Лекция 2

Логические вентили

Цели и задачи

- Знакомство с основными элементами цифровых схем – логическими вентилями.
- Рассмотрим различные типы логических вентилей.
- Знакомство с базовыми функциями булевой алгебры

Базовые логические функции

- НЕ (NOT)
- И (AND)
- ИЛИ (OR)

Вентиль «НЕ»

Определение: операция НЕ выполняется над одной переменной, и ее результатом является логическое значение, противоположное исходному. Если А = 1, то НЕ А = 0, а если А = 0, то НЕ А = 1.

Графическое обозначение

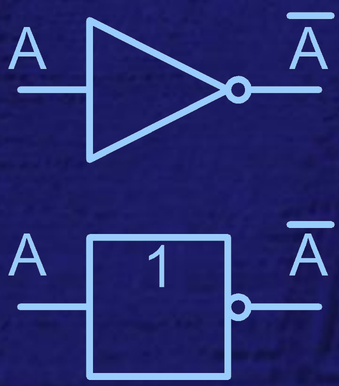


Таблица истинности

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Вентиль «И»

Определение: результат операции И, выполняемой над переменными А и В, равен 1, если А=1 «и» В=1; иначе результат равен 0.

Графическое обозначение

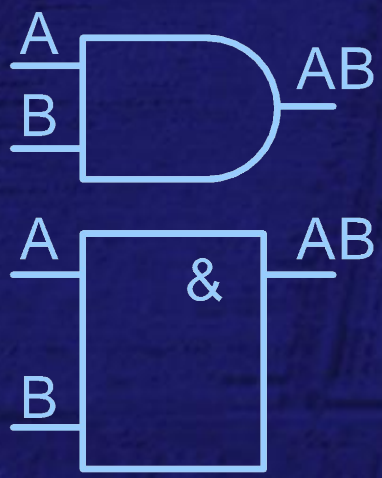


Таблица истинности

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Многовходовой вентиль «И»

Графическое обозначение

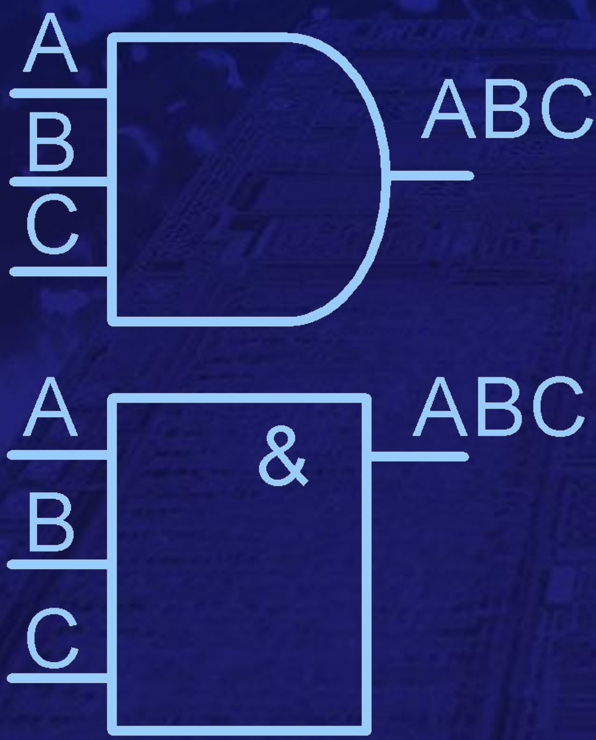


Таблица истинности

A	B	C	A·B·C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вентиль «ИЛИ»

<u>Определение</u>: результат операции ИЛИ, выполняемой над переменными A и B, равен 1, если A=1 «или» B=1, либо они обе равны 1; иначе результат равен 0.

Графическое обозначение

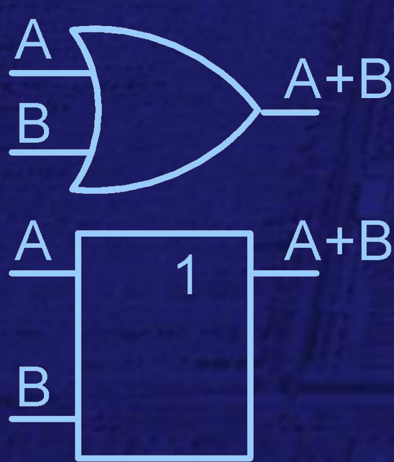


Таблица истинности

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Многовходовой вентиль «ИЛИ»

Графическое обозначение

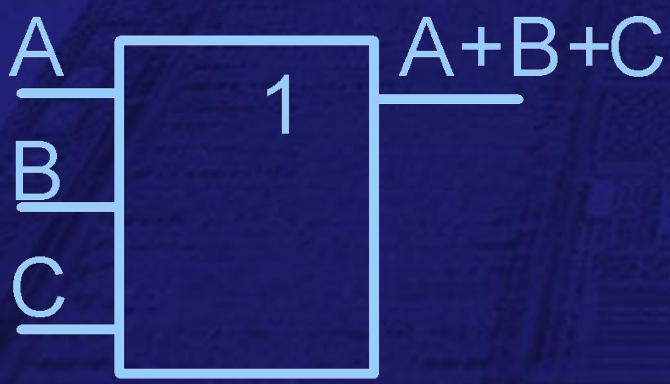


Таблица истинности

A	B	C	A+B+C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Упрощенные определения

- Если хотя бы один из входов вентиля «И» равен 0, то выход этого вентиля будет также равен 0, иначе 1.
- Если хотя бы один из входов вентиля «ИЛИ» равен 1, то выход этого вентиля будет также равен 1, иначе 0.

Булева алгебра

- Разработана математиком Булем в XIX веке.
- Использовалась для определения истинности или ложности утверждений.
- В цифровых схемах используется также, т.к. оперирует с двузначными сигналами.

Основные булевы тождества

$A \cdot 1 = A$ $\quad$ $A + 1 = 1$ $\quad$ $A \cdot \overline{A} = 0$

$A \cdot 0 = 0$ $\quad$ $A + 0 = A$ $\quad$ $A + \overline{A} = 1$

$A \cdot A = A$ $\quad$ $A + A = A$ $\quad$ $\overline{\overline{A}} = A$

Доказательство:

A	$\overline{A}$	$A \cdot 1$	$A \cdot 0$	$A \cdot A$	$A+1$	$A+0$	$A+A$	$A \cdot \overline{A}$	$A+\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1

Основные булевы тождества для нескольких переменных

$A \cdot B \cdot 1 = A \cdot B$ $\quad$ $A+B+1 = 1$

$A \cdot B \cdot 0 = 0$ $\quad$ $A+B+0 = A+B$

$A \cdot B \cdot A = A \cdot B$ $\quad$ $A+B+A = A+B$

$A \cdot B \cdot \overline{A} = 0$ $\quad$ $A+B+\overline{A} = 1$

Основные правила булевой алгебры

Закон коммутативности:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

Закон ассоциативности:

$$ABC = A(BC) = (AB)C$$

$$A+B+C = A+(B+C) = (A+B)+C$$

Основные правила булевой алгебры

Закон дистрибутивности:

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

$$A+(BC) = (A+B)(A+C)$$

!!! К арифметическому сложению Закон дистрибутивности неприменим:

$$A+(BC) \neq (A+B)(A+C)$$

Положительная и отрицательная логика

Положительная:	Отрицательная:
лог. 1 +5 В **лог. 0 0 В**	**лог. 1 0 В** **лог. 0 +5 В**

- Как изменятся таблицы истинности операций «И», «ИЛИ», «НЕ» для положительной и отрицательной логик?

Дуальные функции

- В положительной логике:

$$f = A + B\overline{C}$$

- В отрицательной логике:

$$f = A(B + \overline{C})$$

$$f = f\ (A, B, C, \ldots, \cdot, +, \overline{\ }, 0, 1)$$

$$f^{Д} = f\ (A, B, C, \ldots, +, \cdot, \overline{\ }, 1, 0)$$

Принцип дуализма

- Если есть доказанное равенство:

  $f\ (A,B,C,\ldots,\cdot,+,0,1) = g\ (A,B,C,\ldots,\cdot,+,0,1)$

- Тогда справедливо и дуальное ему равенство:

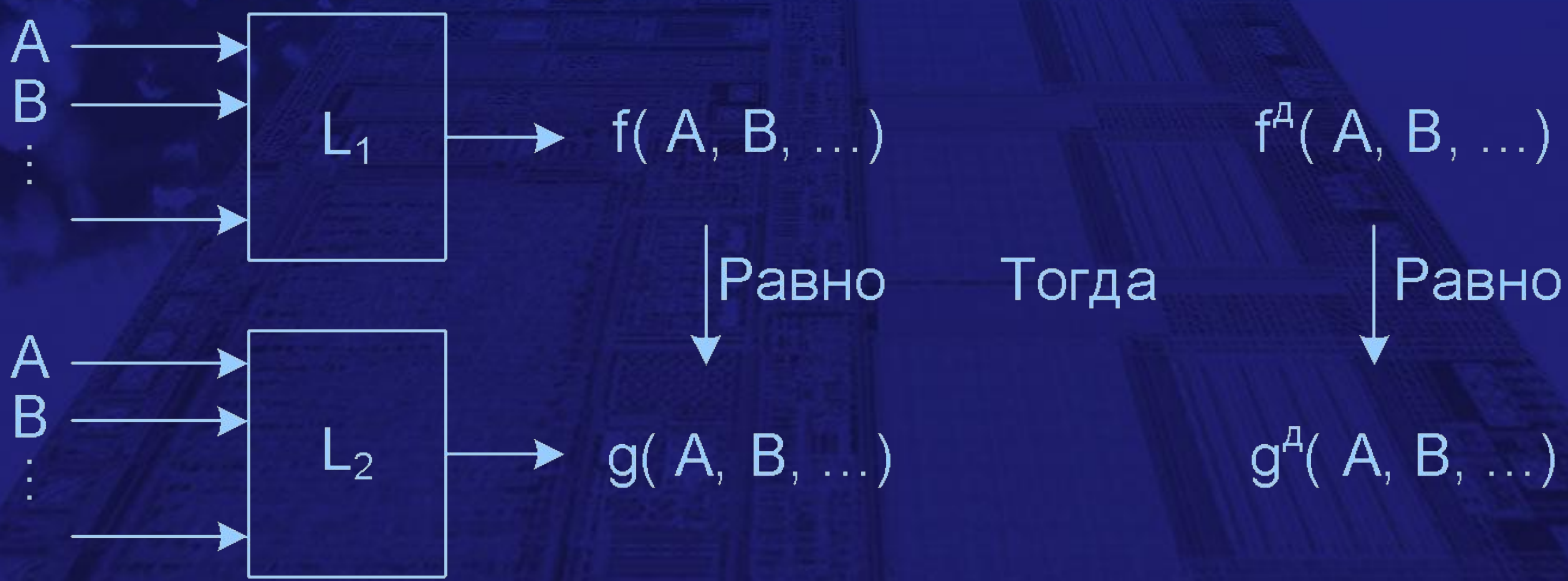
  $f^{д}\ (A,B,C,\ldots,\cdot,+,0,1) = g^{д}\ (A,B,C,\ldots,\cdot,+,0,1)$

- Чтобы получить дуальное равенство необходимо заменить:
  - «И» на «ИЛИ», «ИЛИ» на «И»
  - «0» на «1», «1» на «0»

Принцип дуализма

Представление в системе с положительной логикой

Представление в системе с отрицательной логикой



Теорема де Моргана

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$$

$$\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A + B}$$

Доказательство теоремы де Моргана:

A	B	A+B	AB	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A+B}$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Теорема де Моргана для 3-х и более переменных

$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC} \qquad \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A+B+C}$$

$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots=\overline{ABC\ldots} \qquad \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\ldots=\overline{A+B+C+\ldots}$$

$$f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots, +, \cdot) = \overline{f}(A, B, C, \ldots, \cdot, +)$$

$$f(A, B, C, \ldots, +, \cdot) = \overline{f}(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots, \cdot, +)$$

Вентиль «И-НЕ», NAND

Графическое обозначение

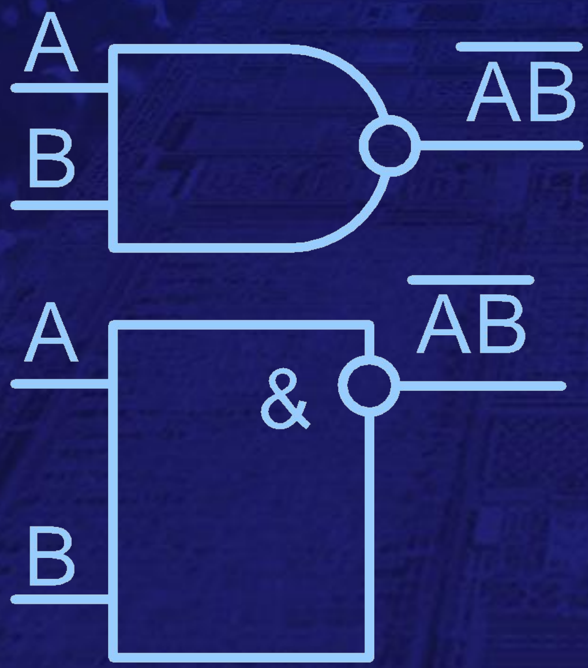


Таблица истинности

A	B	$\overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Вентиль «ИЛИ-НЕ», NOR

Графическое обозначение

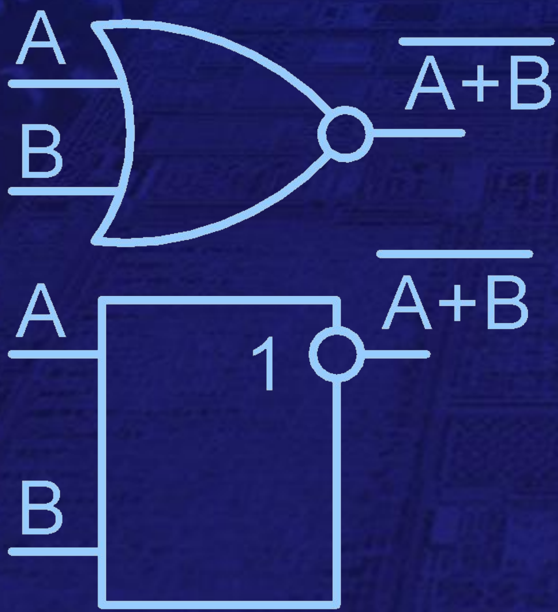


Таблица истинности

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Универсальные вентили «И-НЕ», «ИЛИ-НЕ»

И-НЕ	НЕ	$\overline{A} = \overline{AA}$
	И	$AB = \overline{\overline{AB}} = \overline{(\overline{AB})(\overline{AB})}$
	ИЛИ	$A + B = \overline{\overline{A}\,\overline{B}} = \overline{(\overline{AA})(\overline{BB})}$
ИЛИ-НЕ	НЕ	$\overline{A} = \overline{A + A}$
	И	$AB = \overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{(\overline{A+A})+(\overline{B+B})}$
	ИЛИ	$A+B = \overline{\overline{A+B}} = \overline{(\overline{A+B})+(\overline{A+B})}$

Дуализм операторов «И-НЕ», «ИЛИ-НЕ»

И-НЕ			ИЛИ-НЕ		
входы		выход	входы		выход
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

Вентиль «Исключающее ИЛИ»

Определение: результат операции исключающее ИЛИ (Exclusive OR), выполняемой над двумя переменными A и B, равен 0, если A=B, иначе результат равен 1.

$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

Графическое обозначение

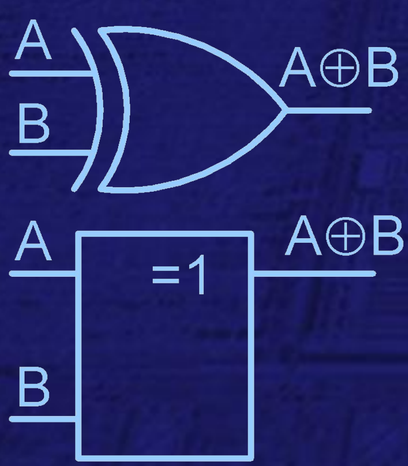


Таблица истинности

A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Вентиль «Исключающее ИЛИ-НЕ»

Определение: результат операции исключающее ИЛИ-НЕ (Exclusive NOR), выполняемой над двумя переменными A и B, равен 1, если A=B, иначе результат равен 0.

$$\overline{(A \oplus B)} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

Графическое обозначение

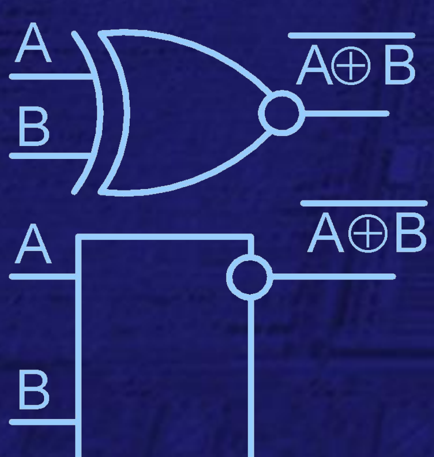


Таблица истинности

A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Коммутативные функции

A	B	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

F_1 – операция И
F_6 – операция исключающее ИЛИ
F_7 – операция ИЛИ
F_8 – операция ИЛИ-НЕ
F_9 – операция исключающее ИЛИ-НЕ
F_{14} – операция И-НЕ

Итоги:

В ходе лекции изучены:

- Базовые логические функции и вентили: И, ИЛИ, НЕ
- Основные тождества и правила булевой алгебры.
- Положительная и отрицательная логика.
- Принцип дуализма логических функций и правило де Моргана.
- Универсальные вентили: И-НЕ, ИЛИ-НЕ
- Функции «Исключающего ИЛИ» и «Исключающего ИЛИ-НЕ»
- Полный набор логических функция для двух переменных.