

# ЛЕКЦИЯ 9.1

## ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1. Вихревое электрическое поле.*
- 2. Ток смещения.*
- 3. Уравнения Максвелла. Интегральная и дифференциальная формы уравнений.*

## ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

По Максвеллу изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}_B$ , которое является источником ЭДС:

$$E_i = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \oint_L (\mathbf{E}_B, d\mathbf{l}) = \oint_L \mathbf{E}_{Bl} dl$$

где  $\mathbf{E}_{Bl}$  - проекция вектора на направление  $d\mathbf{l}$ .

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через ограниченную контуром поверхность  $S$  называется величина

$$\Phi_B = \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \int_S B_n dS$$

В итоге приходим к выражению вида  $\oint_L (\mathbf{E}_B, d\mathbf{l}) = -\frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S})$

## ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

$$\oint_L (\vec{E}_B, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B}, d\vec{S})$$

Поменяем местами операции дифференцирования и интегрирования:

$$\oint_L (\vec{E}_B, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = -\int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$$

Символ частных производных означает, что в общем случае вектор  $\vec{B}$  является функцией не только времени, но и координат.

Вспомним некоторые сведения из теории электростатического поля

В случае электростатического поля ЭДС замкнутого контура равна нулю. Это означает, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}_q$  по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L (\vec{E}_q, d\vec{l}) = 0$$

## ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

$$\oint_L (\vec{E}_q, d\vec{l}) = 0$$

Из обращения в нуль циркуляции вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}_q$  следует, что линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми, они начинаются и заканчиваются на зарядах, либо уходят в бесконечность. Это также означает, что электростатическое поле потенциально.

$$\oint_L (\vec{E}_q, d\vec{l}) = 0$$

$$\oint_L (\vec{E}_B, d\vec{l}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$$

Сравнивая эти выражения, видим принципиальное различие между электростатическим и вихревым полями: циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  в отличие от циркуляции вектора  $\vec{E}_q$  не равна нулю.

Следовательно, электрическое поле  $\vec{E}_B$ , возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле, является *вихревым*. Линии напряженности электрического поля  $\vec{E}_B$  замкнуты.

## ***ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ***

Таким образом, мы показали, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического вихревого поля.

В общем случае электрическое поле может быть как *потенциальным*, так и *вихревым*. Электрическое поле может слагаться из поля  $E_q$ , создаваемого зарядами, и поля  $E_B$ , обусловленного переменным во времени магнитным полем.

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

Единая теория электрических и магнитных явлений создана Максвеллом. Основа теории - идея Максвелла о симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей.

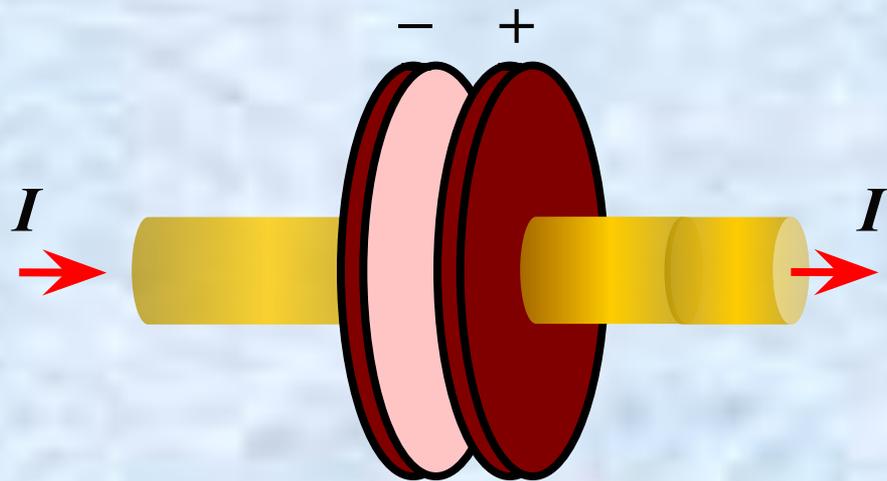
Максвелл предположил, что если меняющееся во времени магнитное поле  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  создает электрическое поле, то переменное электрическое поле  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  тоже должно создавать магнитное поле.

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение так называемый *ток смещения*.

Проведем рассуждения, обосновывающие необходимость введения понятия о токе смещения.

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую плоский конденсатор



(Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром)

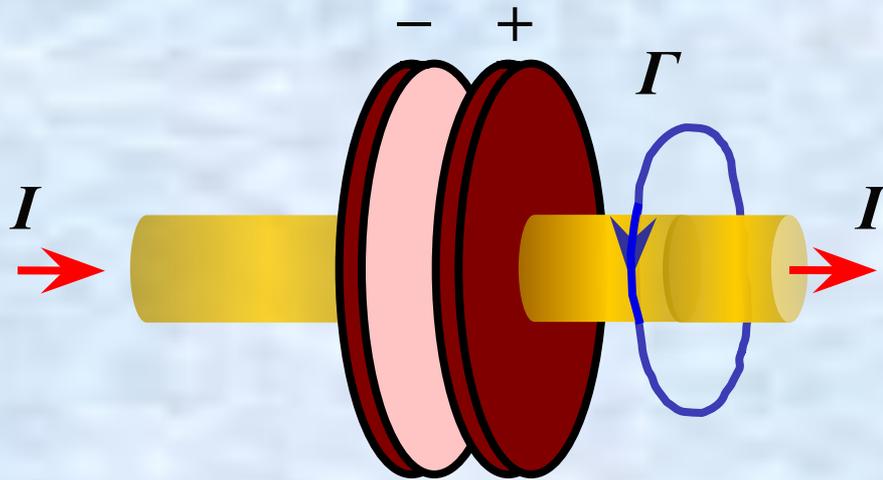
Пусть предварительно заряженный конденсатор разряжается через некоторое внешнее сопротивление

В подводящих проводах потечет ток  $I$ .

Применим для этого случая теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ :

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = I$$

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

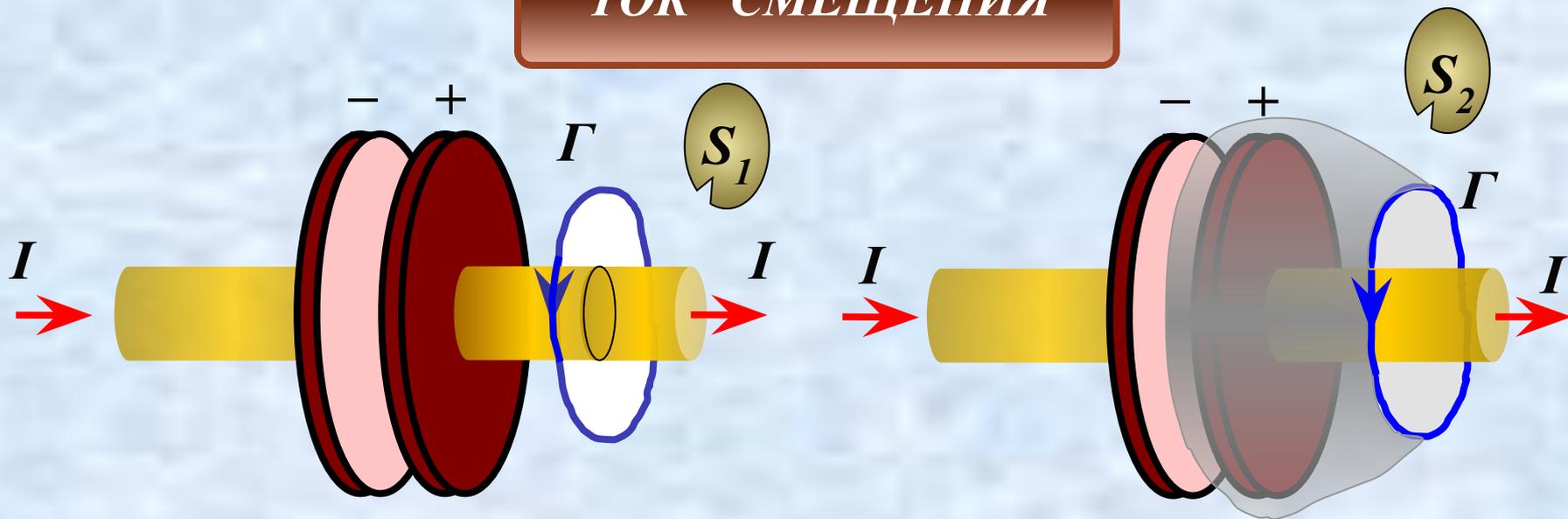


Выберем контур  $\Gamma$ , охватывающий подводящий провод, зададим направление обхода контура.

Для того чтобы применить теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ , нужно выбрать поверхность, натянутую на контур  $\Gamma$ .

Поскольку циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  от формы этой поверхности не должна зависеть, рассмотрим две поверхности, натянутые на контур.

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

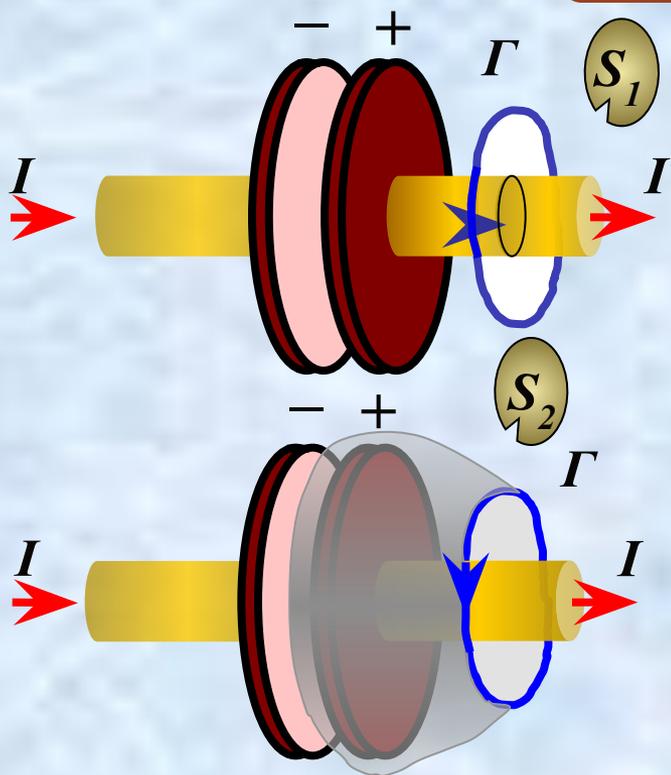


Поверхность  $S_1$  пересекает провод с током

Поверхность  $S_2$  не пересекает провод с током

Видим, что через поверхность  $S_1$  течет ток проводимости  $I$ , а через поверхность  $S_2$  тока нет, поскольку линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора

## ТОК СМЕЩЕНИЯ



Получается, что циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  зависит от формы поверхности, которую мы натягиваем на контур  $\Gamma$ , чего не может быть.

Вывод: в случае изменяющихся во времени полей примененное уравнение перестает быть справедливым.

~~$$\oint_L (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = I$$~~

Для разрешения возникшего противоречия Максвелл ввел в правую часть этого уравнения дополнительное слагаемое, которое назвал *плотностью тока смещения*

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

Получим выражение для тока смещения

Обратим внимание на то, что поверхность  $S_2$  пронизывает только электрическое поле.

Для постоянного электрического поля по теореме Гаусса поток вектора  $\mathbf{D}$  сквозь замкнутую поверхность  $S$  равен

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = q$$

Для переменного поля из теоремы Гаусса следует

$$\oint_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right) = \frac{\partial q}{\partial t}$$

Уравнение непрерывности для рассматриваемого случая можно записать в виде *поток вектора  $\mathbf{j}$  дает заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема  $V$ , охваченного поверхностью  $S$ .*

$$\oint_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

$$\oint_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right) = \frac{\partial q}{\partial t}$$
$$\oint_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Сложим отдельно  
левые и правые части  
уравнений, получим

$$\oint_S \left( \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), d\mathbf{S} \right) = 0$$

Это уравнение схоже с уравнением непрерывности для постоянного тока. Кроме плотности тока проводимости  $\mathbf{j}$  в нем имеется еще одно слагаемое  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  с размерностью плотности тока. Это слагаемое и называется *плотностью тока смещения*:

$$\mathbf{j}_{см} = \partial \mathbf{D} / \partial t$$

Сумму токов проводимости и смещения называют *полным током*:

$$I_{полн} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$$

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

$$j_{\text{полн}} = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad - \text{плотность тока смещения}$$

В соответствии с выражением  $\oint_S \left( \left( j + \frac{\partial D}{\partial t} \right), dS \right) = 0$  линии

полного тока являются непрерывными в отличие от линий тока проводимости. Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения.

Введение полного тока позволяет разрешить противоречие, возникшее при попытке применить теорему о циркуляции вектора  $H$ , записанную для постоянных токов.

Для произвольного случая эта теорема будет иметь вид:

$$\oint_L (H, dl) = \int_S \left( j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS$$

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Термин «ток смещения» является условным. По существу это изменяющееся со временем электрическое поле.

Ему присуще только одно свойство тока проводимости – способность создавать магнитное поле. Токи смещения существуют лишь там, где имеется переменное во времени электрическое поле.

Ток смещения в диэлектриках.

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$\mathbf{P}$  - вектор поляризации диэлектрика

$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  - это «истинный» ток смещения;       $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  - это ток поляризации, обусловленный движением связанных зарядов.

## ТОК СМЕЩЕНИЯ

$\frac{\partial P}{\partial t}$  - это ток поляризации, обусловленный движением связанных зарядов. Токи поляризации возбуждают магнитное поле. Эти токи по своей природе не отличаются от токов проводимости.

$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  - «истинный» ток смещения. Эта часть тока тоже возбуждает магнитное поле, хотя и не связана с зарядами, а обусловлена только изменением электрического поля.

*Открытие Максвеллом тока смещения – это чисто теоретическое открытие, имевшее чрезвычайно важное значение для построения теории электромагнитного поля.*

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений – *макроскопическую теорию электромагнитного поля*.

Теория Максвелла не только объясняла с единой точки зрения все разрозненные явления электричества и магнетизма, но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

В основе теории - четыре фундаментальных уравнения. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Решение уравнений Максвелла дает возможность в любой момент времени найти параметры электрических и магнитных полей.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$1. \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$$

Циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.

Поскольку электрическое поле может быть как потенциальным  $\vec{E}_q$ , так и вихревым  $\vec{E}_B$ , в первом уравнении Максвелла  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$ .

Первое уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

Первое уравнение – это по сути, закон Фарадея.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$2. \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

*Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.*

Это теорема Гаусса для магнитного поля.

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии поля не имеют ни начала ни конца. Магнитное поле называют *соленоидальным* или *вихревым*.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$3. \oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S \left( \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), d\vec{S} \right)$$

(раздел «Ток смещения»  
настоящей лекции )

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{\Gamma}} (\vec{E}, d\vec{S}) + \mu_0 \int_{S_{\Gamma}} (\vec{j} \cdot d\vec{S}) \quad \text{-в вакууме} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

*Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру равна полному току через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром..*

Под полным током понимается **сумма токов проводимости и смещения**. Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

# УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

## Уравнения Максвелла в интегральной форме.

4. 
$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \rho dV$$
 (Теорема Гаусса для вектора  $\vec{D}$ )

$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV;$$
 - в вакууме (теорема Гаусса для вектора  $\vec{E}$ )

*Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность в произвольной среде равен стороннему (свободному) заряду, заключенному внутри поверхности.*

Это постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах. Постулат записан в общем виде, для стороннего заряда, распределенного внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ .

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля.
- источниками магнитного поля являются движущиеся заряды (электрические токи), либо переменные электрические токи.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно магнитных и электрических полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Для *стационарных полей* (  $E = const$  и  $B = const$  ) уравнения Максвелла примут вид:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0; \quad \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0; \quad \oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = I; \quad \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

В электродинамике наряду с интегральными уравнениями Максвелла применяются и уравнения в дифференциальной форме.

Вспомним некоторые сведения из векторного анализа.

В лекции 2 определяя связь между напряженностью поля  $\vec{E}$  и потенциалом  $\varphi$ , мы ввели в рассмотрение оператор  $\nabla$  (набла) или оператор Гамильтона:

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} (\varphi) = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = -\nabla \varphi$$

Рассмотрим подробнее свойства этого оператора.

Оператор набла - это вектор с компонентами  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$ :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Сведения из векторного анализа

Оператор имеет смысл в сочетании со скалярной или векторной величиной, на которую он умножается.

Пример: если умножить этот вектор на скаляр  $\varphi$ , получится вектор, представляющий собой градиент функции  $\varphi$  -  $grad(\varphi)$

Если вектор  $\nabla$  умножить скалярно на вектор  $\vec{a}$ , получится скаляр, который имеет смысл дивергенции вектора  $\vec{a}$ :

$$(\nabla, \vec{a}) \equiv \nabla \vec{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div } \vec{a}$$

Если умножить вектор  $\nabla$  на вектор  $\vec{a}$  векторно  $[\nabla, \vec{a}]$ , получится вектор с компонентами  $[\nabla, \vec{a}]_x$ ,  $[\nabla, \vec{a}]_y$ ,  $[\nabla, \vec{a}]_z$ .

Этот вектор называют «ротатор вектора  $\vec{a}$ » -  $rot \vec{a}$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Сведения из векторного анализа

Это векторное произведение можно записать с помощью определителя

$$\mathit{rot} \vec{a} = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Итак, существуют три формы записи оператора набла в сочетании со скалярной или векторной функцией.

# УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

## Сведения из векторного анализа

1. При умножении оператора набла на скалярную функцию, например,  $\varphi$  -  $\nabla\varphi$ , получится градиент  $\varphi$ :  $grad(\varphi)$ ;
2. При умножении оператора набла скалярно на вектор, например,  $\vec{a}$  -  $(\nabla, \vec{a}) \equiv \nabla \vec{a}$ , получится дивергенция вектора  $\vec{a}$ :  $div \vec{a}$ ;
3. При умножении оператора набла векторно на вектор, например,  $\vec{a}$  -  $[\nabla, \vec{a}]$ , получится ротор вектора  $\vec{a}$ :  $rot \vec{a}$ .

Применение вектора набла упрощает и облегчает написание формул векторного анализа, поэтому используется часто.

# УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

## Сведения из векторного анализа

Теоремы векторного анализа, которые позволят осуществить переход от интегральных величин к дифференциальным:

1. Теорема Остроградского – Гаусса. Устанавливает связь между дивергенцией вектора  $\vec{a}$  и потоком этого вектора через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ :

$$\oint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV$$

*Поток вектора  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен интегралу от дивергенции вектора  $\vec{a}$  по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью.*

# УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

## Сведения из векторного анализа

Теоремы векторного анализа, которые позволят осуществить переход от интегральных величин к дифференциальным:

2. Теорема Стокса. Устанавливает связь между ротором вектора  $\vec{a}$  в каждой точке некоторой поверхности  $S$  и циркуляцией этого вектора по контуру  $L$ , ограничивающему  $S$ :

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{l}) = \int_S \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

Циркуляция вектора  $\vec{a}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна потоку вектора  $\text{rot } \vec{a}$  через произвольную поверхность  $S$ , ограниченную контуром (натянутую на контур).

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$$

В соответствии с теоремой Стокса:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_S (\text{rot} \vec{E}, d\vec{S})$$

В итоге можно записать:

$$\int_S (\text{rot} \vec{E}, d\vec{S}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

В соответствии с теоремой  
Остроградского - Гаусса

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV$$

В итоге можно записать:

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = 0$$

Окончательно получим

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S \left( \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), d\vec{S} \right) \quad \text{В соответствии с теоремой Стокса: } \oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\text{rot } \vec{H}, d\vec{S})$$

В итоге можно записать:

$$\int_S (\text{rot } \vec{H}, d\vec{S}) = \int_S \left( \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), d\vec{S} \right)$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно

$$\text{rot } \vec{H} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \rho dV$$

В соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса  $\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV$

В итоге можно записать:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho dV$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Таким образом, получили полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right); \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

#### Граничные условия.

Интегральная и дифференциальная формы уравнений Максвелла эквивалентны, если все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно.

Если имеется поверхность разрыва, т.е. поверхность, на которой свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Математическая эквивалентность обеих форм записи уравнений Максвелла достигается введением граничных условий для дифференциальной формы:

$$\vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2}; \quad \vec{E}_{\tau1} = \vec{E}_{\tau2}; \quad \vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2}; \quad \vec{H}_{\tau1} = \vec{H}_{\tau2}.$$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла **в среде** в интегральной и дифференциальной формах

$$\begin{aligned}
 \oint (\vec{D}, d\vec{S}) &= \int \rho dV & (\nabla, \vec{D}) &= \rho \\
 \oint (\vec{E}, d\vec{l}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{B}, d\vec{S}) & [\nabla \vec{E}] &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \oint (\vec{B}, d\vec{S}) &= 0 & (\nabla, \vec{B}) &= 0 \\
 \oint (\vec{H}, d\vec{l}) &= \int \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} & [\nabla, \vec{H}] &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Где индукции  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$  связаны с напряженностями  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

соотношениями

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$$

# УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла *в вакууме* в интегральной и дифференциальной формах

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV;$$

$$(\nabla, \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{\Gamma}} (\vec{B}, d\vec{S})$$

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{S}) = 0;$$

$$(\nabla, \vec{B}) = 0$$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{\Gamma}} (\vec{E}, d\vec{S}) + \mu_0 \int_{S_{\Gamma}} (\vec{j} \cdot d\vec{S}) \quad [\nabla, \vec{B}] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

# ВЫВОДЫ К ЛЕКЦИИ

## Несколько замечаний о токе смещения

Термин “ток смещения” является условным. По существу ток смещения - это изменяющееся со временем электрическое поле. Основанием для того, чтобы назвать “током” величину  $\vec{j}_{st} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  служит лишь то, что размерность

этой величины совпадает с размерностью плотности тока. Из всех физических свойств, присущих току проводимости, ток смещения обладает только одним - способностью создавать магнитное поле.

- Введение тока смещения “уравняло в правах” электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции  $[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

вытекает, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле. Из уравнения  $[\nabla, \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Свойства уравнений Максвелла.

1. *Уравнения Максвелла линейны.* Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей.
2. *Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности,* выражающее закон сохранения электрического заряда.
3. *Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета.* Уравнения релятивистски инвариантны. Их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины в них преобразуются по определенным правилам. Отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### Свойства уравнений Максвелла.

4. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это обусловлено тем, что в природе существуют электрические заряды, но не обнаружены магнитные.

5. Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. Изменение состояния этого поля имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света. Этот вывод и теоретическое исследование электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, в соответствии с которой **свет также представляет собой электромагнитные волны.**