Сегодня: *

# Тема 3.

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

3.1 Свободные затухающие механические колебания

3.2 Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

3.3 Вынужденные механические колебания

3.4 Автоколебания

# 3.1 Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

***Сила трения*** (или *сопротивления*)

$$\boxed{\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{\upsilon}}$$

где $r$ – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси $x$

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x}$$

где $kx$ – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta$ ; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \qquad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при $\beta \le \omega_0$)

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид

$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)} \qquad (3.1.2)$$

Найдем ***частоту колебаний*** ω. $(\omega \neq \omega_0)$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad \beta \leq \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\;; \qquad \beta = \frac{r}{2m}\;; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

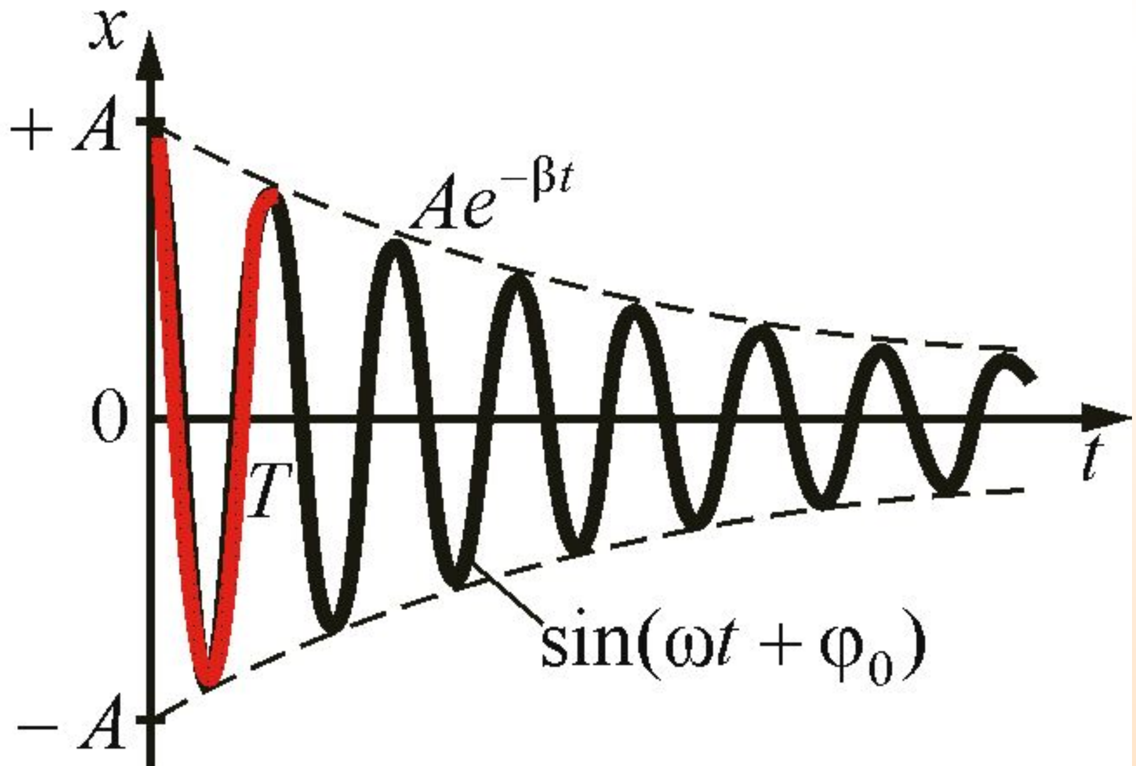
***условный период***

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},}$$

## 3.2 Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

где β – ***коэффициент затухания***



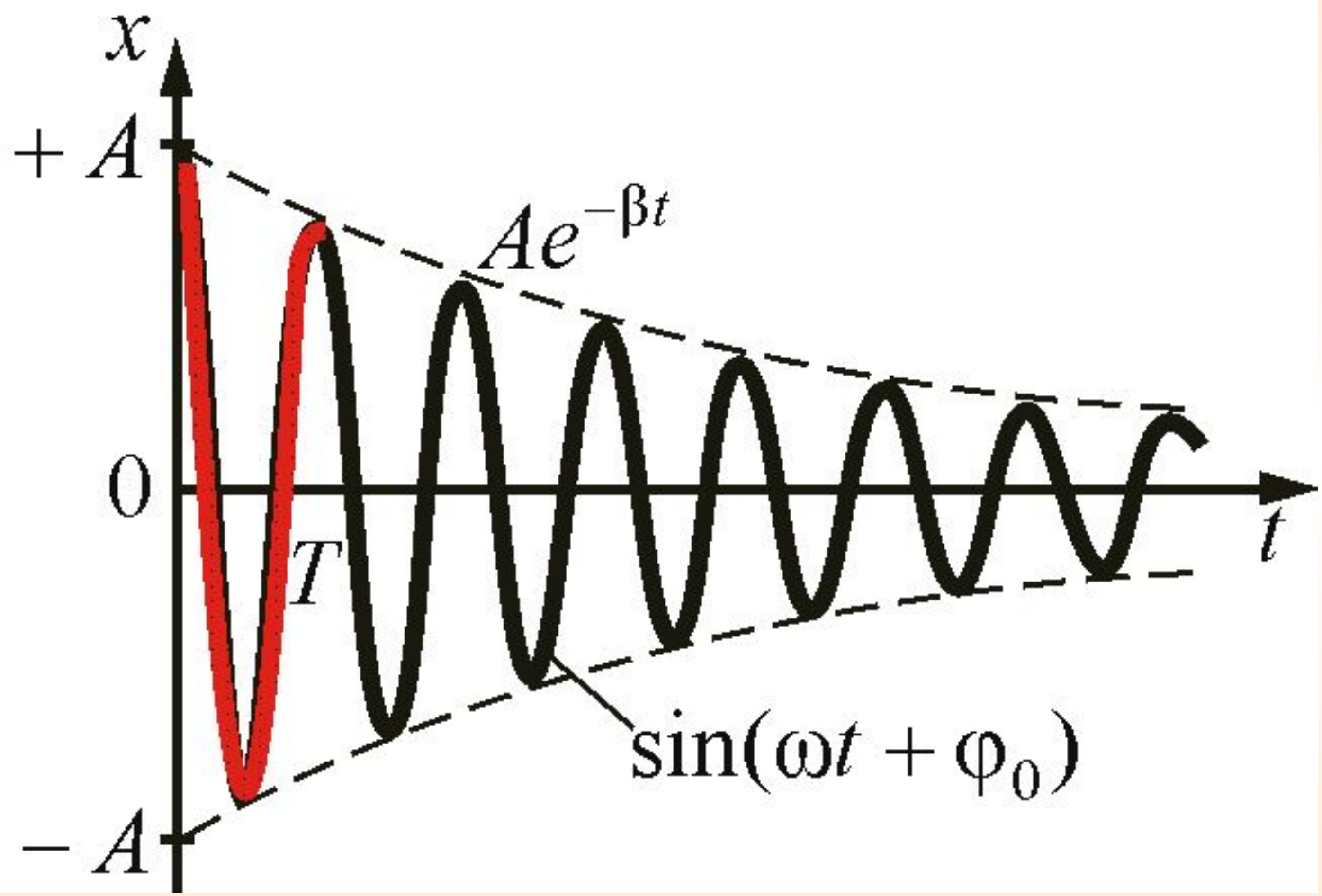
***Логарифмическим декрементом затухания*** называется ***натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T.***

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad ; \qquad \boxed{\chi = \beta T}$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \quad \text{откуда} \quad \beta\tau = 1; \qquad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, ***коэффициент затухания*** β – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого ***амплитуда уменьшается в е раз***,

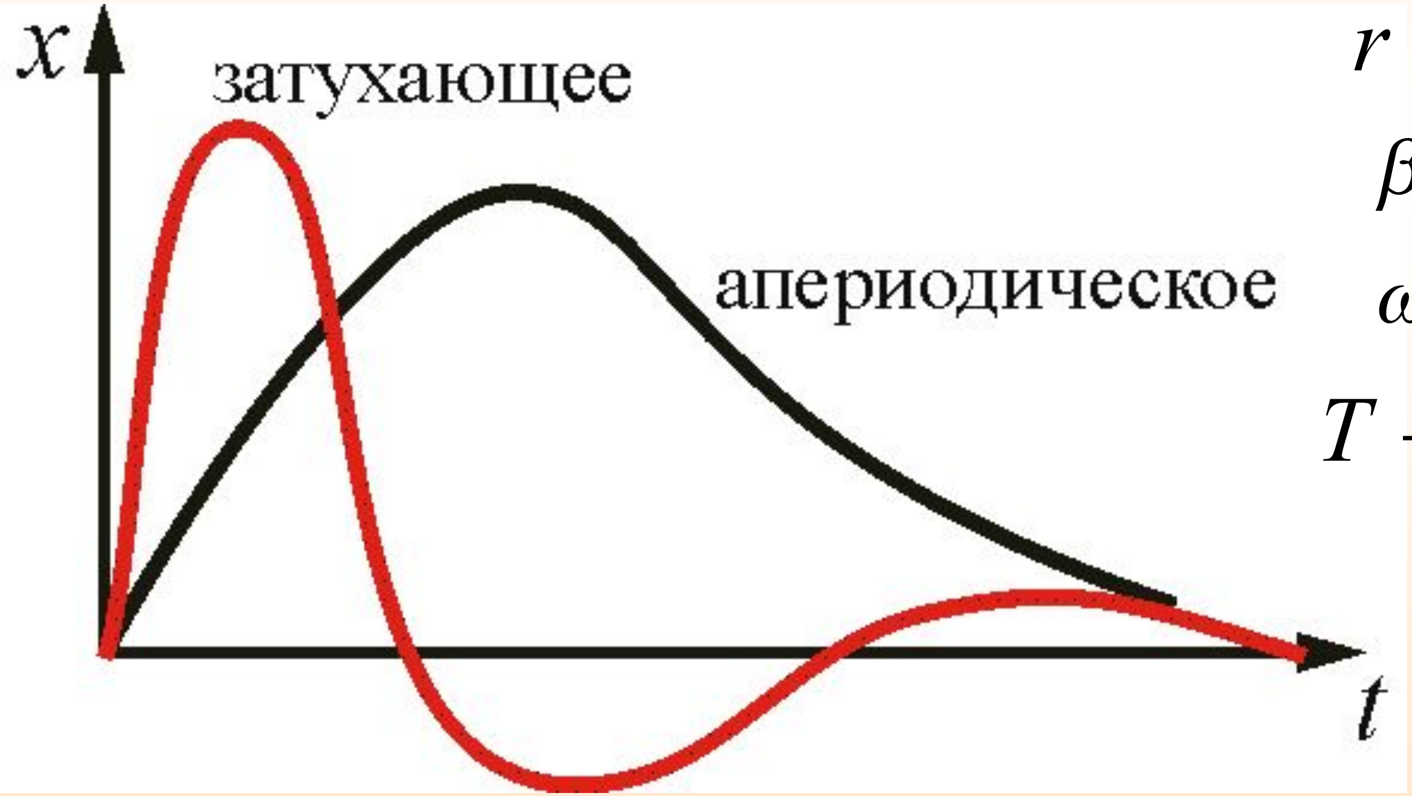
τ – ***время релаксации***.




$$\chi = \beta T$$

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

Когда сопротивление становится равным критическому $r = r_{кр}$, а $\beta = \omega_0$, то круговая частота обращается в нуль ($\omega = 0$), ($T \to \infty$), колебания прекращаются. Такой процесс называется ***апериодическим:***




$r = r_{кр}$

$\beta = \omega_0$

$\omega = 0$

$T \to \infty$

Отличия в следующем.
При колебаниях, тело, возвращающееся в положении равновесия, имеет запас кинетической энергии. В случае *апериодического движения* энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления трения.

## 3.3 Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме ***упругой силы*** ($-kx$) и ***сил сопротивления*** ($-r\upsilon$) действует добавочная *периодическая сила* $F$ – ***вынуждающая сила***:

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$$

– ***основное уравнение колебательного процесса***, при вынужденных колебаниях

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = F_x \qquad (3.3.1)$$

$$F_x = F_0 \cos\omega t.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (3.3.2)$$

Наша задача найти амплитуду $A$ и разность фаз φ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Введем обозначения:

$A_1 = \omega^2$ – *амплитуда ускорения;*

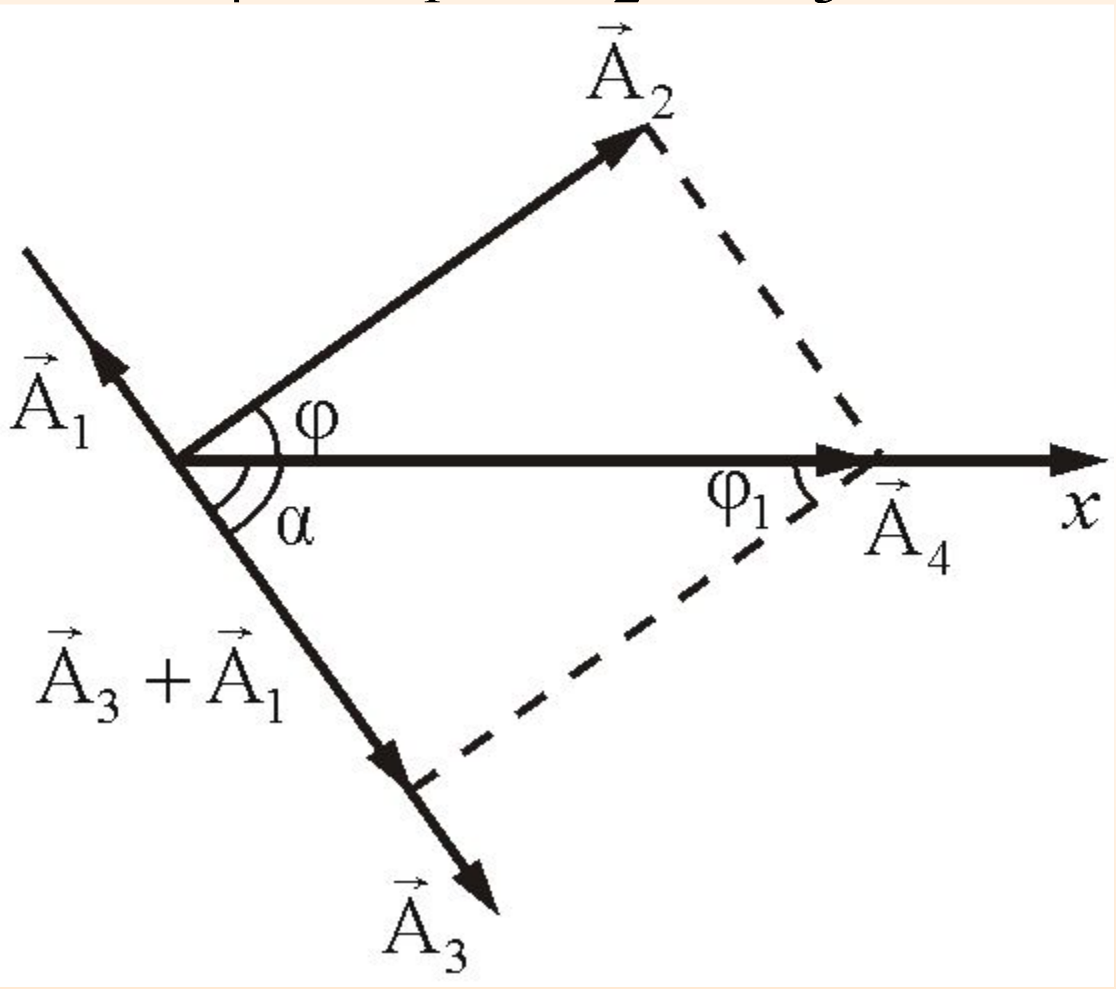
$A_2 = 2\beta\omega$ – амплитуда *скорости;*

$A_3 = \omega_0^2$ – *амплитуда смещения;*

$A_4 = F_0 / mA$ – *амплитуда вынуждающей силы*

*Вектор амплитуды силы* найдем по правилу сложения векторов:

$$\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$




Из рисунка видно, что $A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (3.3.4)$$

***Проанализируем выражение*** (3.3.4).

**1)** $\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

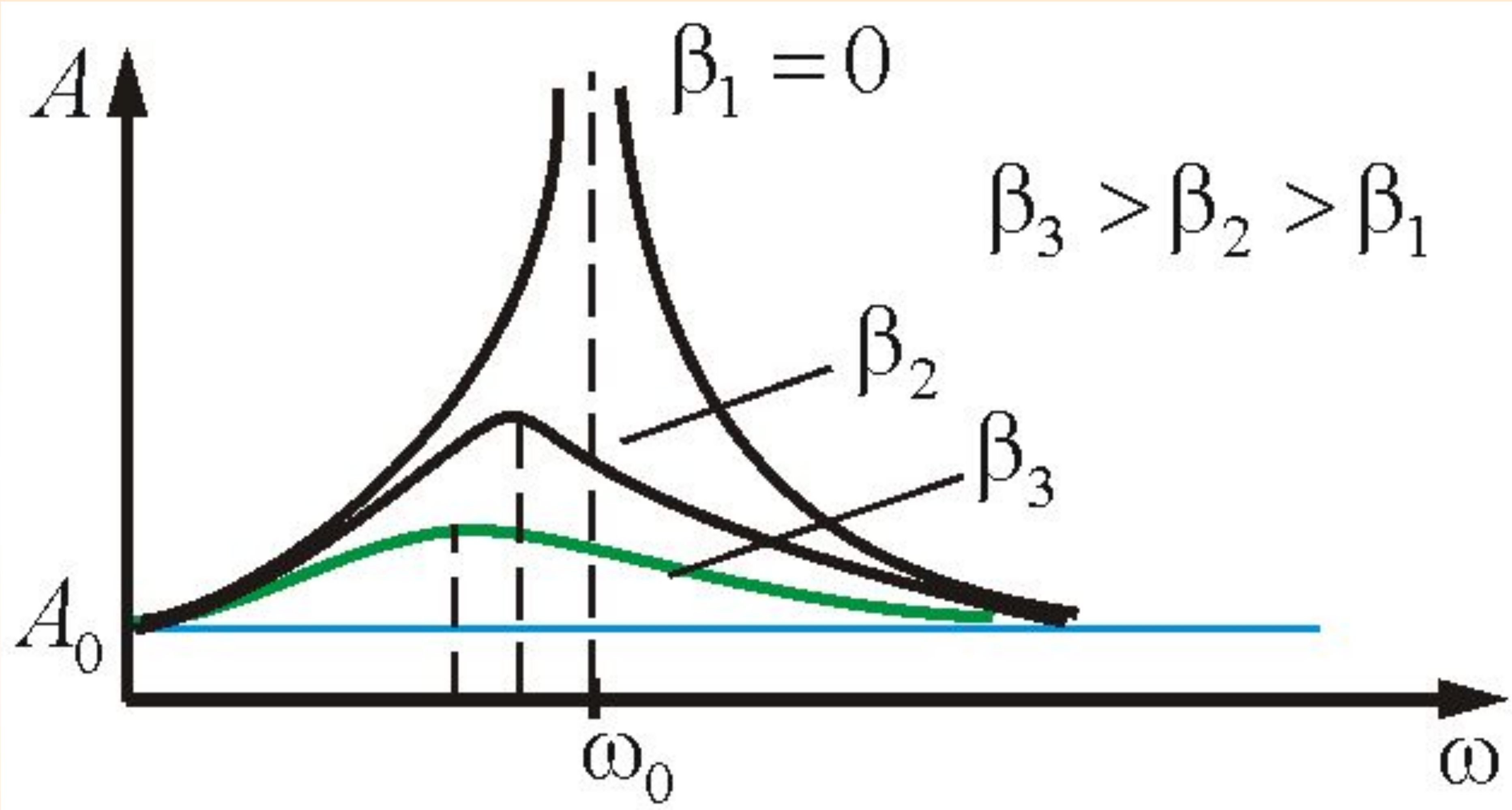
$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

**2)** $\beta = 0$ (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ( $A \to \infty$). Это явление называется – ***резонанс***. При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается.

**3)** $\beta \neq 0$. $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ резонансная частота

$\omega = \omega_0 \qquad A \to \infty$ - **явление резонанса**




$$\boxed{\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$ – резонансная частота

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$ – резонансная частота.

***Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к*** $\omega_{\text{рез}}$ ***называется резонансом.***

Для *консервативной* системы, т.е. $\beta = 0$, $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$

для диссипативной $\omega_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной круговой частоты $\omega_0$.

***С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при***

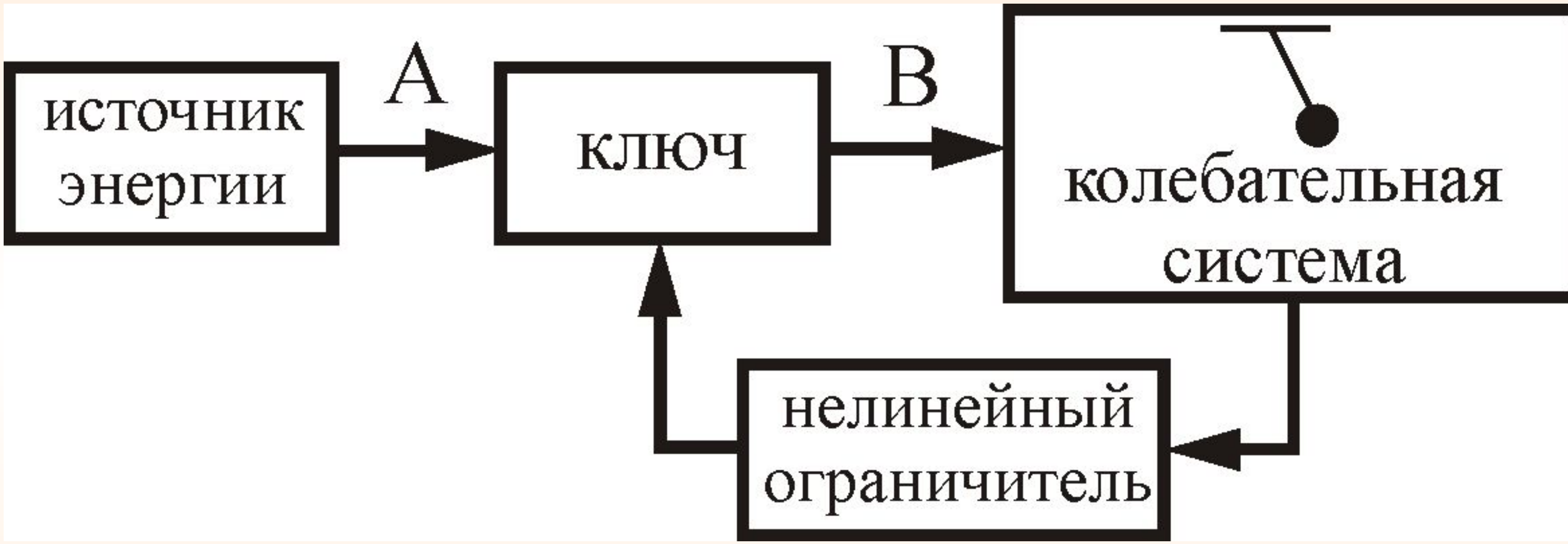
$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

## 3.4 Автоколебания

Наблюдая колебания листьев деревьев, дорожных знаков над проезжей частью улиц, полотнищ на ветру и др., мы понимаем, что во всех перечисленных случаях незатухающие колебания происходят за счет энергии постоянно дующего ветра.

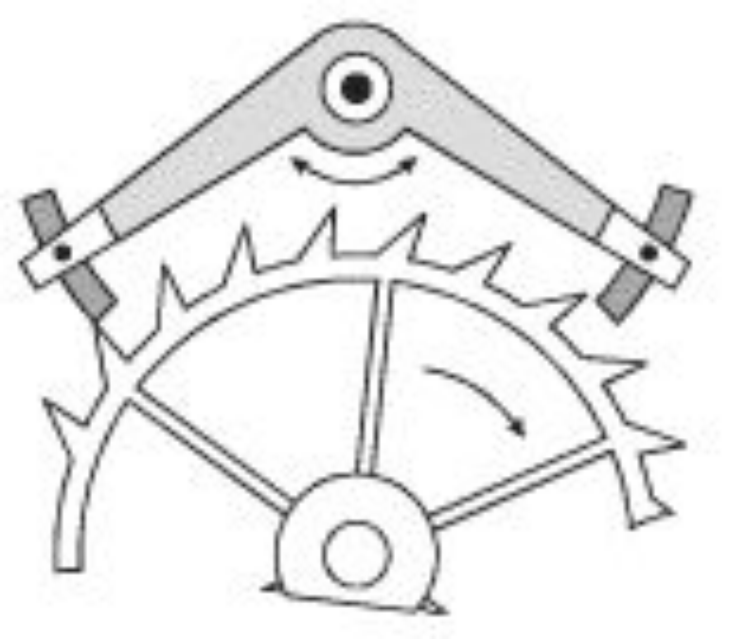
Классическим примером ***автоколебательной системы*** служат ***механические часы*** с маятником и гирями.

Принцип работы всех автоколебательных систем можно понять, обратившись к схеме, изображенной на рисунке




Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу AB управляет сама колебательная система посредством обратной связи.

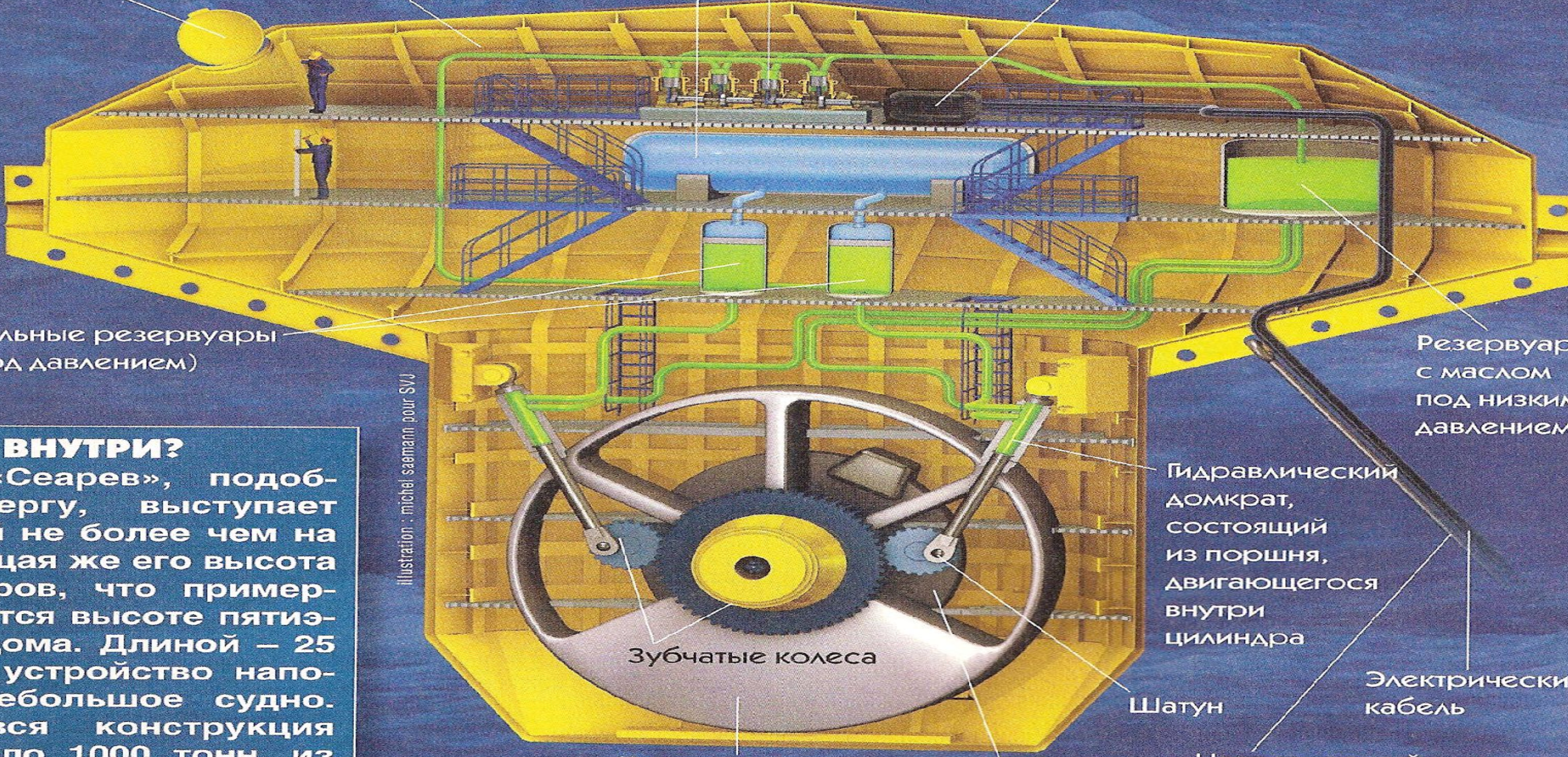
В конструкции часового механизма (рисунок) присутствует специальное устройство – анкер, выполняющий роль ключа. Этот анкер, представляющий собой коромысло, приводится в колебание самим маятником часов.



Важно отметить, что любая автоколебательная система нелинейна.

### РЕЗЕРВУАР С АЗОТОМ

Содержащийся здесь газ нужен для того, чтобы постоянно держать под давлением масло в накопительных резервуарах. Таким образом, в гидравлический мотор непрерывно поступает масло под давлением, что необходимо для бесперебойной работы.




### ЧТО ТАМ ВНУТРИ?

**Корпус «Сеарев», подобно айсбергу, выступает над водой не более чем на треть. Общая же его высота – 15 метров, что примерно равняется высоте пятиэтажного дома. Длиной – 25 метров – устройство напоминает небольшое судно. Весить вся конструкция будет около 1000 тонн, из которых половина придется на гигантское колесо-маятник, расположенное в нижней части аппарата. Именно благодаря этому колесу электростанция сможет производить достаточно электричества для обеспечения потребности в энергии двух сотен домохозяйств. Электричество передается на сушу с помощью кабеля.**

### ДИСКОВЫЙ ТОРМОЗ

Дисковый тормоз управляется компьютером, который связан с датчиками, расставленными в разных местах конструкции. Благодаря этим датчикам электроника отслеживает малейшее движение как всего корпуса, так и колеса-маятника. Компьютер включает тормоз, когда колесо достигает самой крайней точки во вращательном цикле. На долю секунды колесо блокируется, чтобы затем начать вращение в противоположном направлении. Цель этой операции – усилить колебания маятника относительно плавучего корпуса, чтобы добыть как можно больше энергии из волн.

## КАК ОН РАБОТАЕТ?

**Главную роль в производстве электричества играют два элемента конструкции – плавучий корпус и колесо-маятник. Именно смещение колеса относительно корпуса под действием волн дает возможность приводить в движение вал электрогенератора. Вот как это происходит.**

1


Набегающая волна заставляет «Сеарев» накрениться

2


Крен корпуса приводит, в свою очередь, к тому, что колесо-маятник начинает вращаться. Под действием собственного веса маятник качается внутри корпуса. При этом колесо приводит в движение (через систему шестеренок) шатуны, а те заставляют двигаться поршни. Поршень в левом цилиндре поднимается, а в правом, наоборот, опускается.

3

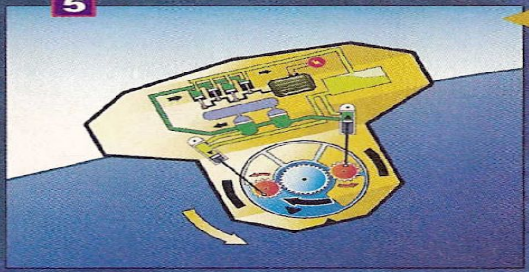

illustrations : olivier charonnel pour svj

Посмотри на левый поршень. Поднимаясь, он выталкивает масло в накопительные резервуары, а затем к гидравлическому мотору. Масло попадает в его цилиндры, заставляя двигаться поршни, а те передают свое движение коленчатому валу (коленчатый вал – деталь, преобразующая возвратно-поступательное движение, например, поршня в цилиндре, во вращательное). Коленчатый вал заставляет вращаться вал электрогенератора, и генератор начинает вырабатывать переменный ток (то же самое происходит в электростанциях любого другого типа). Пройдя через гидравлический мотор, масло поступает в резервуар с низким давлением, чтобы быть использованным в новом цикле. А теперь обрати внимание на правый поршень. Пока его «коллега» слева поднимался, правый поршень опускался, освобождая место в своем цилиндре. В результате в правый цилиндр всасывается масло из резервуара с низким давлением. Это масло будет выдавлено в гидравлический мотор, когда колесо-маятник качнется в другую сторону. Но в данное мгновение колесо-маятник неподвижно. Как только оно достигло крайней точки в этом цикле, его заблокировал дисковый тормоз, управляемый компьютером.

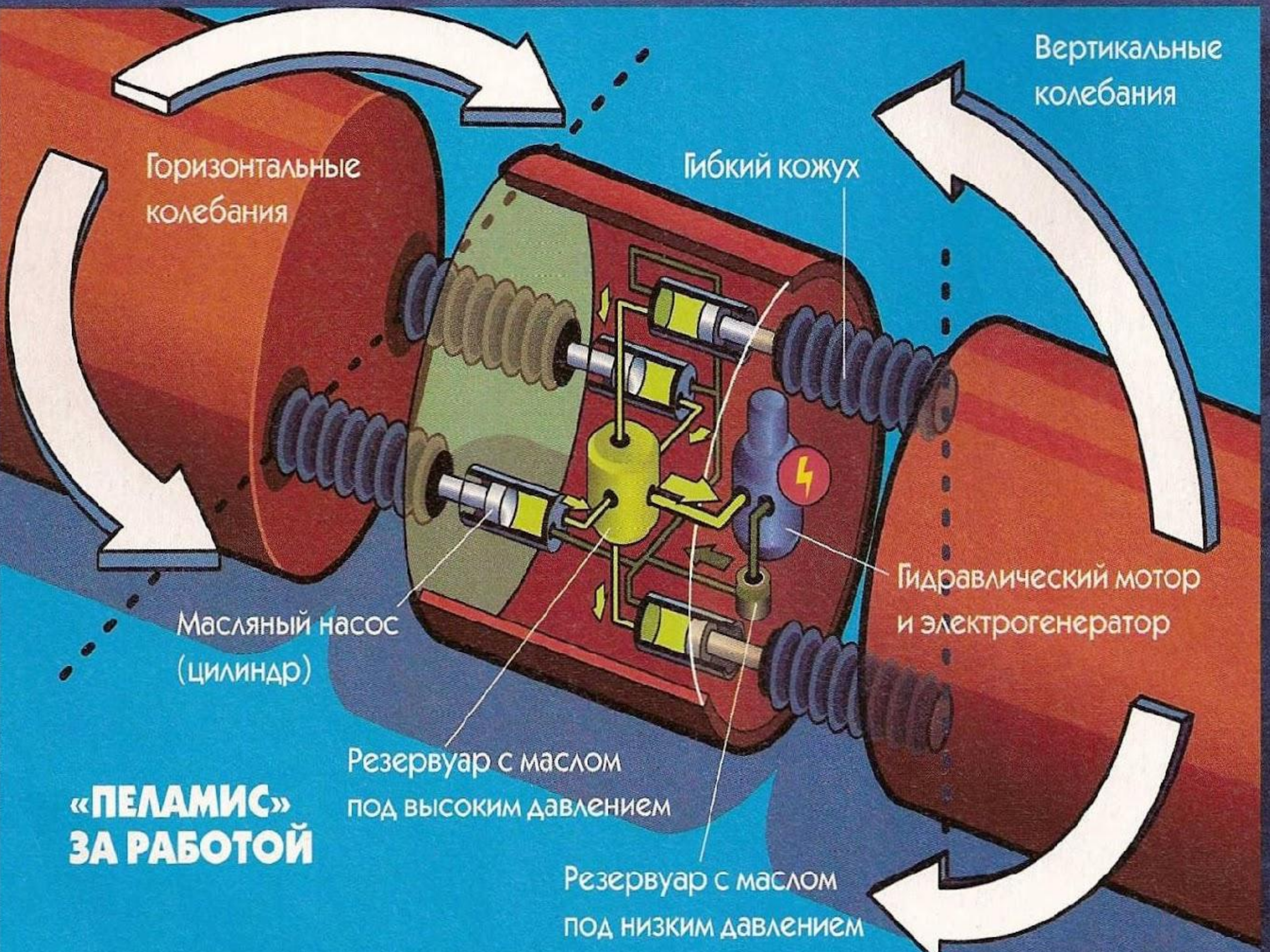
4


Сейчас «Сеарев» находится на гребне волны. Корпус выпрямляется. Благодаря датчикам компьютер фиксирует это движение и дает команду тормозу освободить колесо-маятник. Теперь оно качнется в другую сторону, заставляя левый поршень опускаться, а правый – подниматься.

5



На этот раз именно правый поршень толкает масло под давлением к гидравлическому мотору, а левый всасывает в цилиндр масло из резервуара с низким давлением. Колесо-маятник тем временем достигает крайней точки своего колебательного цикла и снова блокируется дисковым тормозом. Со следующей волной колесо-маятник начнет поворачиваться в противоположном направлении. Затем все повторится.


Вертикальные колебания
Горизонтальные колебания
Гибкий кожух
Гидравлический мотор и электрогенератор
Масляный насос (цилиндр)
Резервуар с маслом под высоким давлением
Резервуар с маслом под низким давлением
«ПЕЛАМИС» ЗА РАБОТОЙ

# Колебания

| механические | | электромагнитные | |
|---|---|---|---|
| Дифференциальное уравнение | $\ddot{x}+\frac{r}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$<br>$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$ | Дифференциальное уравнение | $\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$<br>$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=0$ |
| Масса | $m$ | Индуктивность катушки | $L$ |
| Коэффициент жесткости | $k$ | Обратная величина емкости | $\frac{1}{C}$ |
| Смещение | $x=x_m\sin(\omega t+\phi)$ | Заряд | $q=q_m\sin(\omega t+\phi)$ |
| Скорость | $\upsilon=dx/dt$ | Сила тока | $I=dq/dt$ |
| Потенциальная энергия | $W=\frac{kx^2}{2}$ | Энергия электрич. поля | $W=\frac{q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}$ |
| Кинетическая энергия | $K=\frac{m\upsilon^2}{2}$ | Энергия магнитного поля | $K=\frac{LI^2}{2}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Собств. частота пружинного маятника | $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ | Собств. частота колебательного контура | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ |
| Период колебаний | $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ | Период колеб. Формула Томсона | $T = 2\pi\sqrt{LC}$ |
| Циклич. частота затухающих колебаний | $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$ | Циклич. частота затухающих колебаний | $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ |
| Коэффициент затухания | $\beta = \frac{r}{2m}$ | Коэффициент затухания | $\beta = \frac{R}{2L}$ |
| Логарифмич. декремент затухания | $\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$ | Логарифмич. декремент затухания | $\chi = \beta T = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$ |
| Добротность пружинного маятника | $Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{r}\sqrt{km}$ | Добротность колебательного контура | $Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ |
| Резонансная частота | $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ | Резонансная частота | $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ |