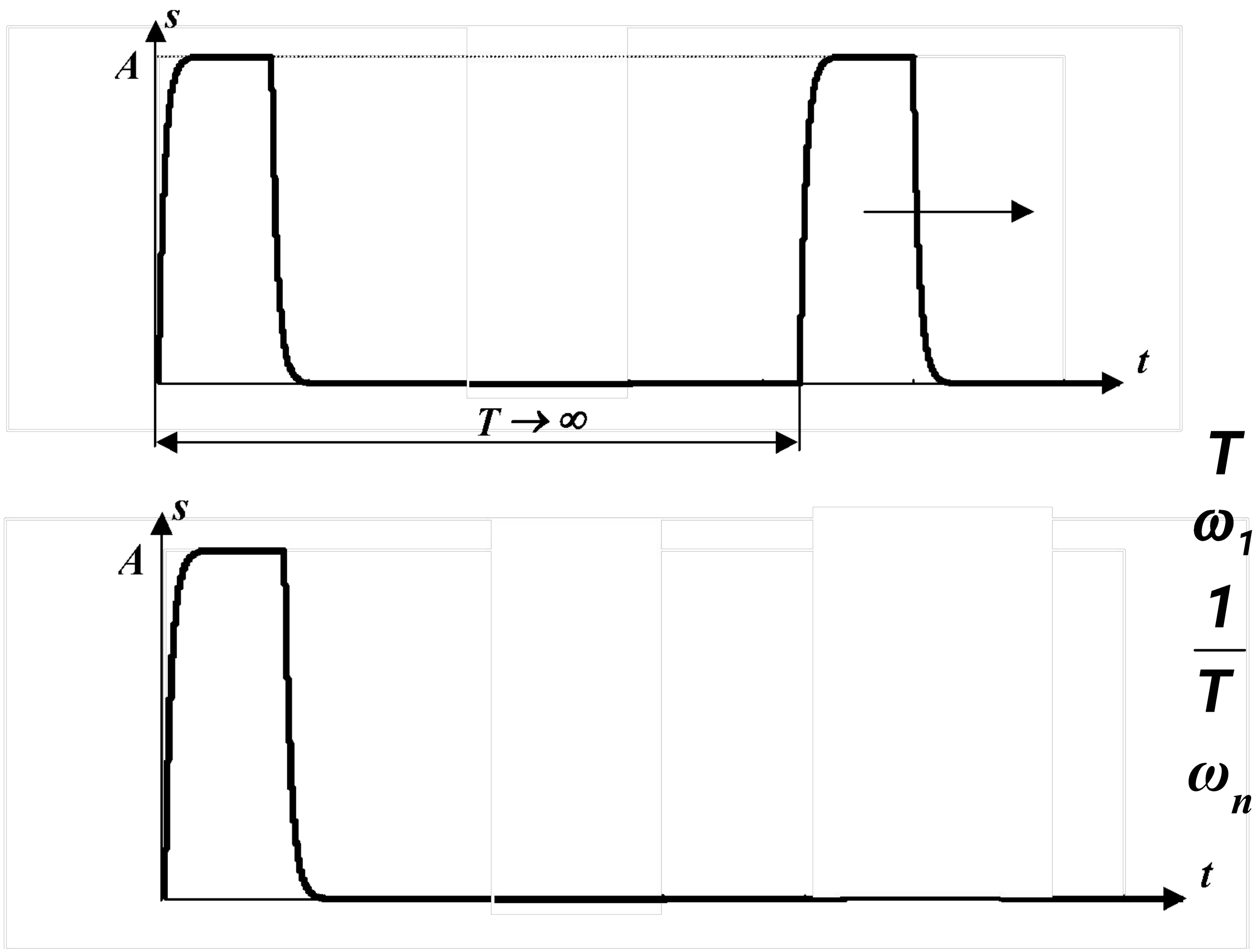
СВОЙСТВА СИГНАЛОВ

Спектральный анализ сигналов

Спектральный анализ непериодических сигналов



Предельный переход

$$T \to \infty$$

$$\omega_1 = 2\pi / T = \Delta\omega \to 0$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \to 0$$

$\omega_n = n\omega_1$ - текущая частота

Предельный переход

$$s(t) = \lim_{T\to\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}\right\} \quad c_n = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-jn\omega_1 t}dt\right\}$$

$$s(t) = \lim_{T\to\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-jn\omega_1 t}dt\right\}e^{jn\omega_1 t}\right\}$$

Предельный переход

$$s(t) = \lim_{\substack{T\to\infty,\\ \Delta\omega\to 0}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega_n t} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta\omega\to 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega_n t} \Delta\omega \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega t} d\omega$$

Преобразование Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ — обратное преобразование Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$$ — прямое преобразование Фурье

S(ω) **- спектральная плотность сигнала** ***s(t)***

Свойства спектральной плотности сигнала

$$S(\omega) = |S(\omega)| e^{j\varphi_S(\omega)}$$

$| S(\omega) |$ - амплитудный спектр

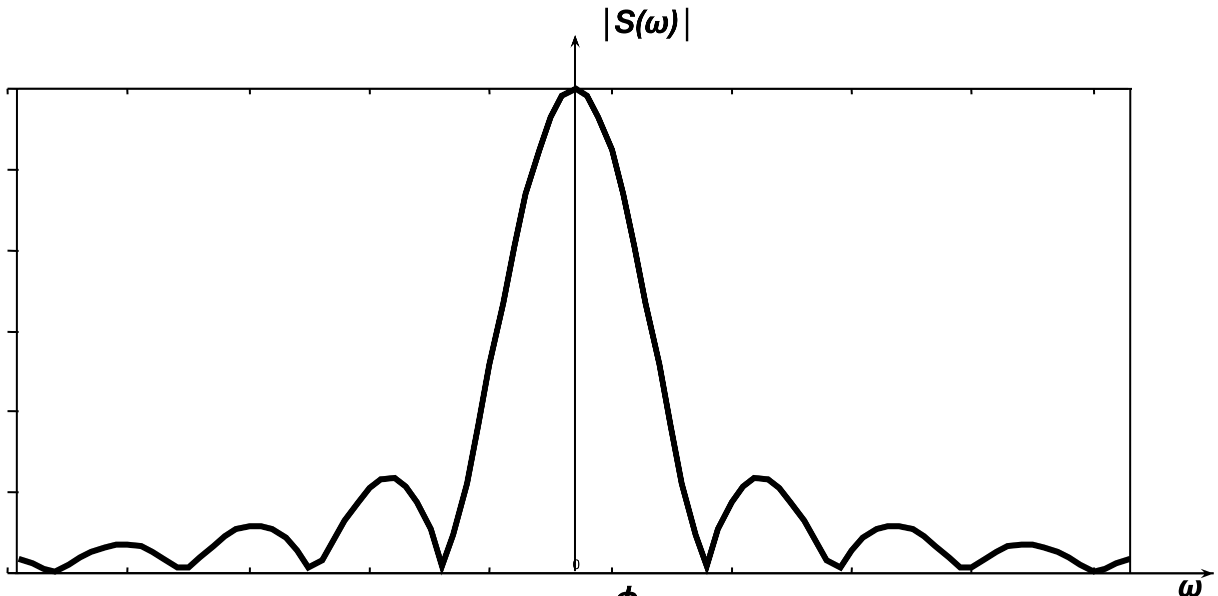
$\phi_s(\omega)$ - фазовый спектр

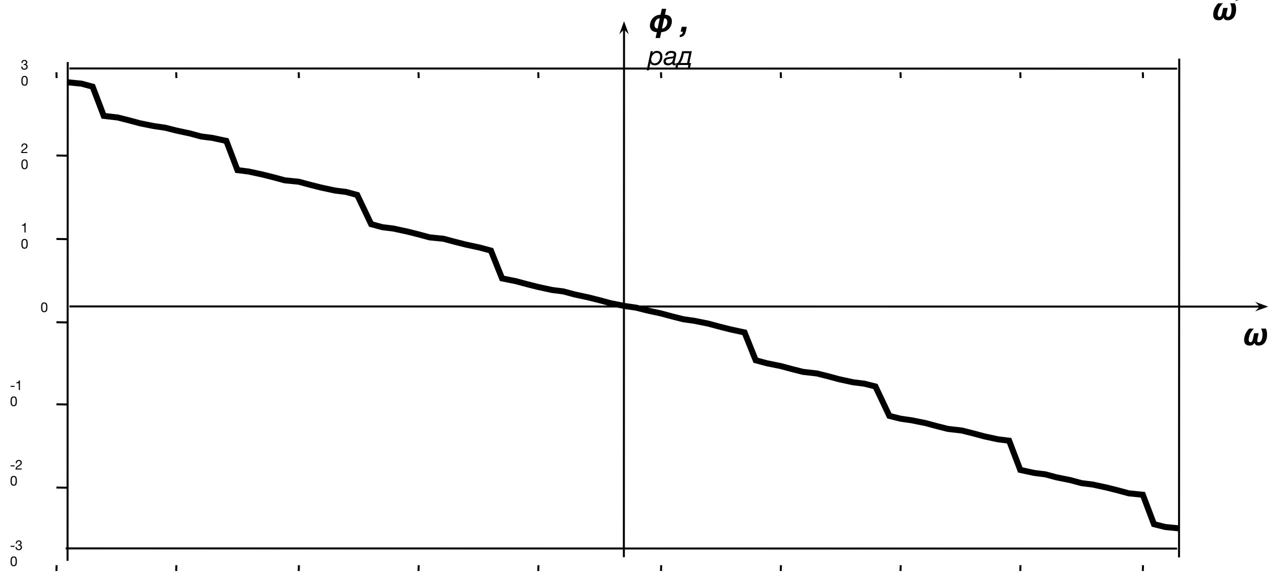
$$S(-\omega) = S^*(\omega)$$

$$|S(-\omega)| = |S(\omega)| \qquad \varphi_S(-\omega) = -\varphi_S(\omega)$$

$$[\text{размерность } S(\omega)] = \frac{[\text{размерность } s(t)]}{\text{Гц}}$$

Графическое представление спектра сигнала





Свойства преобразования Фурье

Сдвиг во времени

$$s_1(t)=s_0(t-t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad S_1(\omega) = e^{-j\omega t_0} S_0(\omega)$$

$$\left|S_1(\omega)\right| = \left|S_0(\omega)\right|$$

$$\arg\left(S_1(\omega)\right) = \arg\left(S_0(\omega)\right) - \omega t_0$$

Свойства преобразования Фурье

Изменение масштаба времени

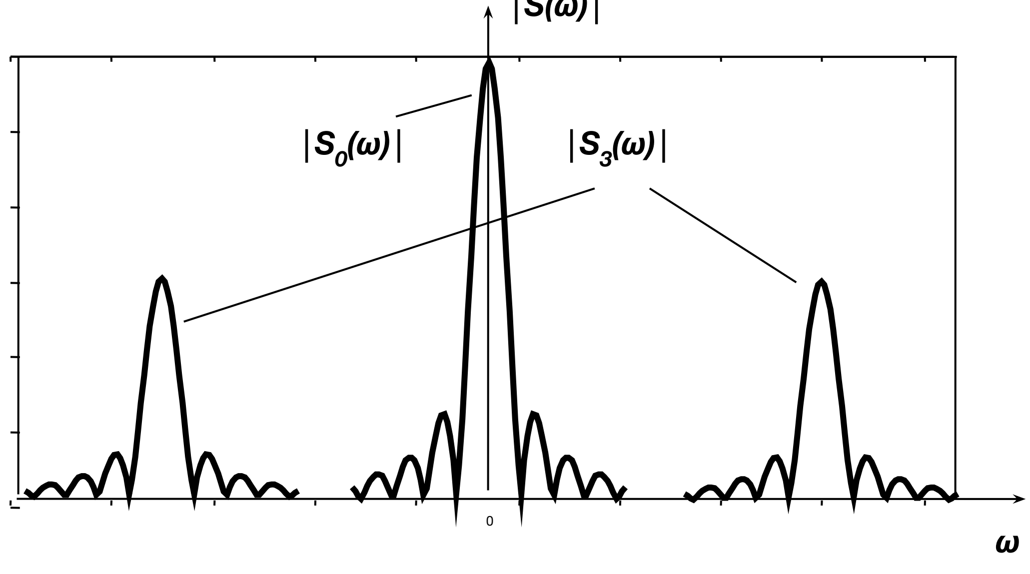
$$s_2(t)=s_0(\alpha t) \quad \Longleftrightarrow \quad S_2(\omega)=\frac{1}{\alpha}S_0(\omega/\alpha)$$

Свойства преобразования Фурье

Смещение спектра сигнала

$$s_3(t)=s_0(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0)$$

$$S_3(\omega)=\frac{1}{2}\left[e^{j\theta_0}S_0(\omega-\omega_0)+e^{-j\theta_0}S_0(\omega+\omega_0)\right]$$



Свойства преобразования Фурье

Дифференцирование сигнала

$$s_4(t)=d[s_0(t)]/dt \quad \Longleftrightarrow \quad S_4(\omega) = j\omega S_0(\omega)$$

Свойства преобразования Фурье

Интегрирование сигнала

$$s_5(t) = \int_{-\infty}^{t} s_0(t')dt' \Longleftrightarrow S_5(\omega) = \frac{1}{j\omega} S_0(\omega)$$

Свойства преобразования Фурье

Суперпозиция сигналов

$$s_б(t) = \sum_k \alpha_k s_{ok}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad S_б(\omega) = \sum_k \alpha_k S_{ok}(\omega)$$

Свойства преобразования Фурье

Произведение сигналов

$$s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) S_2(\omega - \Omega)\, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega - \Omega) S_2(\Omega)\, d\Omega$$

Следствия

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(-\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(-\omega) S_2(\omega)\, d\omega$$

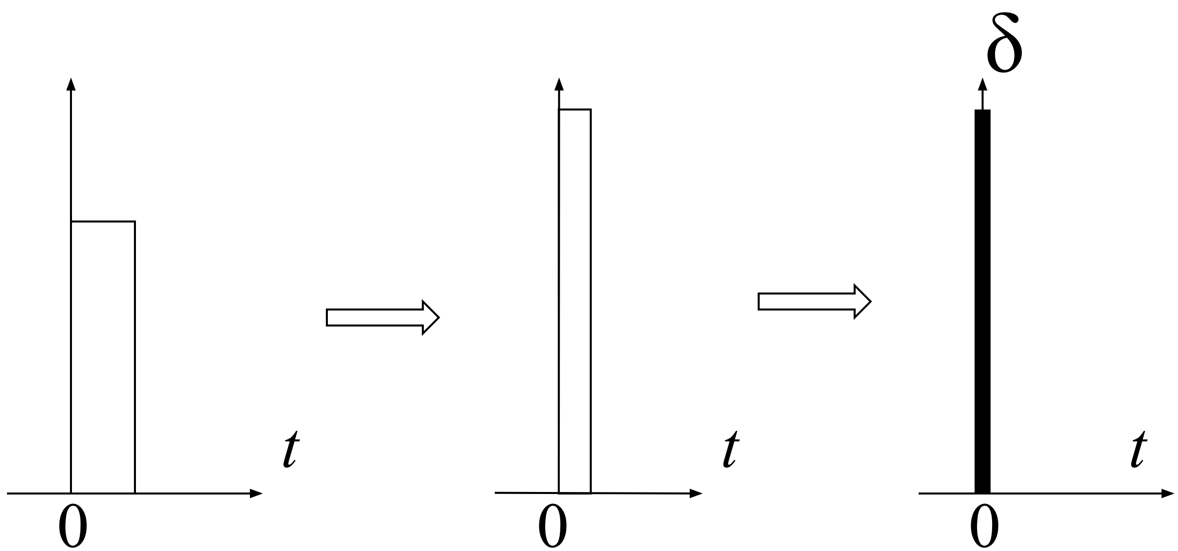
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(\omega) \right| d\omega$$

Спектры некоторых сигналов

Сигнал $s(t)$	Коэффициенты ряда Фурье	Спектральная плотность $S(\omega)$
$c_0 = const$	c_0 (компл., триг.)	$2\pi\, c_0\, \delta(\omega_0)$
$exp(j\omega_0 t)$	1 (компл).	$2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)$
$cos(j\omega_0 t)$	½, ½ (компл)	$\pi\, [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$sin(j\omega_0 t)$	-½j, ½j (компл)	$-j\pi\, [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\delta(t)$	—	1
$\delta(t - t_0)$	—	$exp(-j\omega t_0)$
$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$	—	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$
$\sum\limits_{T=-\infty}^{\infty} c_T\, exp(jn\omega_1 t)$	—	$2\pi \sum\limits_{T=-\infty}^{\infty} c_T\, \delta(\omega - n\omega_1)$

δ-функция Дирака

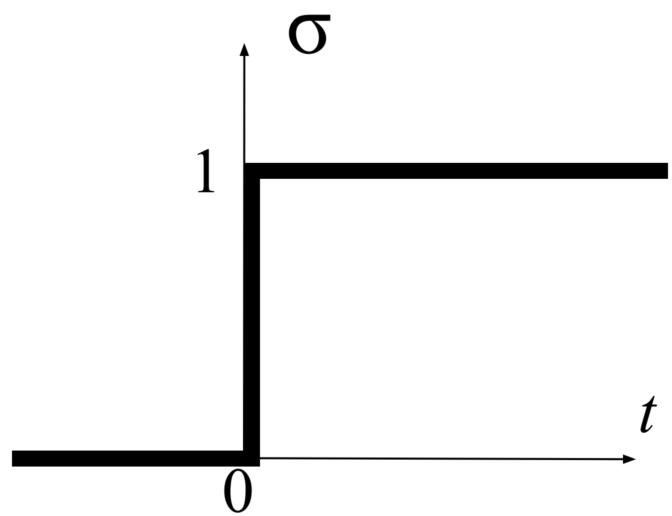
$$\delta(t)=\begin{cases}0, \text{ если } t\neq 0,\\ \infty, \text{ если } t=0,\end{cases} \qquad \int_a^b \delta(t)dt=\begin{cases}0, \text{ если } 0\notin[a,b],\\ 1, \text{ если } 0\in[a,b].\end{cases}$$



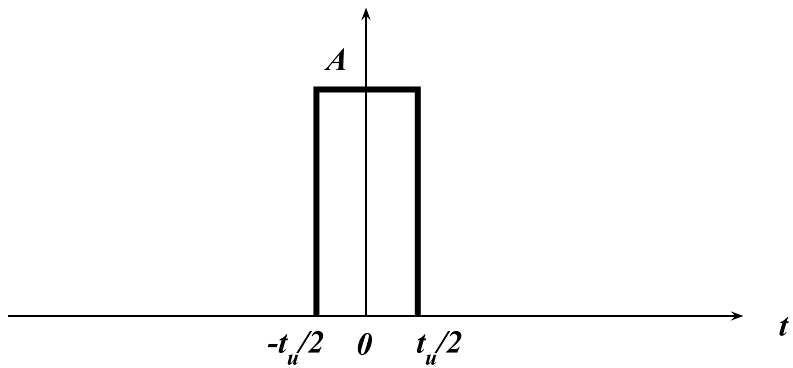
Функция единичного скачка

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0, \\ \infty, \text{ если } t \geq 0, \end{cases}$$

$$\int_a^b \delta(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \notin [a,b], \\ 1, \text{ если } 0 \in [a,b]. \end{cases}$$



Спектр прямоугольного импульса



$$S(\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin(\omega t_u / 2)$$