

Лекции 3,4



Тема 4.

ЭНЕРГИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Тема 5.

**ПРОВОДНИКИ В
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

- ▶ 4. Энергия в электростатике
- ▶ 4.1. Взаимодействие двух точечных зарядов.
- ▶ 4.2. Энергия взаимодействия системы из N -штук точечных зарядов.
- ▶ 4.3. Полная электростатическая энергия заряженного тела.
- ▶ 4.4. О локализации электростатической энергии.
- ▶ 4.5. Электростатическая энергия системы, состоящей из двух заряженных тел.
- ▶ 5. 5. Проводники в электростатике
- ▶ 5.1. Проводник и электростатическое поле.
- ▶ 5.2. Метод электростатических изображений.
- ▶ 5.3. Электрическая емкость.

4.1. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов.

В пункте 2.3. было показано, что разные пробные заряды $q', q'', \dots$ будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями W', W'' и так далее. Однако отношение

$$W / q'_{\text{пр.}}$$

будет для всех зарядов одним и тем же.

Поэтому мы ввели **скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой собственно поля – потенциал:**

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

выражение для энергии взаимодействия точечного заряда q с внешним полем принимает вид

$$U = q\varphi$$

, где φ – потенциал, созданный зарядом Q , в той точке, куда мы поместили заряд

q

Если поле создано двумя точечными зарядами q_1 и q_2 , то

$$U_1 = q_1 \varphi_{12} \quad U_2 = q_2 \varphi_{21}$$

Здесь φ_{12} – потенциал поля, создаваемого зарядом q_2 в точке, где расположен заряд q_1 , φ_{21} – потенциал поля от заряда q_1 в точке с зарядом q_2 .

Для вакуума можно записать

$$\varphi_{12} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi_{21} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Здесь r – расстояние между зарядами. Из этих уравнений следует, что

$$U_1 = U_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = U$$

$$U = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}U_2 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21}).$$

Аналогично можно получить

Энергия системы из N зарядов (самостоятельно):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (1)$$

потенциал в точке, где расположен заряд q_i ,

создаваемый всеми остальными зарядами (кроме q_i).

4.3. Полная электростатическая энергия заряженного тела.

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV \quad (2)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS \quad (3)$$

Полную энергию можно интерпретировать как ту минимальную работу, которую мы должны совершить, если мы из бесконечно маленьких зарядов расположенных на бесконечности друг от друга, так что они не взаимодействуют друг с другом, соберем какую-то пространственную конфигурацию в какой-то точке пространства.

4.4. О локализации электростатической энергии.

- ▶ Рассмотрим однородно по поверхности заряженную сферу. Уменьшим ее радиус на $|dR|$. $|dR| = -dR$
- ▶ При этом энергия сферы

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \varphi \cdot dS = \frac{1}{2} \varphi \int \sigma dS = \frac{1}{2} \varphi q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{1}{2} q = \frac{q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 R}$$

$$dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R^2}\right) dR =$$

$$-\frac{q^2 dR}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \cdot 4\pi R^2 (-dR)$$

$$W = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV \quad (4)$$

- ▶ Выяснить, где именно, в заряде или в поле, локализована энергия электростатика не позволяет, но мы знаем об электромагнитных волнах, которые способны переносить энергию в пустом пространстве, где нет зарядов, изучив закон, которому подчиняется переменное электромагнитное поле, мы увидим, что (4) справедлива всегда, а (2) и (3) - только в электростатике.

4.5 Энергия системы, состоящей из двух заряженных тел.

$$E = E_1 + E_2$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 \left(\overset{\text{diagram}}{E_1}, \overset{\text{diagram}}{E_2} \right)$$

Умножим все на

$$\frac{\epsilon_0}{2} dV$$

и проинтегрируем

$$W = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV =$$

$$\int \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} dV + \int \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} dV + \frac{\epsilon_0 \cdot 2 \left(\overset{\text{diagram}}{E_1}, \overset{\text{diagram}}{E_2} \right)}{2} dV$$


 W_1


 W_2


 U_{12} энергия
взаимодействия тел

5.1. Проводники в электростатике

5.1.1. Напряженность и потенциал электростатического поля в проводнике

В проводниках имеются электрически заряженные частицы – носители заряда (электроны в металлах, ионы в электролитах) способные перемещаться по всему объему проводника под действием внешнего электростатического поля.

Носителями заряда в металлах являются электроны проводимости. Они возникают за счет обобществления валентных электронов.

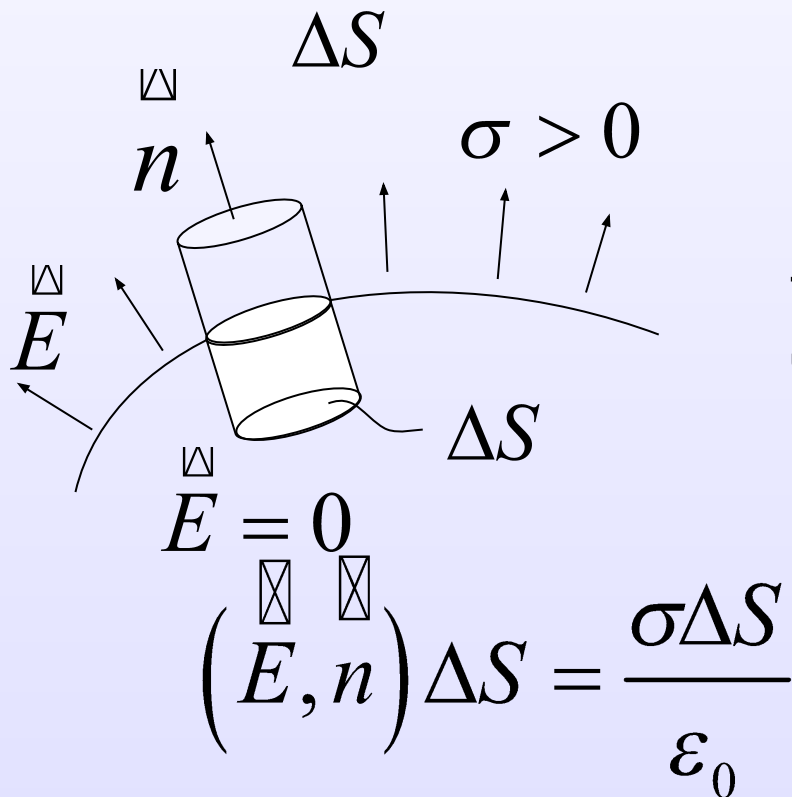
При отсутствии электрического поля металлический проводник является электрически нейтральным – электростатическое поле создаваемое положительными и отрицательными зарядами внутри него компенсируется.

- ▶ При внесении металлического проводника во внешнее электростатическое поле, **электроны проводимости перемещаются (перераспределяются)** до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов проводимости и положительных ионов не скомпенсирует внешнее поле.
- ▶ **1. В любой точке внутри проводника, находящимся в электростатическом поле $E = 0$;**
- ▶ **2. Внутренняя область проводника и его поверхность эквипотенциальны $\varphi = \text{const.}$**
- ▶ **3. Внутри проводника $\rho = 0$ (объёмная плотность заряда).**
- ▶ **4. На поверхности проводника напряженность $\vec{E}$ направлена по нормали к этой поверхности**, иначе, под действием составляющей E_τ , касательной к поверхности, заряды перемещались бы по проводнику, а это противоречило бы их статическому распределению.
- ▶ Вне заряженного проводника – поле есть, следовательно, должен быть вектор $\vec{E}$, и направлен он перпендикулярно поверхности!

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

5.1.2. Определение напряженности электростатического поля вблизи проводника

Выберем гауссову поверхность в виде небольшого цилиндра маленькой высоты так, как он изображен на рисунке. Этот цилиндр вырезает из поверхности проводника вместе с расположенными на нем зарядами некоторый фрагмент площади



Применим теорему Гаусса.

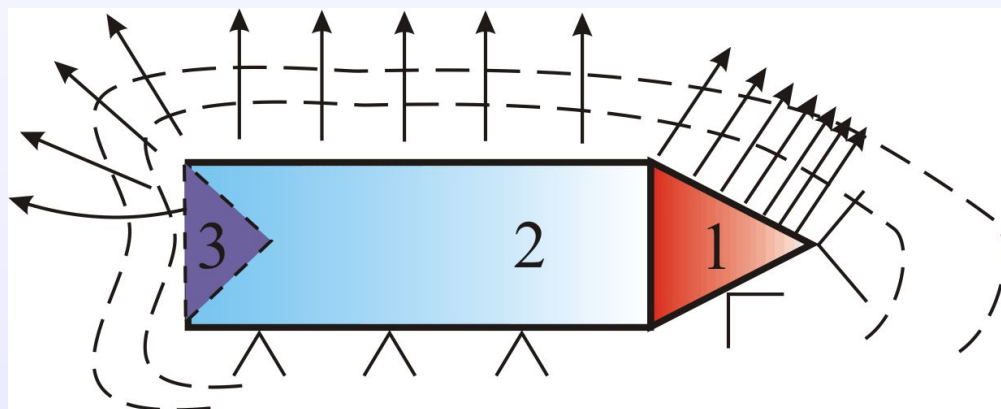
Поле внутри проводника = 0, поэтому и поток через нижний торец тоже равен нулю. Поток через верхний торец будет равен $(\vec{E}, \vec{n}) \Delta S$. Поток через боковую поверхность будет равен нулю.

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

5.1.3. Экспериментальная проверка распределения заряда на проводнике

Проверим экспериментально сделанные *нами* выводы:

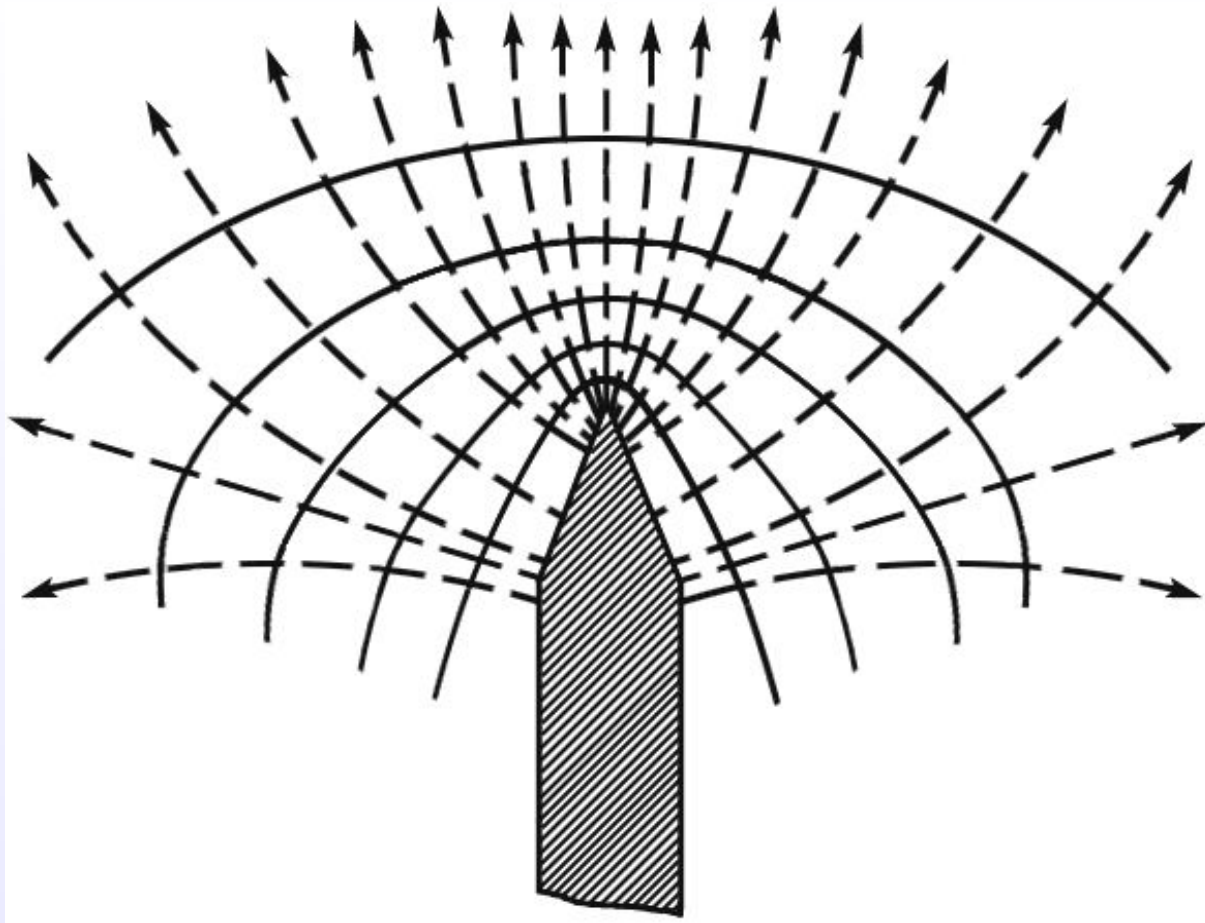
1. Заряженный кондуктор



В местах разной напряженности электростатического поля лепестки бумажки расходятся по-разному:

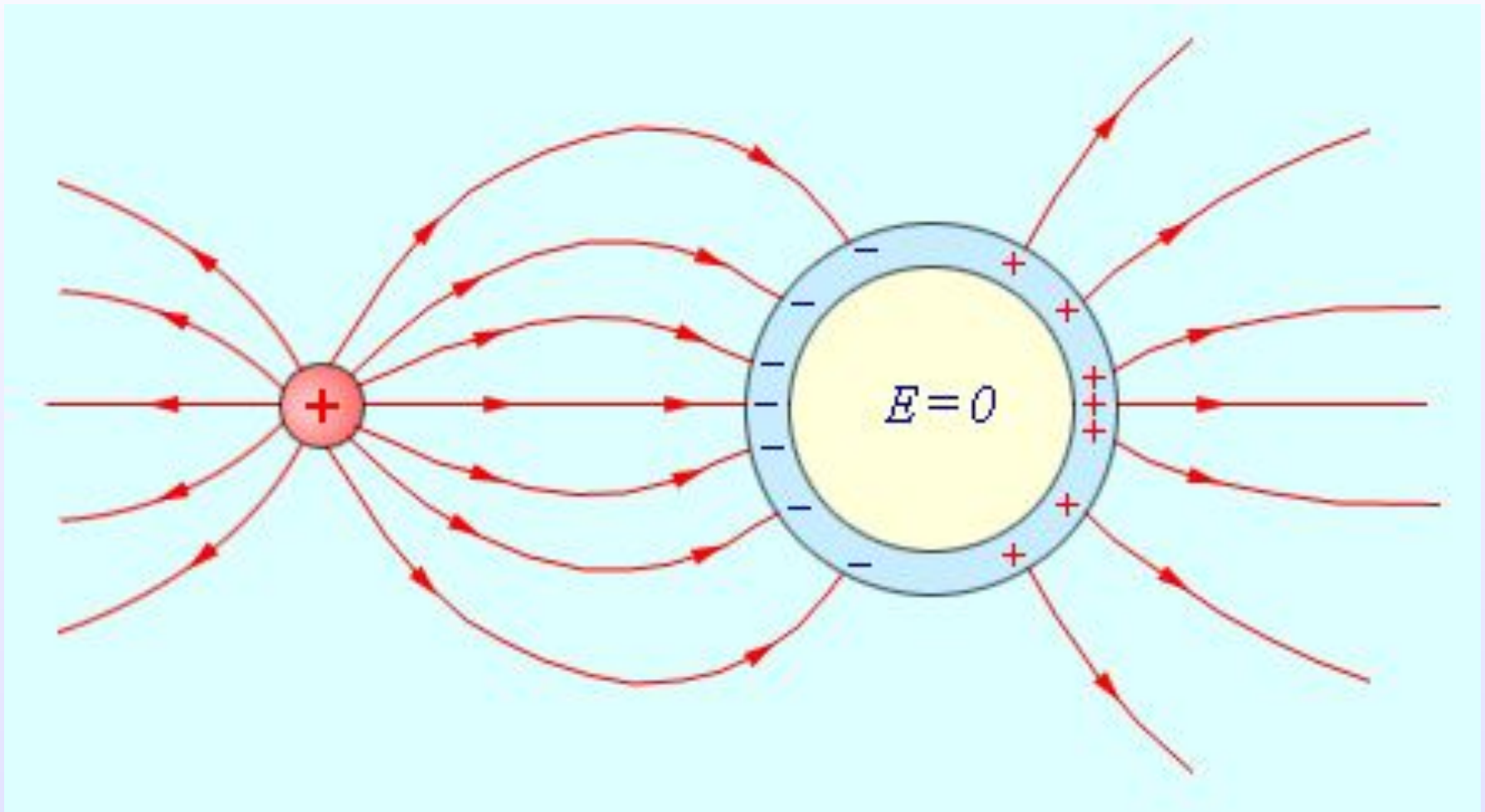
на поверхности 1 – максимальное расхождение,
на поверхности 2 заряд распределен равномерно $q = \text{const}$ и имеем одинаковое расхождение лепестков.

Электrometer – прибор, с помощью которого измеряют заряд и потенциал кондуктора. Если сообщить электрометру заряд с острия, то будет максимальное отклонение стрелки электрометра; с поверхности 2 – отклонение будет меньше; и нулевое отклонение с поверхности 3 внутри кондуктора.



Из рисунка видно, что напряженность электростатического поля *максимальна на острие* заряженного проводника.

2. Электростатическая защита. Поле в металлической полости равно нулю

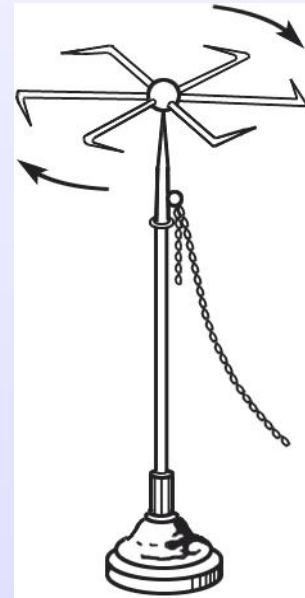
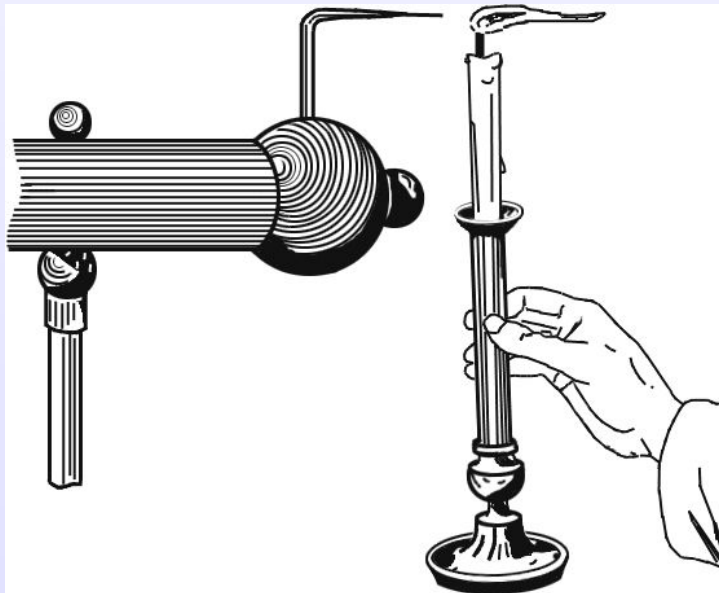


3. Стеkanie электростатических зарядов с острия.

Большая напряженность поля E на остриях – нежелательное явление, т.к. происходит утечка зарядов и ионизация воздуха. Ионы уносят электрический заряд, образуется как бы «**электрический ветер**» («огни Святого Эльма»).

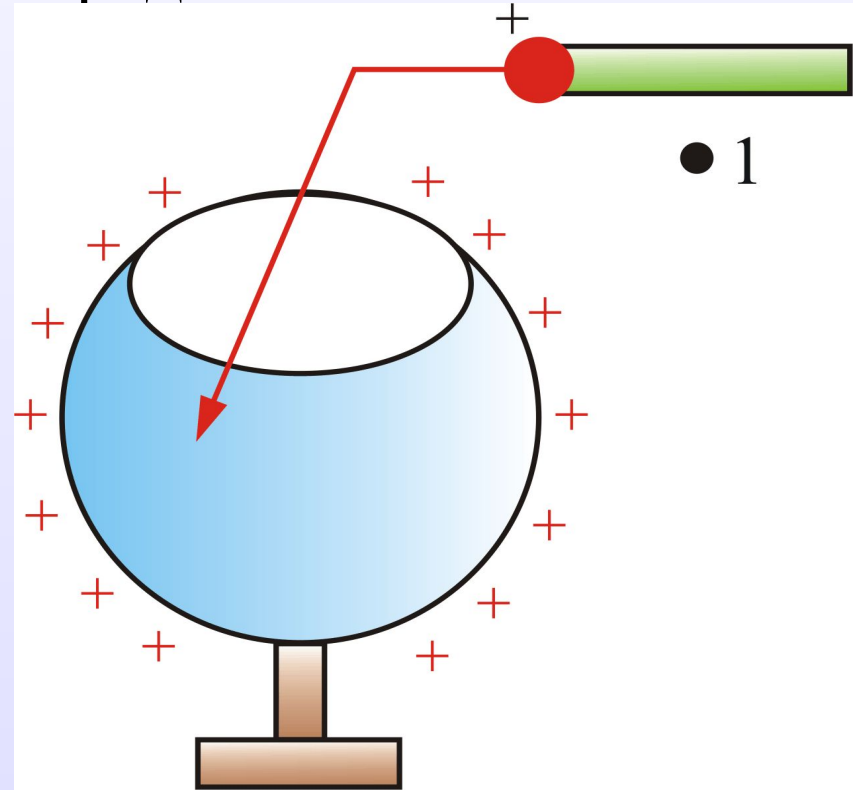
Есть наглядные эксперименты по этому явлению:
сдувание пламени свечи электрическим ветром; *колесо Франклина* или вертушка.

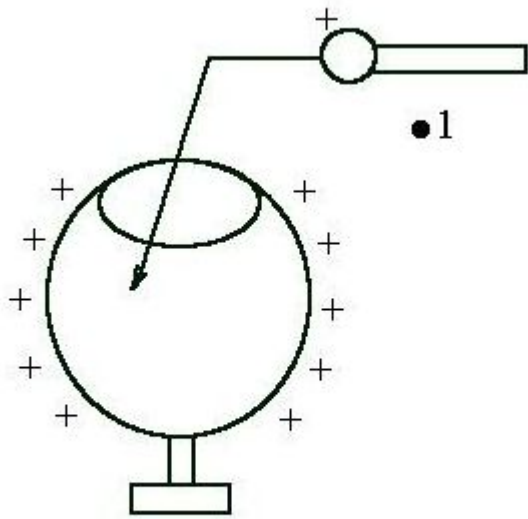
На этом принципе построен *электростатический двигатель*.



4. Электростатический генератор (ЭСГ).

Если заряженный металлический шарик привести в соприкосновение с поверхностью, какого либо, проводника, то заряд шарика частично передается проводнику: шарик будет разряжаться до тех пор, пока их потенциалы не выровняются. Иначе обстоит дело, если шарик привести в соприкосновение с внутренней поверхностью полого проводника. При этом весь заряд с шарика стечет на проводник и распределится на внешней поверхности проводника.





Потенциал полого проводника может быть больше, чем потенциал шарика, тем не менее, заряд с шарика стечет полностью: В точке 1 $\varphi_{III} < \varphi_{II}$, но пока мы переносили шарик в полость, мы совершили работу по преодолению сил отталкивания, и тем самым, увеличивая потенциальную

энергию — увеличили потенциал шарика. То есть пока вносим шарик, потенциал его станет больше и заряд будет, как обычно, перетекать от большего потенциала к меньшему. Перенося с помощью шарика следующую порцию заряда, мы совершаем еще большую работу. Это наглядный пример того, что потенциал — энергетическая характеристика.

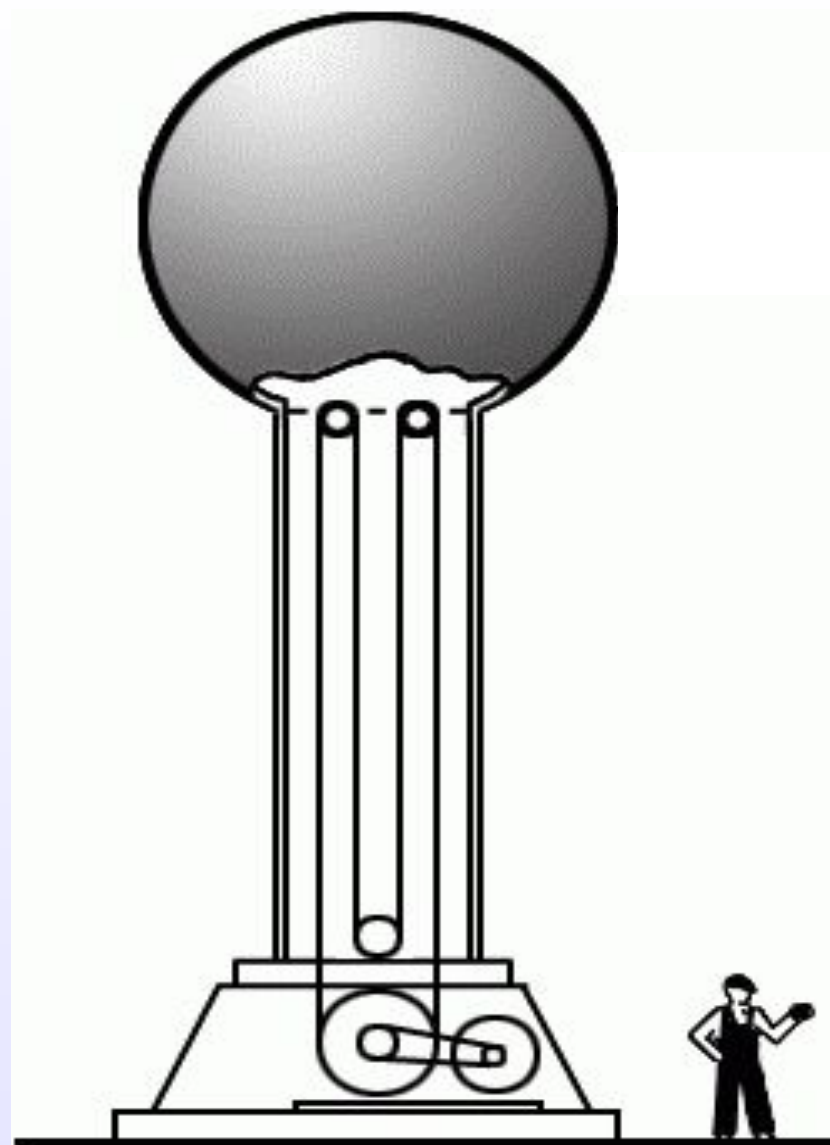
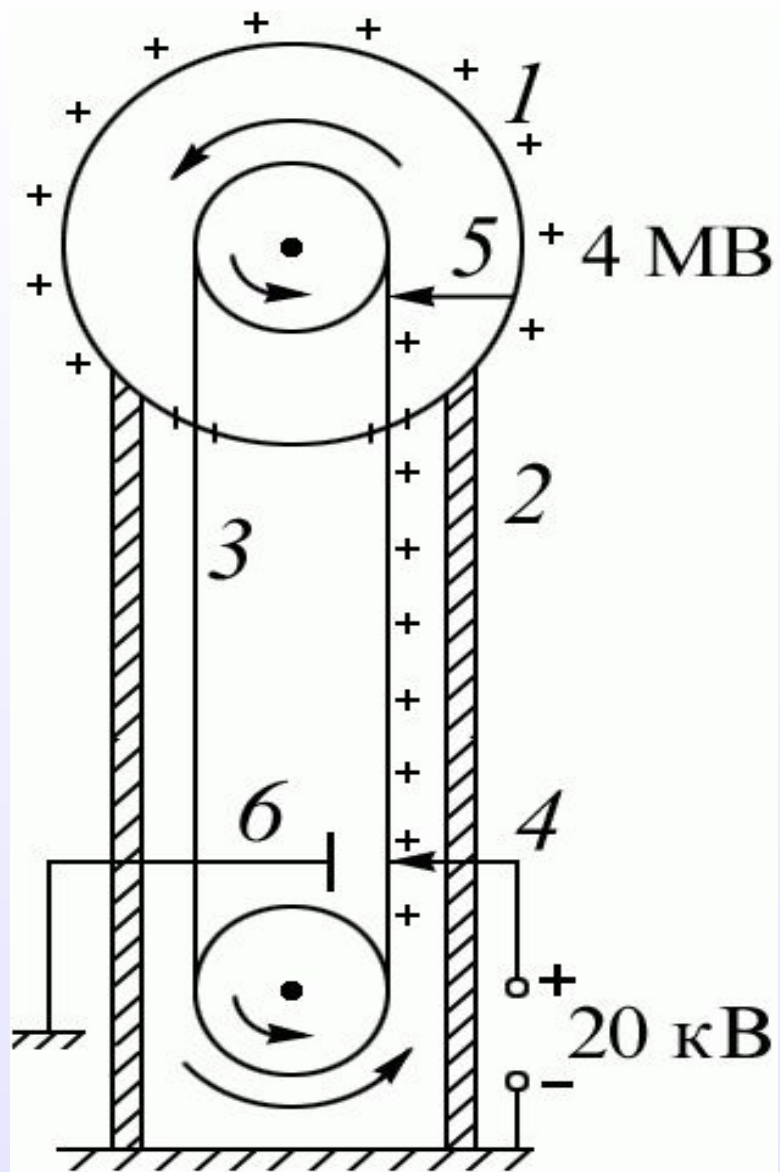


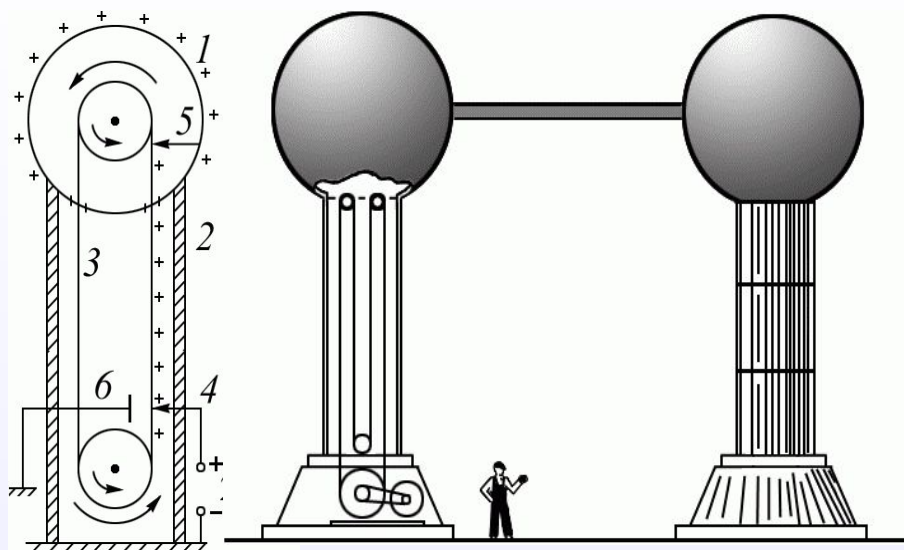
ВАН ДЕ ГРААФ Роберт (1901 – 1967) - американский физик.

Окончил университет штата Алабама (1922). Совершенствовал знания в Сорбонне и Оксфорде. В 1929-31 работал в Принстонском университете, в 1931 –60 –

массачусетском технологическом институте.

- Научные исследования в области ядерной физики и ускорительной техники.*
- Выдвинул идею тандемного ускорителя и к 1958 построил первый тандемный ускоритель отрицательных ионов.*
- Изобрел в 1931 году высоковольтный электростатический ускоритель (генератор Ван де Граафа), спроектировал и построил генератор с диаметром сфер по 4,5 м.*
- В 1936 построил самый большой из традиционных генераторов постоянного напряжения.*





Зарядное устройство заряжает ленту транспортера положительными зарядами. Лента переносит их вовнутрь сферы и там происходит съем положительных зарядов. Далее они стекают на внешнюю поверхность. Так можно получить потенциал относительно земли в несколько миллионов вольт —

ограничение — ток утечки. Такие генераторы существуют в настоящее время. Например, в Массачусетском технологическом институте построен генератор с диаметром сферы 4,5 метров и получен потенциал $3 \div 5 \cdot 10^6$ В.

В Томске очень развита ускорительная техника. Так, только в НИИ ядерной физики имеется около десяти ускорителей (генераторы различного класса). Один из них [ЭСГ](#) или генератор Ван-де-Граафа. Он изготовлен в специальной башне и на нем получали потенциал один миллион вольт.

► **См. ЭКСПЕРИМЕНТ**

► Эквипотенциальность проводника

► Распределение зарядов

► Электростатическая защита

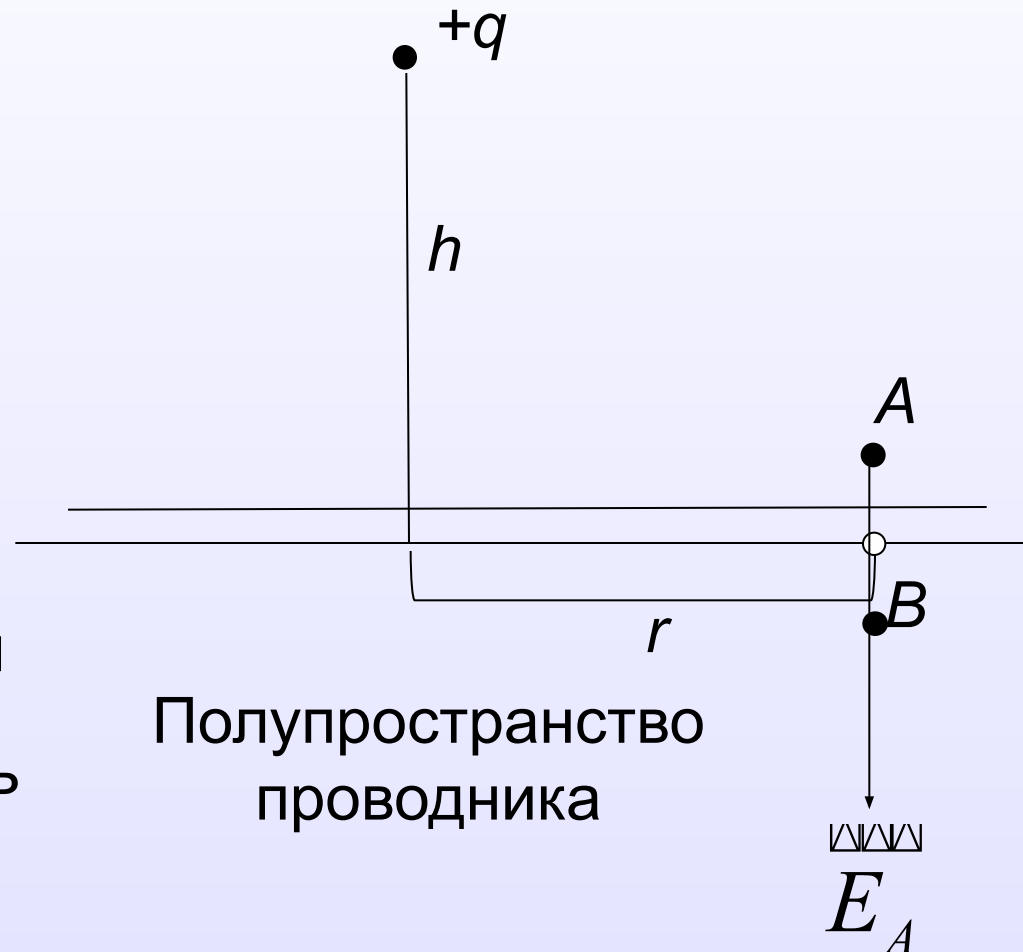
► Метод зеркальных изображений

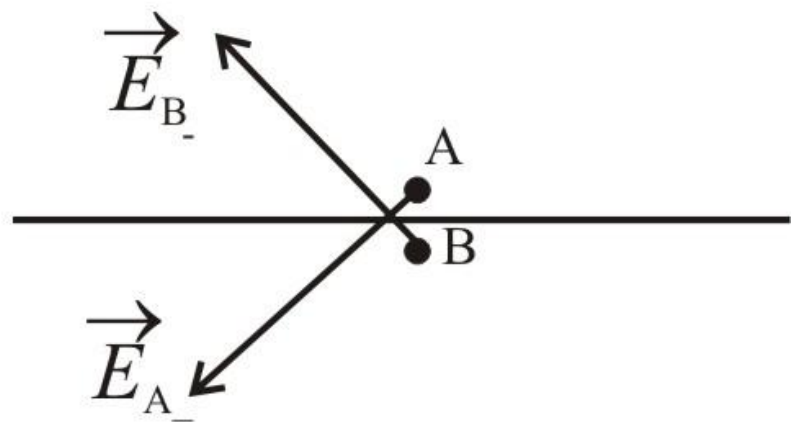
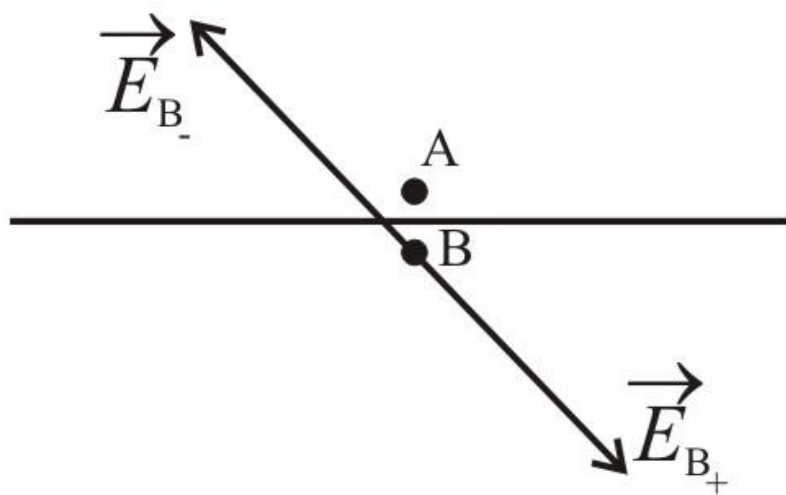
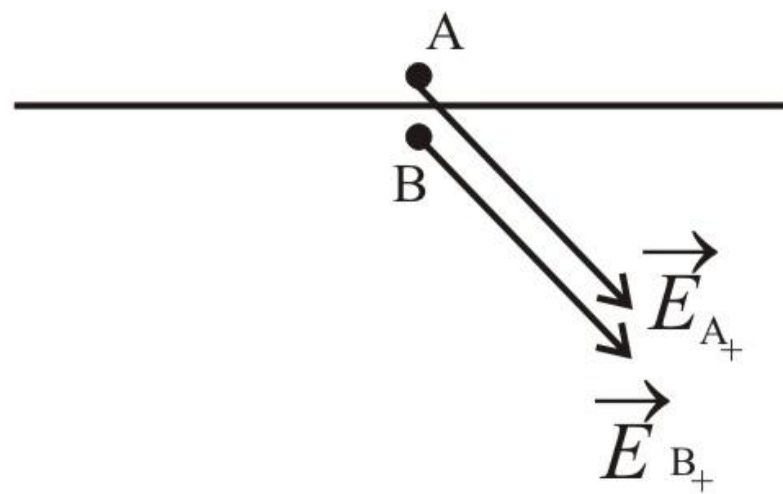
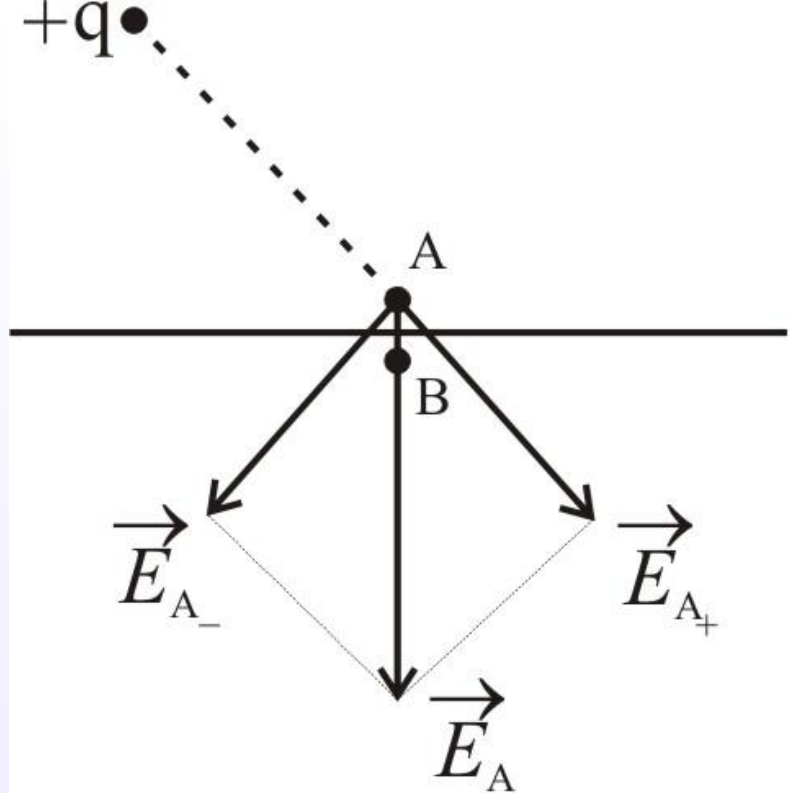


5.2. Метод электростатических изображений

- ▶ Точечный заряд $+q$ находится на расстоянии h от плоской поверхности незаряженного полубесконечного проводника
- ▶ Найти $\sigma(r)$,
- ▶ индуцированного на проводнике. r – расстояние от основания перпендикуляра, опущенного на плоскость из заряда q , до точки, в которой определяем

$$\sigma(r)$$



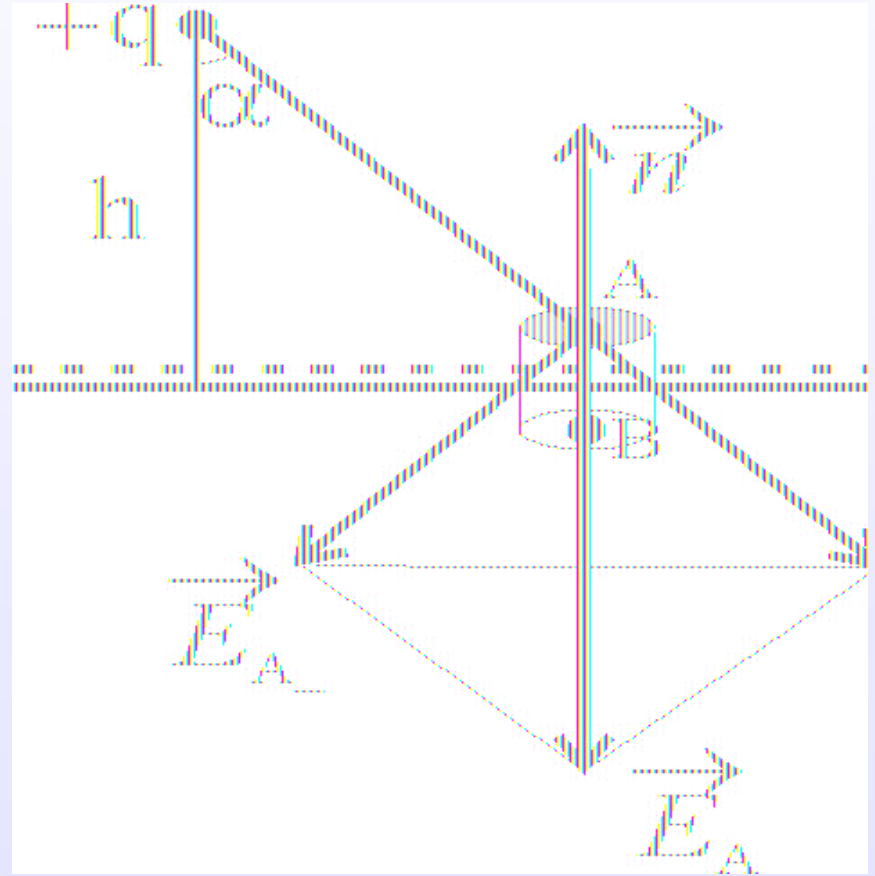


$$E_A = 2E_{A+} \cos \alpha$$

$$E_{A+} = \frac{kq}{h^2 + r^2}$$

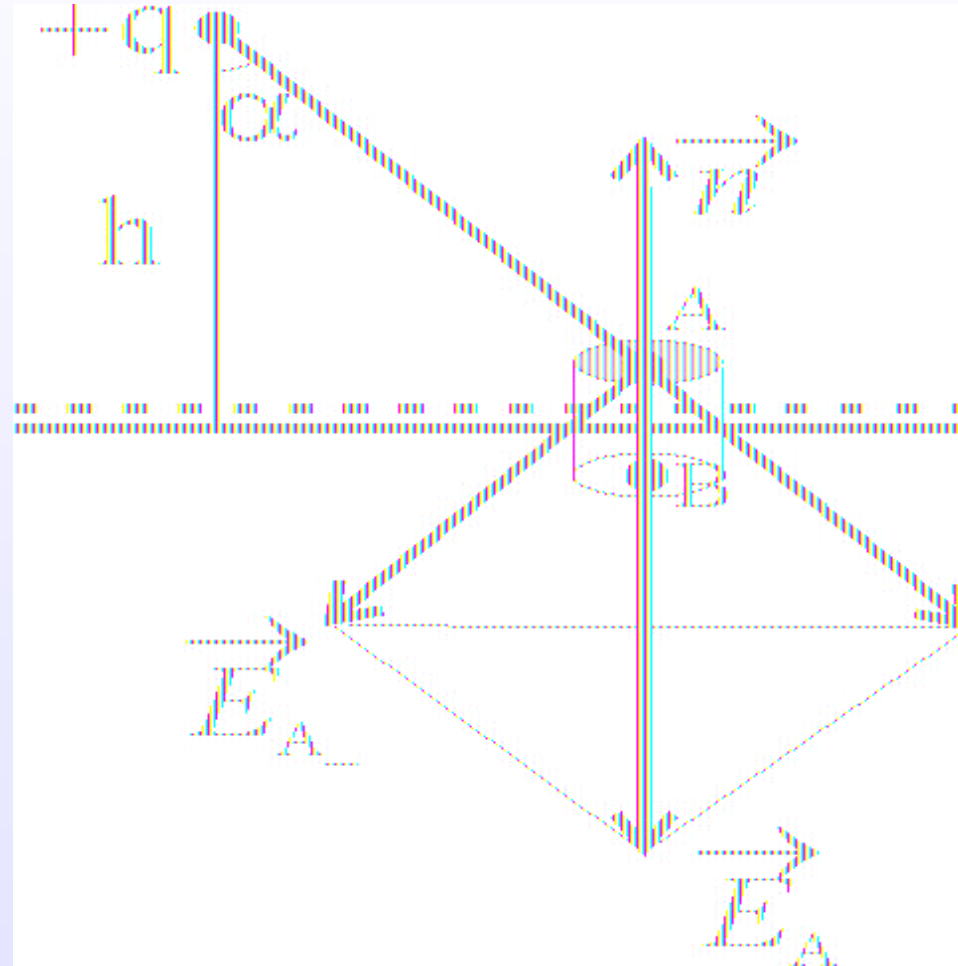
$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$E_A = \frac{2kq}{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} h$$



$$-E_A \Delta S + 0 = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\sigma(r) = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$F = q_+ E_-$$

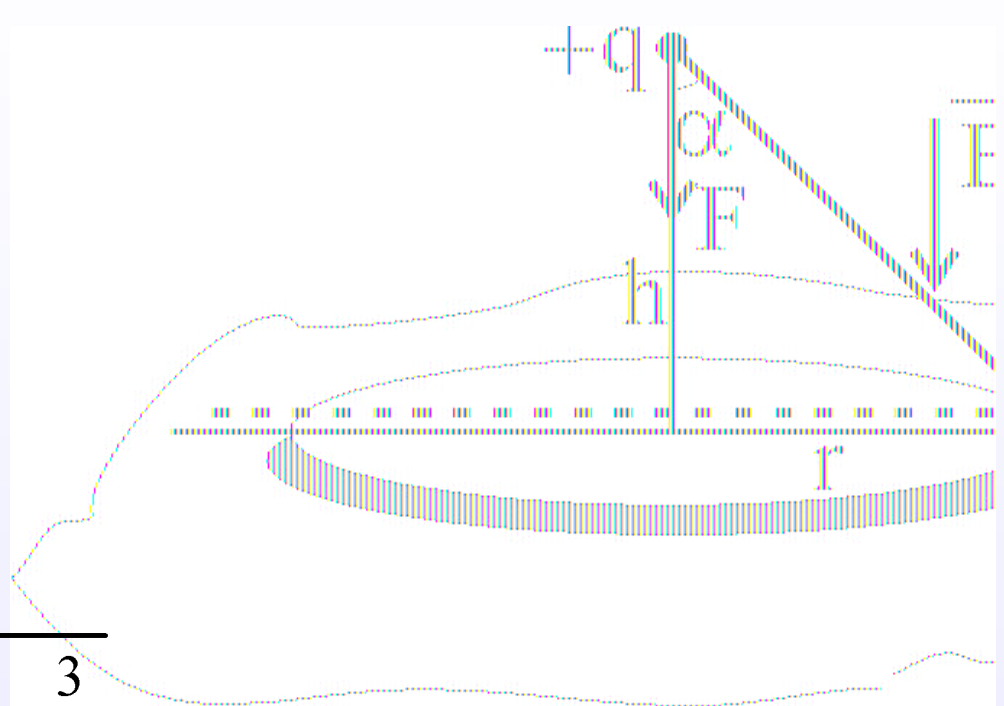
$$E_- = \int |dE_-|$$

$$|dE_-| = \frac{|dq| h}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$|dq| = |\sigma(r)| 2\pi r \cdot dr$$

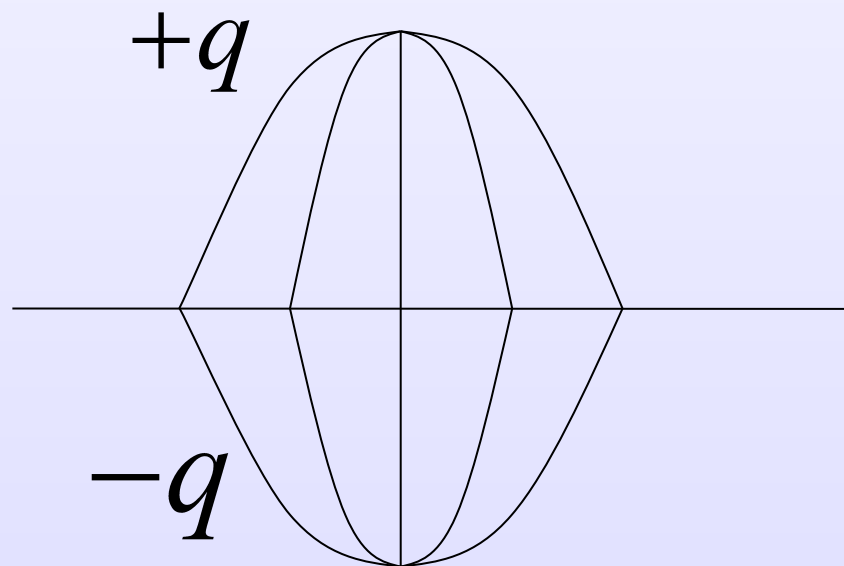
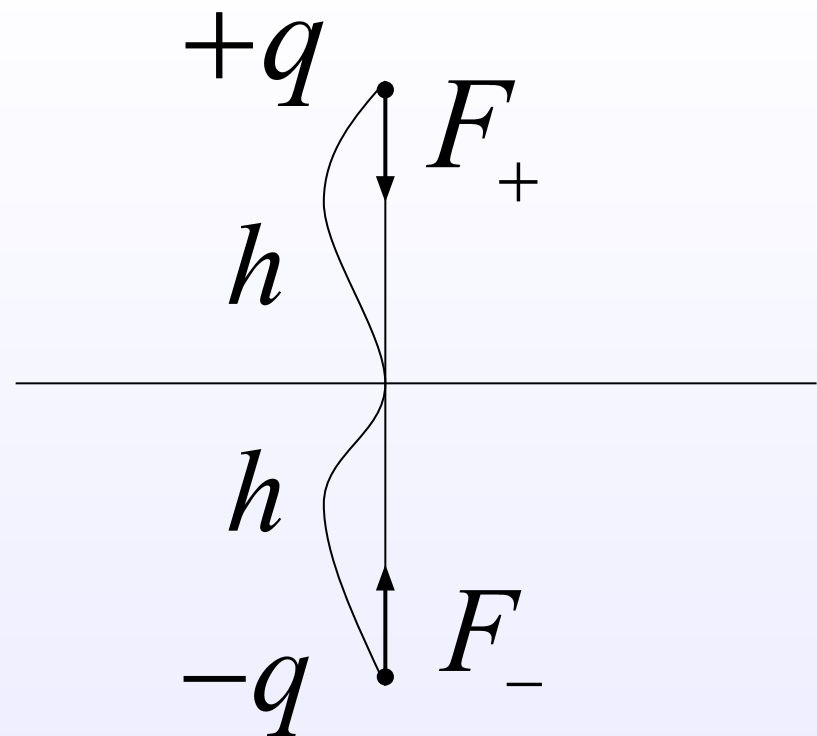
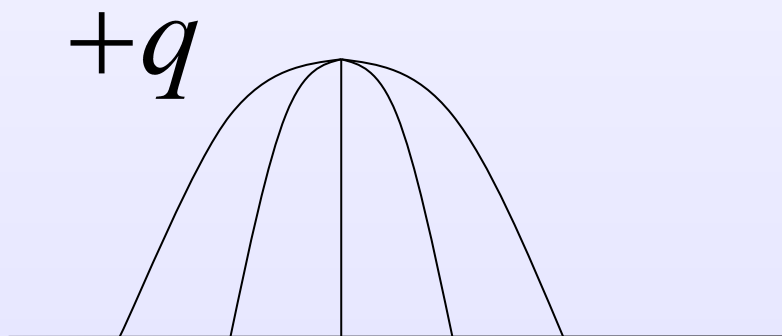
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$



5.3. Конденсаторы

5.3.1. Электрическая емкость.

При сообщении проводнику заряда, на его поверхности появляется потенциал φ . Но если этот же заряд сообщить другому проводнику, то потенциал будет другой. Это зависит от геометрических параметров проводника. Но в любом случае, потенциал φ пропорционален заряду q .

$$\varphi = \frac{1}{C} q$$

- ▶ **Фара́д** (обозначение: **Ф**, **F**) — единица измерения электрической ёмкости) — единица измерения электрической ёмкости в системе СИ (ранее называлась **фара́да**).
- ▶ 1 фарад равен электрической ёмкости конденсатора 1 фарад равен электрической ёмкости конденсатора, при которой заряд 1 кулон 1 фарад равен электрической ёмкости конденсатора, при которой заряд 1 кулон создаёт между обкладками конденсатора напряжение 1 вольт.
- ▶ $\Phi = \underline{\text{Кл}} \Phi = \text{Кл} / \underline{\text{В}} \Phi = \text{Кл} / \text{В} = \underline{\text{А}} \Phi = \text{Кл} / \text{В} = \text{А} \cdot \underline{\text{с}} / \text{В}$
- ▶ $1\Phi = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{c}^4 / \mathbf{кг} \cdot \mathbf{м}^2$

Пример 1. Емкость C уединенной проводящей сферы радиуса R .

- ▶ 1. Найдем с помощью теоремы Гаусса

$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- ▶ 2. Найдем потенциал поверхности через интегральную формулу для убыли потенциала

$$\varphi(R) - \varphi(\infty) = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- ▶ 3. Электрическая емкость

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Пример 2. Энергия заряженной уединенной проводящей сферы.

▶ 1й способ.

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \varphi \cdot ds = \frac{\varphi}{2} \int \sigma \cdot ds = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

- ▶ поверхность сферы является эквипотенциальной поверхностью.

- ▶ 2й способ. энергия аккумулирована не на заряженной поверхности, а в той области пространства, где находится электрическое поле, то есть

$$W = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{объем шарового слоя}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{2C}$$

- ▶ **Фарад** — очень большая ёмкость. Ёмкостью 1Ф обладал бы уединенный шар, радиус которого был бы равен 13 радиусам Солнца.
- ▶ Для сравнения, ёмкость Земли (шара размером с Землю, как уединенного проводника) составляет всего около 700 микрофарад.

$$\text{Ёмкость Земли: } C_{\text{Земли}} = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6400 \cdot 10^3 \approx 0,7 \text{ мФ.}$$

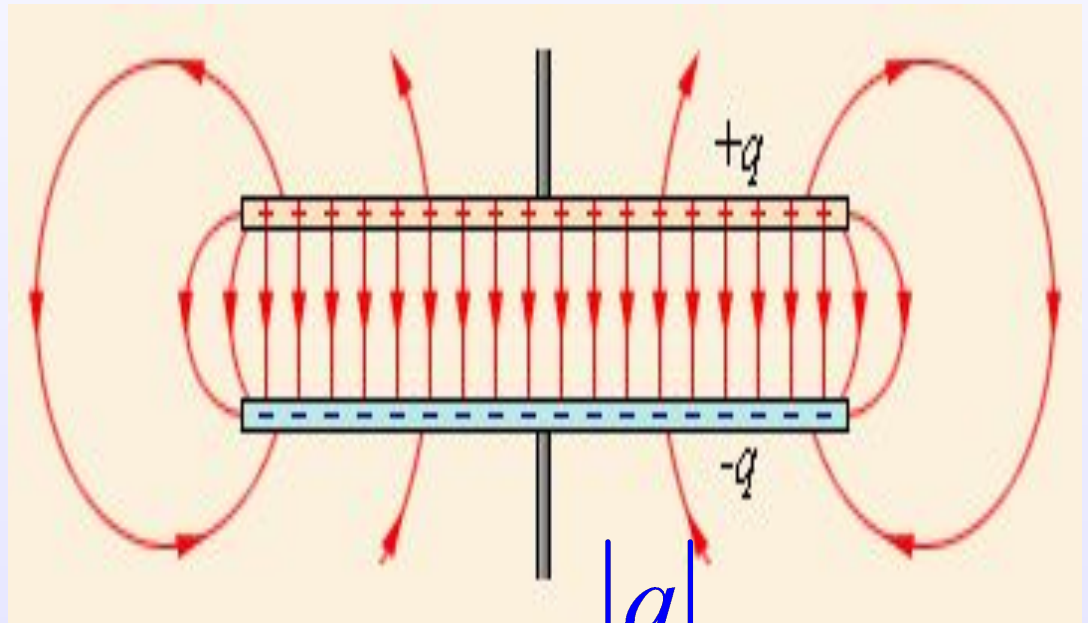
- ▶ Промышленно выпускаемые конденсаторы обычно имеют номиналы измеряемые в *нано-* и *пикофарадах*.
Ёмкость т. н. ионисторов (конденсаторов с двойным электрическим слоем) может достигать нескольких килофарад. В современной звуковой аппаратуре используют конденсатор гибридный ёмкостью до 40 Фарад.

5.3.2. Взаимная емкость.

Конденсаторы

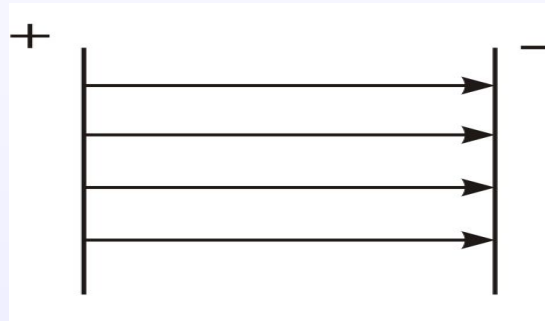
Необходимость в устройствах, накапливающих заряд есть, а уединенные проводники обладают малой емкостью. Обратите внимание, что емкость проводника увеличивается, если к нему поднести другой проводник – явление электростатической индукции.

Введем понятие взаимной емкости двух проводников (такую систему обычно называют конденсатором, а проводники его обкладками).



$$C_{12} = \frac{|q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$$

- ▶ Конструкция такова, что внешние окружающие конденсатор тела не оказывают влияние на емкость конденсатора. Это будет выполняться, если *электростатическое поле будет сосредоточено внутри конденсатора между обкладками.*



- ▶ Конденсаторы бывают *плоские, цилиндрические и сферические.*
- ▶ Так как электростатическое поле находится внутри конденсатора, то линии электрического смещения начинаются на положительной обкладке и заканчиваются на отрицательной – и никуда не исчезают. Следовательно, заряды на обкладках *противоположны по знаку, но одинаковы по величине.*

▶ Пример 3. Найдем формулу для емкости плоского конденсатора.

▶ С помощью теоремы Гаусса в интегральной форме находим напряженность поля одной пластины

$$E_x (+) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

▶ Напряженность между обкладками равна

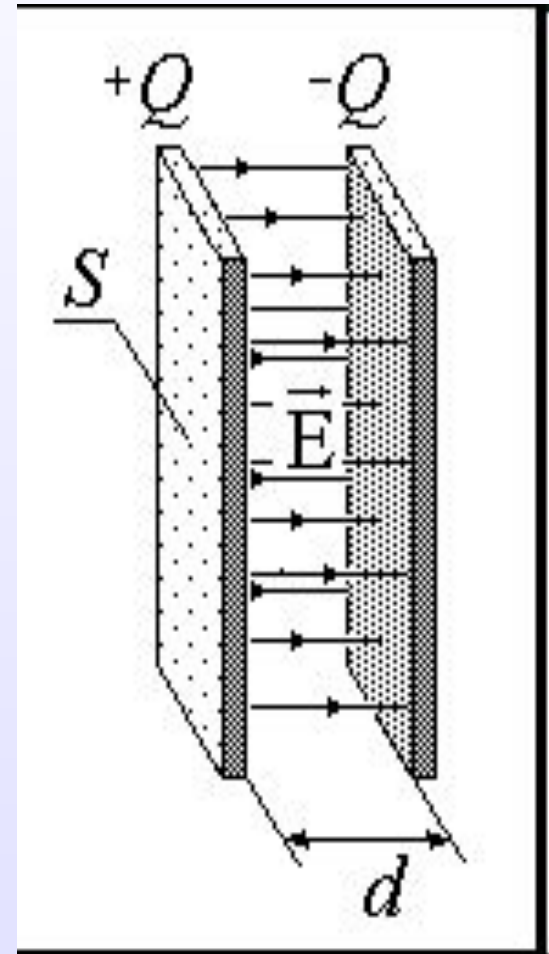
$$E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

▶ Разность потенциалов между обкладками

$$\varphi(0) - \varphi(d) = \int_0^d E_x \cdot dx = \frac{q \cdot d}{\varepsilon_0 S}$$

По определению

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



Пример 4. Найдем энергию заряженного плоского конденсатора.

► 1й способ

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \varphi \cdot ds = \frac{1}{2} \sigma_+ \cdot \varphi(0) S + \frac{1}{2} \sigma_- \varphi(d) S =$$
$$\frac{\sigma S}{2} \left(\varphi(0) - \varphi(d) \right) = \frac{q^2 d}{2 \varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{2C}$$

*см. предыдущий
пример*

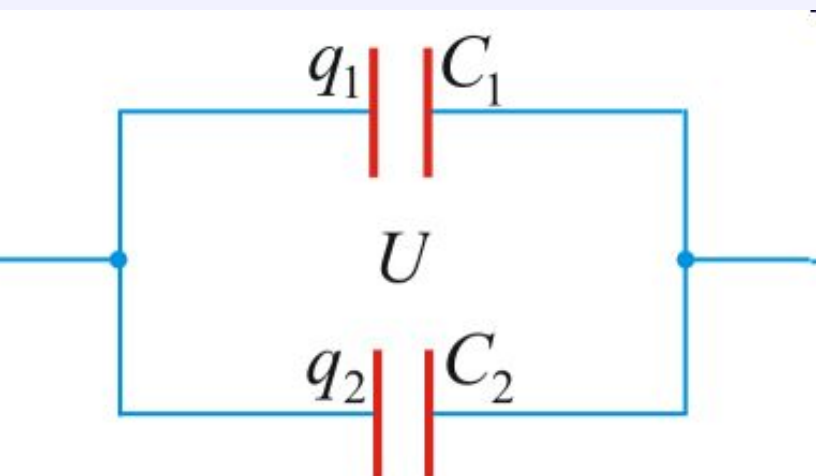
► 2й способ

$$W = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \frac{q^2}{\varepsilon_0^2 S^2} S \cdot dx = \frac{q^2 d}{2 \varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{2C}$$

5.3.3. Соединение конденсаторов

Емкостные батареи – комбинации параллельных и последовательных соединений конденсаторов.

1) Параллельное соединение



Общим является напряжение U

$$q_1 = C_1 U;$$

$$q_2 = C_2 U;$$

Суммарный заряд:

$$q = q_1 + q_2 = U(C_1 + C_2).$$

Результирующая емкость:

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2$$

Сравните с параллельным соединением сопротивлений R :

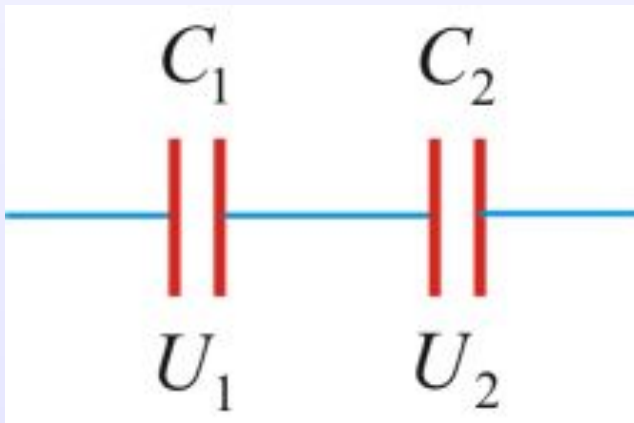
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов, их емкости складываются.

2) Последовательное соединение :

Общим является заряд q

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2};$$



$$U = \sum U_i = q \sum \frac{1}{C_i}$$

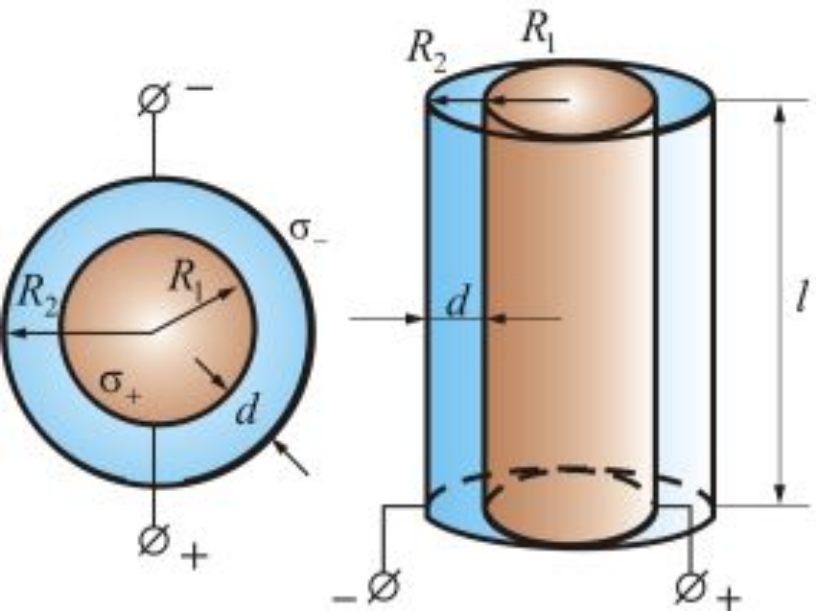
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

$$R = R_1 + R_2$$

5.4.3. Расчет емкостей различных конденсаторов

1. Емкость цилиндрического конденсатора.



потенциалов между

конденсатора

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

линейная плотность

цилиндрических

$q = \lambda l$, (l — длина конденсатора)

$$C_{\text{цил.}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

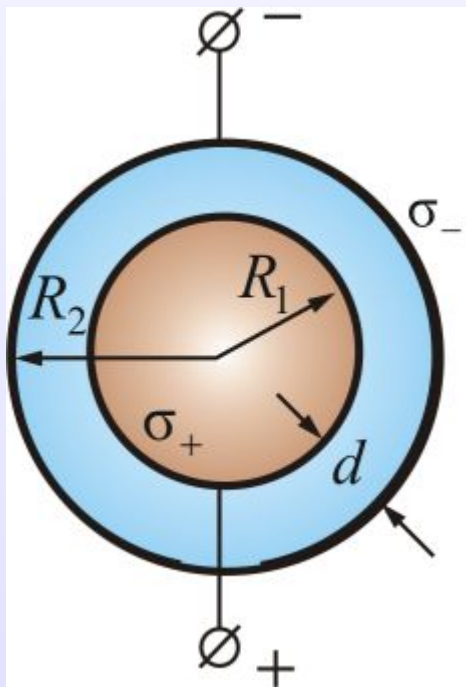
$$\Delta\varphi = \frac{l\lambda \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} = \frac{q}{C}$$

Понятно, что если зазор между обкладками мал: $d = R_2 - R_1$, то есть $d \ll R_1$, тогда

$$\ln \frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1}$$

$$C_{\text{цил.}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l R_1}{R_2 - R_1} = \epsilon_0\epsilon \frac{S}{d}$$

2. Емкость шарового конденсатора.



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

— разность потенциалов между обкладками конденсатора, где R_1 и R_2 — радиусы шаров.

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}, \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

В шаровом конденсаторе $R_1 \approx R_2$; $S = 4\pi R_2$; $R_2 - R_1 = d$ – расстояние между обкладками. Тогда

Таким образом, емкость шарового конденсатора,

$$C_{\text{шар.}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}{d} = \varepsilon_0\varepsilon \frac{S}{d}.$$

$$C_{\text{шар.}} = \varepsilon_0\varepsilon \frac{S}{d},$$

что совпадает с емкостями плоского и цилиндрического конденсатора.

**О ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ε
ПОГОВОРИМ ПОЗЖЕ!!!**

**Смотри демонстрационный вариант рубежного
контроля!!!**

▶ **См. ЭКСПЕРИМЕНТ**

▶ **Емкость**

▶ Емкость уединенного проводника

▶ Емкость плоского конденсатора

▶ Зависимость емкости от свойств среды

(15-17.avi)



Кто не ходит на лекции и семинары, запасайтесь справками!



