Вывод волнового уравнения

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Электромагнитные волны:

- ***волновое уравнение;***
- ***энергия электромагнитной волны;***
- ***интенсивность электромагнитной волны;***
- ***импульс электромагнитной волны;***

2. Излучение электрического диполя.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид:

$$\oint_S \left(\vec{\mathbf{D}}, d\vec{\mathbf{S}}\right) = \int_V \rho dV \qquad \operatorname{div}\vec{\mathbf{D}} = \rho,$$

$$\oint_L \left(\vec{\mathbf{E}}, d\vec{\mathbf{l}}\right) = -\int_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} d\vec{\mathbf{S}} \qquad \operatorname{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t},$$

$$\oint_S \left(\vec{\mathbf{B}}, d\vec{\mathbf{S}}\right) = 0 \qquad \operatorname{div}\vec{\mathbf{B}} = 0,$$

$$\oint_L \left(\vec{\mathbf{H}}, d\vec{\mathbf{l}}\right) = \int_S \left(\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right) d\vec{\mathbf{S}} \qquad \operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t},$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu \vec{\mathbf{H}}, \qquad \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

Электромагнитные волны.

Изменение во времени $\vec{B}(t)$ порождает вихревое электрическое поле $\vec{E}(t)$, изменяющееся в окружающем пространстве. А изменение во времени $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(t)$

порождает переменное вихревое магнитное поле $\vec{H}(t)$. Из этого следует возможность существования переменных электромагнитных полей вдали от зарядов и токов проводимости не только в среде, но и в вакууме $(\mu = 1, \varepsilon = 1)$. Электрические и магнитные переменные поля взаимно порождают друг друга, удаляясь от источника и теряя связь с ним. Возникает электромагнитная волна, которая существует в пространстве даже после выключения источника. Источниками электромагнитных волн являются электрические заряды, движущиеся с ускорением, переменные токи и изменяющиеся во времени электрические и магнитные поля.

Электромагнитные волны.

Таким образом, существование электромагнитного поля следует из уравнений Максвелла.

Упрощая задачу, будем считать, что среда:

однородная и изотропная $\varepsilon = const, \mu = const$ (свойства не зависят от направления),

нейтральная, т.е. отсутствуют заряды ($\rho = 0$),

непроводящая, т.е. отсутствуют токи ($\vec{j} = 0$).

Для рассматриваемых свойств среды эти уравнения имеют вид:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Электромагнитные волны.

Волновое уравнение

Любые волновые процессы должны описываться волновым уравнением, которое связывает вторые производные по времени и координатам.

Используя полученную систему и известное тождество векторной алгебры

$$\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]=\bar{b}\left(\bar{a},\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a},\bar{b}\right)$$

, найдем ротор от обеих частей уравнения $\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$,

$$\begin{cases} rot\left(rot\bar{E}\right)=\mu\mu_0 rot\left(-\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)=-\dfrac{\partial}{\partial t}rot\vec{H}=-\varepsilon_o\mu_o\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \\ rot\left(rot\bar{E}\right)=\left[\nabla,\left[\nabla,\bar{E}\right]\right]=\nabla\left(\nabla,\bar{E}\right)-\left(\nabla,\nabla\right)\bar{E}=grad\left(div\bar{E}\right)-\left(\nabla,\nabla\right)\bar{E}=-\left(\nabla,\nabla\right)\bar{E} \end{cases}$$

Учтем, что $\left(\nabla,\nabla\right)=\nabla^2=\vec{i}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\vec{j}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\vec{k}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta$

Электромагнитные волны.

Волновое уравнение

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Эти соотношения представляют собой идентичные волновые уравнения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Вспомним, что в волновом уравнении $\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ множитель

перед второй производной в правой части – это величина, обратная квадрату фазовой скорости волны.

Электромагнитные волны.

Волновое уравнение в

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Следовательно, $\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{v^2}$.

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Оказалось, что в вакууме эта скорость для электромагнитной волны равна скорости света.

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Тогда волновые уравнения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ можно записать как

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

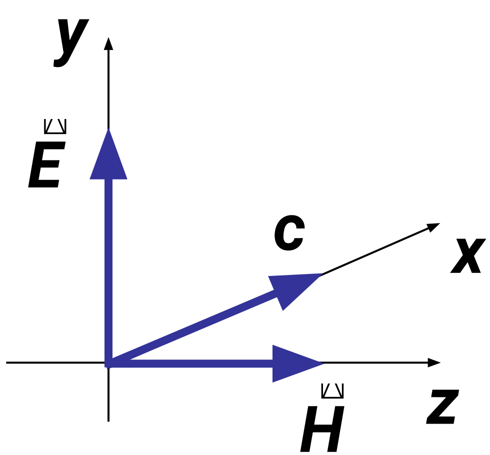
Эти уравнения указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых в вакууме равна скорости света.

Электромагнитные волны.

Математический анализ уравнений Максвелла позволяет сделать вывод о структуре электромагнитной волны, распространяющейся в однородной нейтральной непроводящей среде при отсутствии токов и свободных зарядов.

Векторная структура волны: электромагнитная волна является *строго поперечной волной*, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ *перпендикулярны к вектору скорости волны* , т.е. к направлению ее распространения.

Векторы $\vec{c}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$, в том порядке, в котором они записаны, образуют *правовинтовую ортогональную тройку векторов*.



В природе существуют только *правовинтовые* электромагнитные волны и не существует левовинтовых волн.

Это одно из проявлений законов взаимного создания переменных магнитных и электрических полей.

Электромагнитные волны.

Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в *одинаковых фазах*, а мгновенные значения E и H в любой точке пространства связаны соотношением

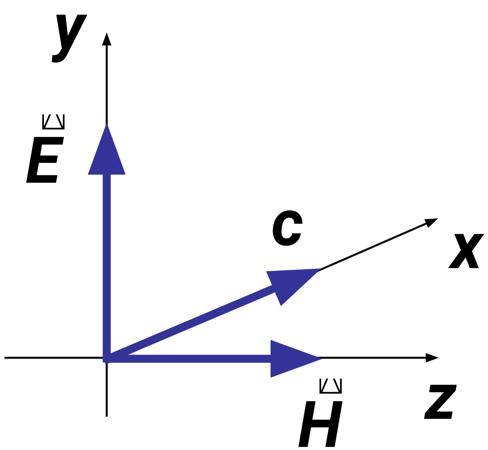
$$E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}$$

Рассмотрим для простоты вид и свойства одномерного волнового уравнения электромагнитной волны в однородной нейтральной непроводящей среде.

Пусть электромагнитная волна будет строго монохроматической (волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеют одну и ту же частоту) и распространяется в направлении x.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению распространения волны, следовательно, их проекции на ось x равны нулю.

Электромагнитные волны.



Волновые уравнения такой волны будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

Этим уравнениям удовлетворяют плоские линейно поляризованные монохроматические волны

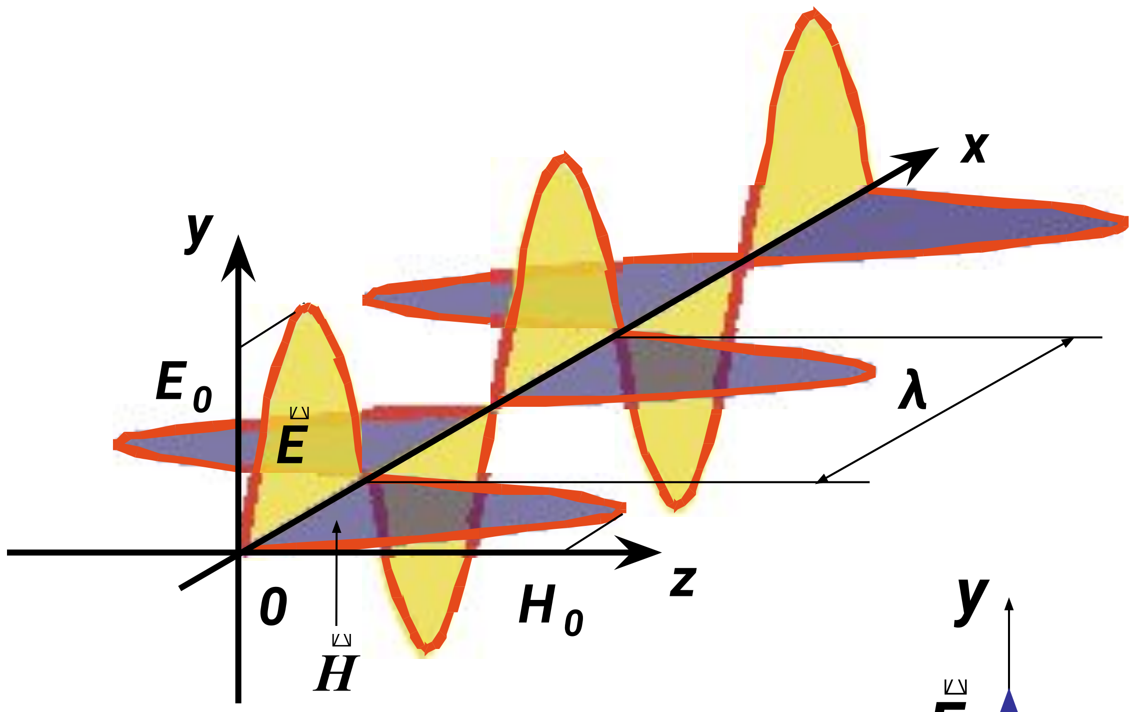
$$E_y = E_0 cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$
$$H_z = H_0 cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

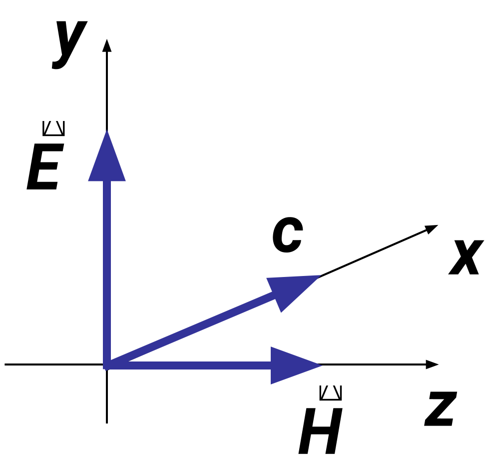
Индексы y и z означают, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z. $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω - частота волны; $k = \omega / v$ - волновое число; φ_0- начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

Колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в *одной фазе*, так что в уравнениях φ_0 одинаково.

Электромагнитные волны.

Мгновенная картина электромагнитной волны в некоторый момент времени выглядит так:





Электромагнитные волны.

Энергия электромагнитной волны.

Электромагнитные волны переносят в пространстве энергию.

Объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей:

$$w = w_{эл} + w_{магн} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Мгновенные значения E и H связаны соотношением $E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}$

Следовательно, выражение для объемной плотности энергии электромагнитной волны в произвольный момент времени в рассматриваемой точке пространства можно представить в виде:

$$w = \frac{E\sqrt{\varepsilon_0}E\sqrt{\varepsilon_0}}{2} + \frac{H\sqrt{\mu_0}H\sqrt{\mu_0}}{2}$$

Электромагнитные волны.

Энергия электромагнитной волны.

$$w = \frac{E\sqrt{\varepsilon_0}E\sqrt{\varepsilon_0}}{2} + \frac{H\sqrt{\mu_0}H\sqrt{\mu_0}}{2} \Rightarrow w = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}EH$$

Поскольку $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{v^2}$, то $\boxed{w = \frac{1}{c}EH}$

Умножив полученное выражение для w на скорость волны c, получим модуль плотности потока энергии:

$$S = wc = EH$$

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему.

Поэтому направление вектора $[\vec{E}, \vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH.

Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

Вектор $\vec{S}$ называется *вектором Пойнтинга*.

Электромагнитные волны.

Энергия электромагнитной волны.

Для бегущей гармонической электромагнитной волны в вакууме плотность энергии равна:

$$\boldsymbol{w = \varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)}$$

Плотность потока энергии:

$$S = wc = \varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx) = \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Окончательно запишем:

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Электромагнитные волны.

Интенсивность электромагнитной волны.

Для периодической электромагнитной волны значение модуля вектора Пойнтинга, усредненное по периоду волны – это *интенсивность* I:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S\,dt = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2\int_0^T \cos^2\left(\omega t - kx\right)dt$$

При усреднении по периоду среднее значение квадрата косинуса равно $1/2$, следовательно, окончательно получится:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2$$

Электромагнитные волны.

Импульс электромагнитной волны.

Перенос энергии электромагнитной волной сопровождается и переносом импульса. Импульс электромагнитного поля

$P = W/c,$ где W - энергия электромагнитного поля.

Запишем это выражение для плотностей импульса и энергии т.е., для величин, отнесенных к единице объема: $p = w/c$

Если умножить и разделить числитель и знаменатель этого выражения на c, получим в числителе плотность потока энергии wc, которая равна модулю вектора Пойнтинга.

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$$

Характеристики электромагнитной волны, такие как энергия, импульс и интенсивность присущи любому типу волн, например, упругим.

Если учесть свойства среды, в которой распространяются упругие волны, то легко получить выражения для этих характеристик.

Электромагнитные волны.

Излучение электрического диполя.

Возбуждение электромагнитных волн какой-либо системой называют *излучением* этих волн, а саму систему – *излучающей системой*.

В соответствии с представлениями классической электродинамики электромагнитные волны в вакууме возбуждаются электрическими зарядами, движущимися с ускорением.

Простейшей излучающей системой является электрический диполь, момент $\vec{p}$ которого изменяется с течением времени.

Вспомним, что *электрическим диполем* называется система двух одинаковых по абсолютной величине разноименных точечных зарядов

$+q$ и $-q$.

Электрический момент диполя это вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному:

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Электромагнитные волны.

<u>Излучение электрического диполя.</u>

Пусть момент $\vec{p}$ диполя изменяется по гармоническому закону:

$$p = p_0 \cos\omega t$$

Это излучение простейшего гармонического осциллятора.

Рассмотрим некоторые закономерности излучения электрического диполя.

А). Электрическое поле постоянного диполя спадает при удалении от диполя по закону $1/r^3$.

В случае осциллирующего диполя ситуация изменяется.

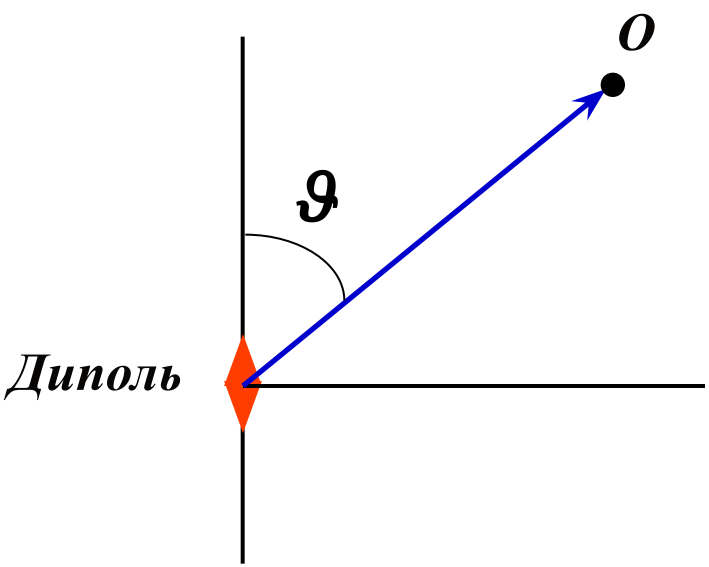
Вблизи диполя картина электрического поля сложна. Однако на расстояниях $r \gg \lambda$ (в так называемой *волновой зоне*) можно рассматривать только поле осциллирующих зарядов.

В волновой зоне сохранится расходящаяся сферическая волна с той же частотой, что и у осциллятора.

Электромагнитные волны.

Излучение электрического диполя.

Амплитуда волны уменьшается с ростом расстояния r от диполя как $\frac{1}{r}\sin\vartheta$, где ϑ (тета) – угол между осью диполя и радиус – вектором $\vec{r}$ точки O, где наблюдается поле.



Б). ***Интенсивность*** I электромагнитной волны пропорциональна произведению $E_m H_m$, следовательно, пропорциональна

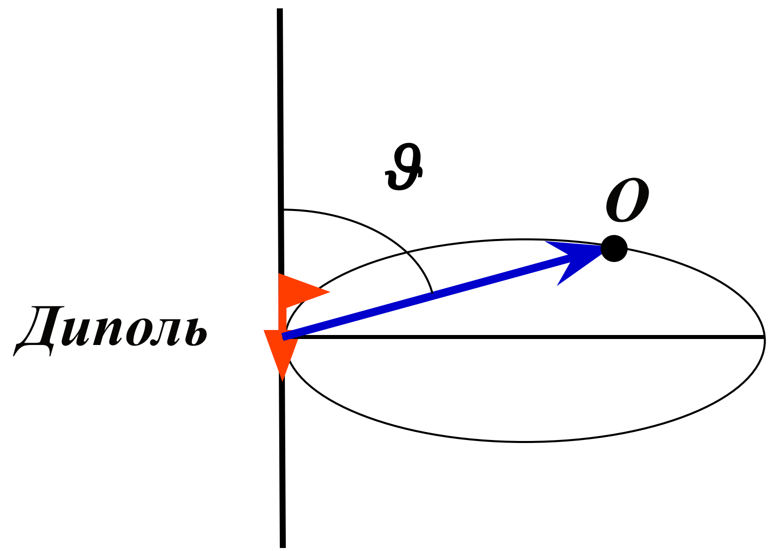
$$I \sim \frac{1}{r^2}\sin^2\vartheta$$

Зависимость $I(\vartheta)$ наглядно изображается с помощью *диаграммы направленности* излучения диполя.

Электромагнитные волны.

Излучение электрического диполя.

Длина отрезка, проведенного от диполя до точки ***О,*** дает интенсивность излучения под углом ϑ .



Видно, что максимум излучения происходит под углом $\vartheta = \pi/2$, а вдоль оси ($\vartheta = 0$) диполь не излучает совсем.

Г). Как следует из теории, ***мощность*** излучения диполя P (энергия, излучаемая диполем в единицу времени по всем направлениям), пропорциональна квадрату второй производной электрического момента по времени и выражается формулой:

$$P = \alpha \frac{d^2 p}{dt^2}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\mu_0}{6\pi c}$$

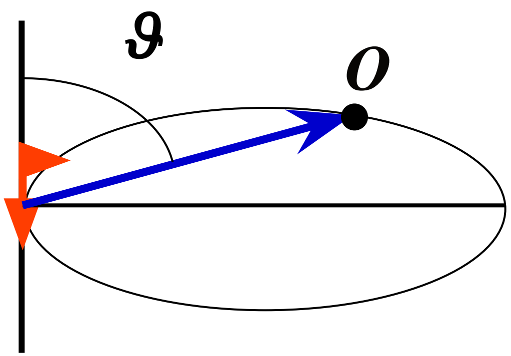
Электромагнитные волны.

Излучение электрического диполя.

Поскольку зависимость $p(t)$ задана гармонической функцией, выражение для мощности излучения диполя можно записать в виде:

$$P = \alpha\omega^4 p_m^2 \cos^2\omega t$$

Средняя по времени мощность излучения $\langle P \rangle = \frac{\alpha}{2}\omega^4 p_m^2 \sim \omega^4 p_m^2$



Важный вывод: средняя мощность излучения осциллирующего диполя зависит от квадрата его амплитуды и сильно от частоты ($\sim \omega^4$).

Таким образом, излучение линий передач промышленной частоты мало, а радиостанции должны использовать высокие частоты.

Значение задачи об излучении диполя: всякую реальную излучающую систему (например, антенну) можно рассматривать как совокупность точечных диполей.

Излучение антенны в целом есть суперпозиция излучений отдельных диполей, с помощью которых моделируется антенна.