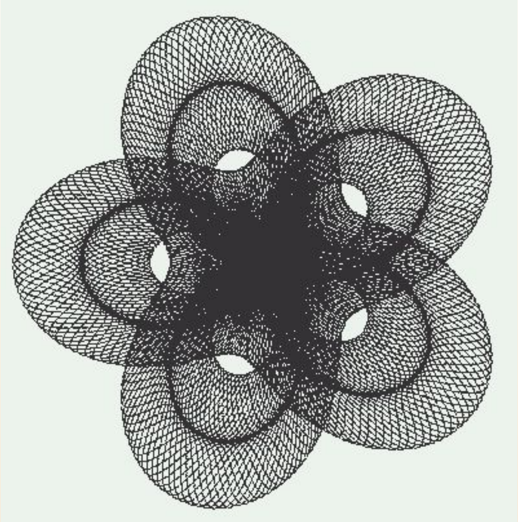
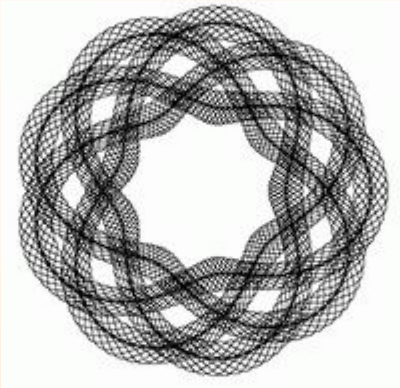
Здесь рассматривались простейшие случаи, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Если $\omega_1 \neq \omega_2$ тогда в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу



Фигуры Лиссажу при $\omega_1 \neq \omega_2$