

Лекция 6

Проектирование комбинационных схем

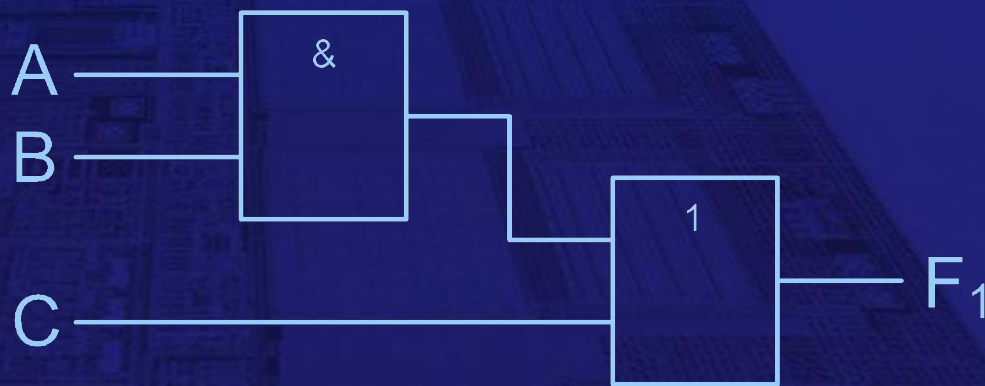
Цели и задачи

- Применение ранее изученных знаний:
 - булева алгебра,
 - логические вентилидля проектирования несложных комбинационных схем.
- Минимизация (упрощение) комбинационных схем с помощью упрощения логических выражений и карт Карно

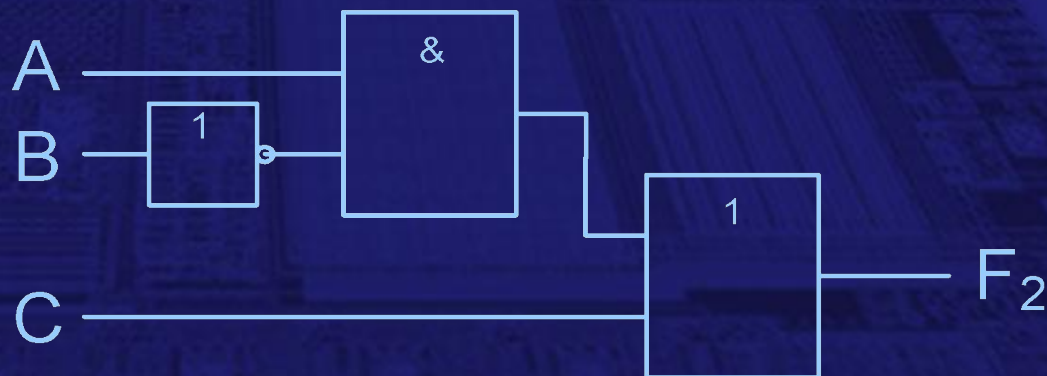
Комбинационные схемы

- Любую комбинационную схему можно представить в виде выражения булевой алгебры и наоборот:

- $F_1 = A + BC$



- $F_2 = A + \bar{B}C$



Комбинационные схемы

A	B	C	AB + C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F_1 = A + BC = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

Запись логических выражений

$$F = A\bar{B} + \bar{A}B\bar{C} + AC$$

ABC	out	минтерм	макстерм
0 0 0	1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A+B+\bar{C}$
0 0 1	0	$A\bar{B}C$	$A+B+\bar{C}$
0 1 0	1	$AB\bar{C}$	$A+B+\bar{C}$
0 1 1	1	ABC	$A+B+\bar{C}$
1 0 0	0	$A\bar{B}C$	$A+B+C$
1 0 1	1	ABC	$A+B+C$
1 1 0	0	ABC	$A+B+C$
1 1 1	0	ABC	$A+B+C$

Дизъюнктивная форма записи логических выражений

$$F(A, B, C) = A\bar{B} + \bar{A}B\bar{C} + AC$$

$$F(A, B, C) = \underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + \underbrace{\bar{A}B\bar{C}} + \underbrace{\bar{A}BC} + \underbrace{ABC} =$$
$$= \Sigma(0, 2, 3, 5)$$

ДИЗЪЮНКЦИЯ

(сумма произведений, sum-of-products)

Дизъюнктивная форма записи логических выражений

Дизъюнктивная нормальная форма
(ДНФ):

$$F(A, B, C) = A\bar{B} + \bar{A}B\bar{C} + AC$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма (СДНФ):

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$$

Дизъюнктивная форма записи логических выражений

$$F(A, B, C) = (\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B})(A + C)$$

$F(A, B, C) =$ макстермы

$= (\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B})(A + C) =$

$= \Pi(2, 5, 6)$ конъюнкция
(произведение сумм, product-of-sums)

Конъюнктивная форма записи логических выражений

Конъюнктивная нормальная форма
(КНФ):

$$F(A, B, C) = (\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B})(A + C)$$

Совершенная конъюнктивная
нормальная форма (СКНФ):

$$F(A, B, C) = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(A + B + \bar{C})$$

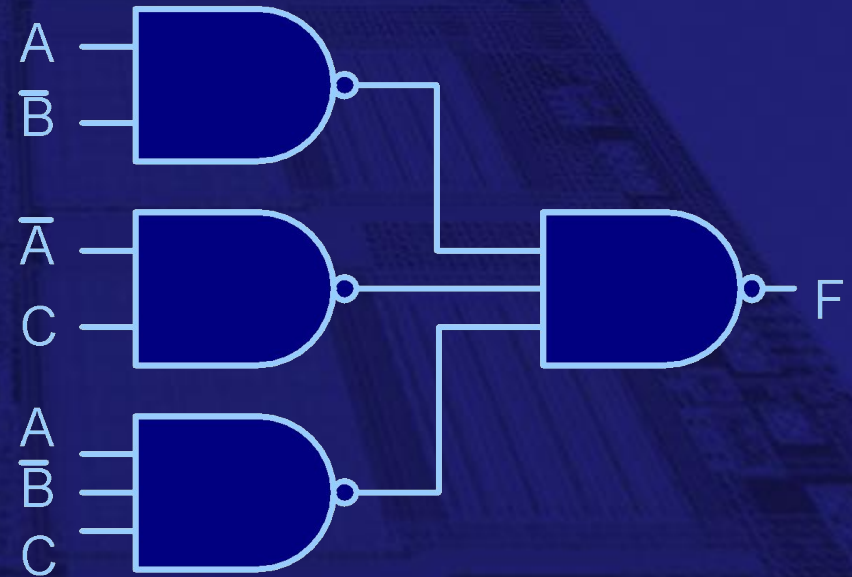
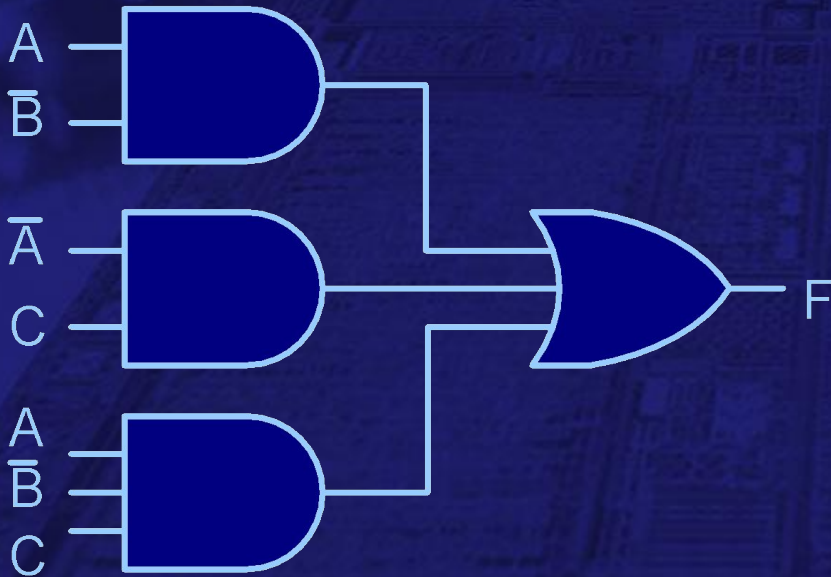
Пример перехода от ДНФ к СДНФ

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= A\bar{B} + \bar{A}C + A\bar{B}C = \\ &= A\bar{B}(A + \bar{A}) + \bar{A}C(B + \bar{B}) + A\bar{B}C = \\ &= A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C = \\ &= A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \end{aligned}$$

Применение правила де Моргана

$$F(A, B, C) = A\bar{B} + \bar{A}C + A\bar{B}C =$$

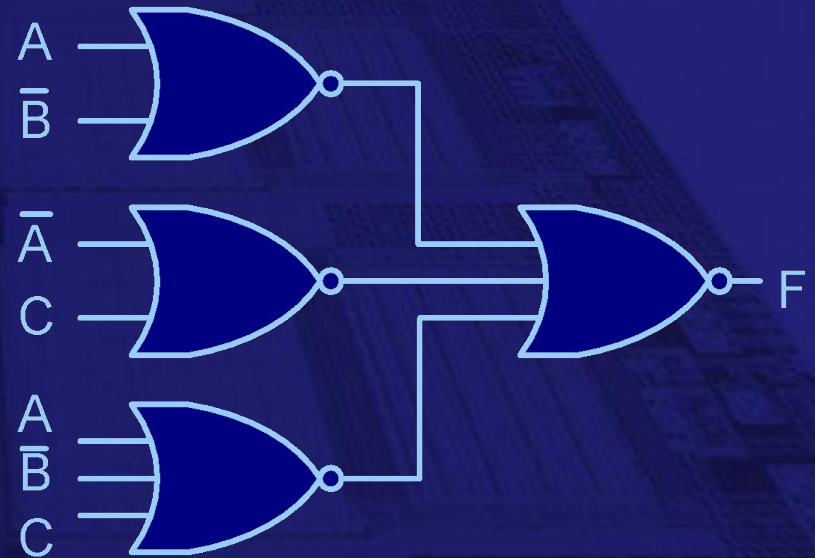
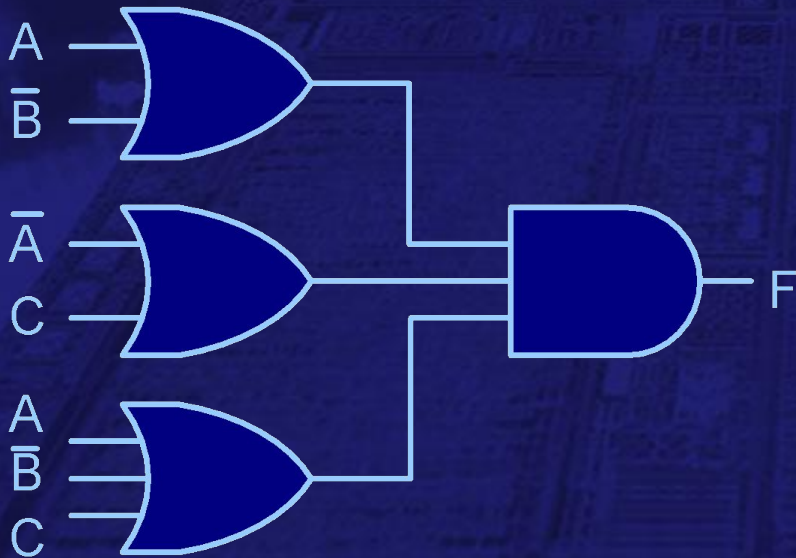
$$= \overline{\overline{A\bar{B} + \bar{A}C + A\bar{B}C}} = \overline{(\overline{A\bar{B}})(\overline{\bar{A}C})(\overline{A\bar{B}C})}$$



Применение правила де Моргана

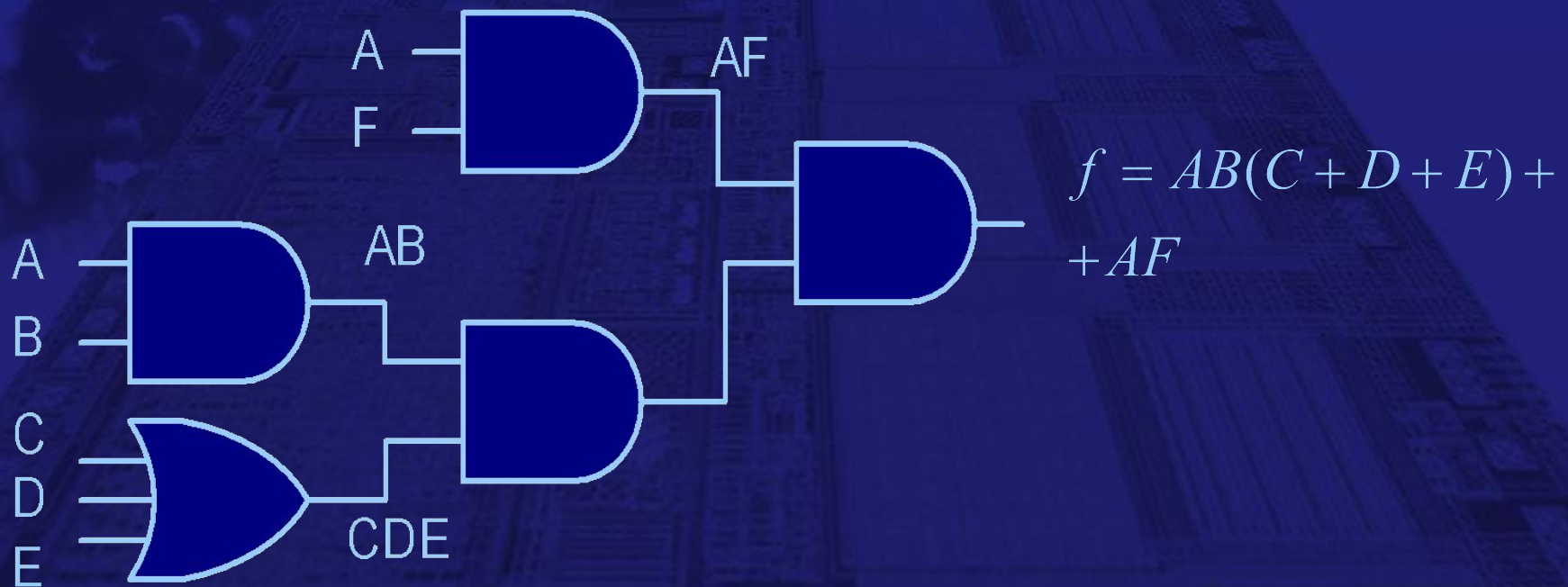
$$F(A, B, C) = (A + \bar{B})(\bar{A} + C)(A\bar{B}C) =$$

$$= \overline{\overline{(A + \bar{B})(\bar{A} + C)(A\bar{B}C)}} = \overline{\overline{(A + \bar{B})} + \overline{\overline{(\bar{A} + C)}} + \overline{\overline{(A + \bar{B} + C)}}}$$



Многоуровневые схемы

$$f = ABC + ABD + ABE + AF = \\ = AB(C + D + E) + AF$$



Алгебраическое упрощение булевых выражений

- Группировка членов с последующим применением тождеств
- Приведение выражения в каноническую форму с последующим упрощением
- Использование теоремы де Моргана

Группировка членов

- Закон ассоциативности.
- Сокращение выражений за счет использования тождеств.
- Один член можно использовать для группирования несколько раз.

- $A + \bar{A}B = A + B$

- Теорема о непротиворечивости (Consensus Theorem):

- $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}B$

- $(A + B)(\bar{A} + C)(B + C) = (A + B)(\bar{A} + B)$

Группировка членов

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= A + A\bar{C} + ABC = \\ &= A(1 + \bar{C} + BC) = A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= A + \bar{B} + \bar{A}BCD = \\ &= (A + \bar{A}BCD) + \bar{B} = \\ &= A + (BCD + \bar{B}) = A + CD + \bar{B}. \end{aligned}$$

Приведение в СДНФ или СКНФ

- Умножение на множители типа $(A + \bar{A})$
- Перегруппировка с целью получения упрощенного выражения
- Для упрощения выражений в **КОНЪЮНКТИВНОЙ** форме необходимо преобразовать по теореме де Моргана, получить инверсную дизъюнктивную функцию – упростить ее по известным правилам.

Приведение в СДНФ или СКНФ

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= A\bar{B} + AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC = \\ &= A\bar{B}(C + \bar{C}) + AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC = \\ &= \underset{1}{A\bar{B}C} + \underset{2}{A\bar{B}\bar{C}} + \underset{3}{AB\bar{C}} + \underset{4}{\bar{A}B\bar{C}} + \underset{5}{\bar{A}BC} = \\ &= \underset{1u2}{A\bar{B}(C + \bar{C})} + \underset{2u3}{A\bar{C}(B + \bar{B})} + \underset{3u4}{\bar{A}B(C + \bar{C})} = \\ &= A\bar{B} + A\bar{C} + \bar{A}B. \end{aligned}$$

Использование теоремы де Моргана

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= \overline{(ABD + B\bar{C}D)}\bar{B}C + \bar{A}C = \\ &= \overline{(ABD + B\bar{C}D)\bar{B}C}(\bar{A}C) = \overline{(ABD + B\bar{C}D) + \bar{B}C}(A + \bar{C}) = \\ &= \overline{(\bar{A}B\bar{D})(B\bar{C}D) + \bar{B} + C}(A + \bar{C}) = \\ &= \overline{(\bar{A} + \bar{B} + \bar{D})(B\bar{C}D) + \bar{B} + C}(A + \bar{C}) = \\ &= \overline{\bar{A}B\bar{C}D + B + \bar{C}}(A + \bar{C}) = \\ &= AB + A\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}D + B\bar{C} + \bar{C} = \\ &= AB + \bar{C}(A + \bar{A}B\bar{C} + B + 1) = AB + \bar{C}. \end{aligned}$$

Минимизация логических функций с помощью карт Карно

		BC			
		00	01	11	10
A	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
	1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

Diagram illustrating the minimization of logical functions using a Karnaugh map. The map is a 2x4 grid with variables A, B, and C. The columns are labeled BC (00, 01, 11, 10) and the rows are labeled A (0, 1). The cells contain the corresponding minterms. Brackets indicate the grouping of variables: A is grouped vertically, BC is grouped horizontally, and C is grouped horizontally.

- Код Грея: 00, 01, 11, 10

Минимизация логических функций с помощью карт Карно

		B			
		00	01	11	10
A	C	00	01	11	10
	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$	

- Альтернативный способ обозначения клеток карты Карно

Представление логической функции с помощью карты Карно

$$f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$$

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	0	1	0
	1	0	1	0	0

Алгоритм минимизации логических функций с помощью карт Карно

- Заполнить карту Карно.
- Объединить все рядом лежащие «1»-цы в группы (кубы) наибольшего размера. Размер куба может быть только 2^n , где $n=0,1,2,3,\dots$
- Записать все новые минтермы, соответствующие выделенным группам (кубам).
- Записать минимизированную функцию равную логической сумме полученных минтермов.

Порядок заполнения карт Карно

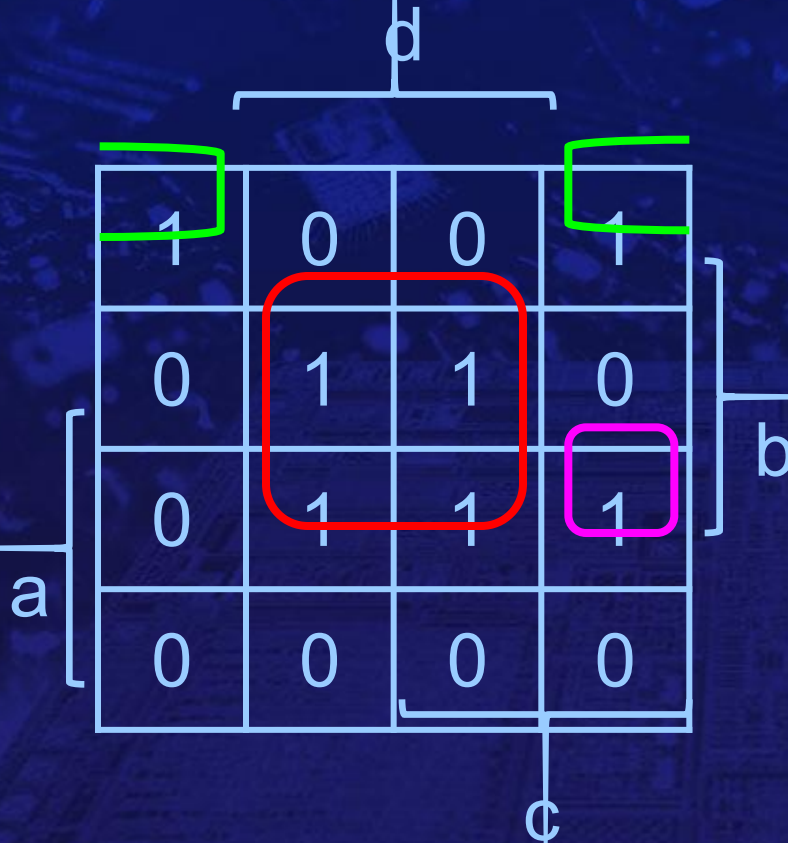
		c		
	0	1	3	2
	000	001	011	010
a	4	5	7	6
	100	101	111	110

Карта Карно для
логической
функции с 3-мя
переменными
(A,B,C)

Карта Карно для
логической функции
с 4-мя переменными
(A,B,C,D)

		d		
	0	1	3	2
	0000	0001	0011	0010
	4	5	7	6
	0100	0101	0111	0110
a	12	13	15	14
	1100	1101	1111	1110
	8	9	11	10
	1000	1001	1011	1010
		c		

С какой целью группируются «1»?

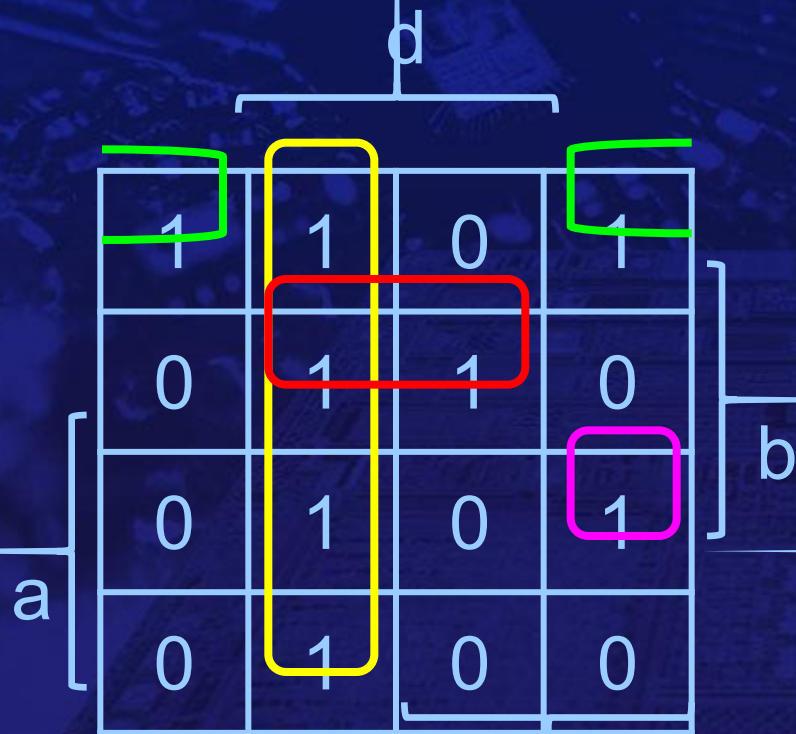


$ABC\bar{D}$

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} &= \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{D}(C + \bar{C}) = \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{D} \end{aligned}$$

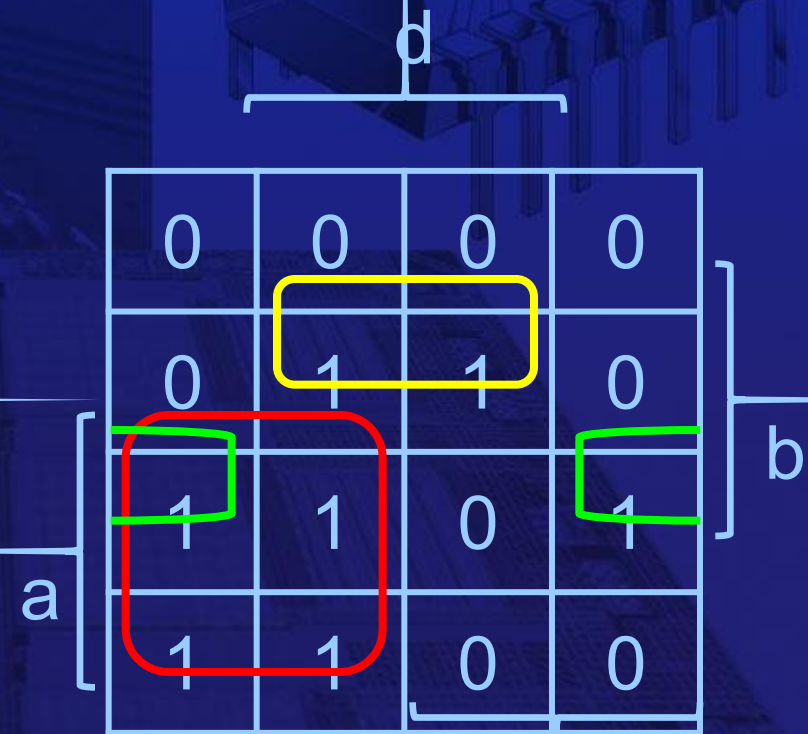
$$\begin{aligned} \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD &= \\ B\bar{C}D(A + \bar{A}) + BCD(A + \bar{A}) &= B\bar{C}D + BCD = \\ &= BD(C + \bar{C}) = BD \end{aligned}$$

Примеры заполнения и группирования карт Карно

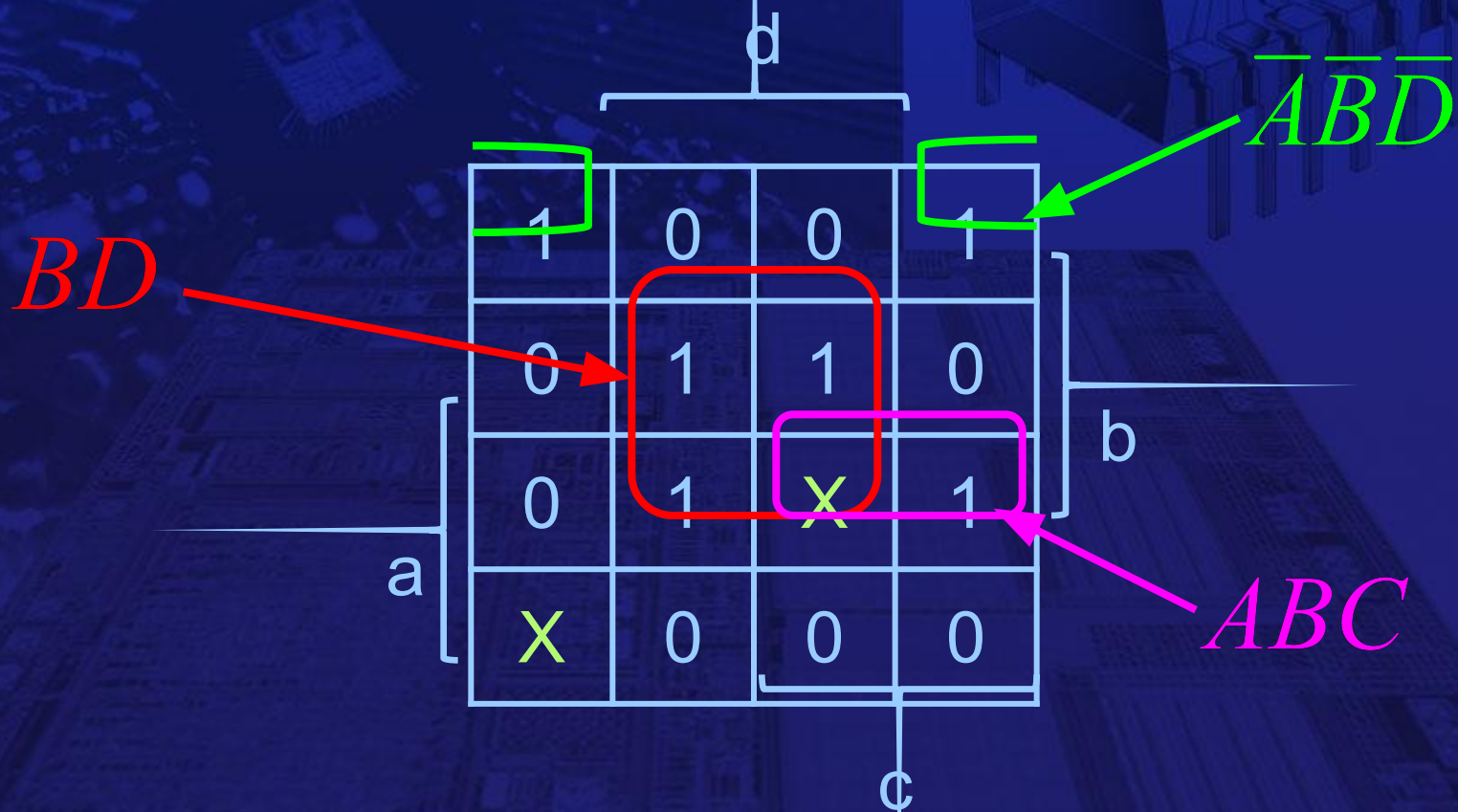


$$f_1(A, B, C, D) = \bar{C}D + \bar{A}BD + ABC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{D}$$

$$f_2(A, B, C, D) = \bar{A}BD + A\bar{C} + AB\bar{D}$$



Неполно заданные функции

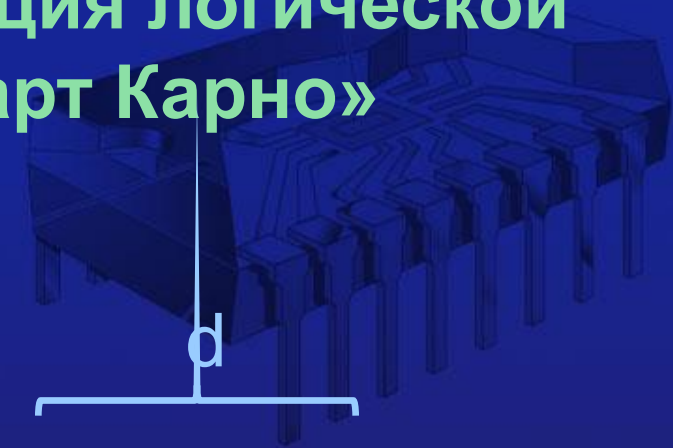


$$f_1(A, B, C, D) = BD + ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{D}$$

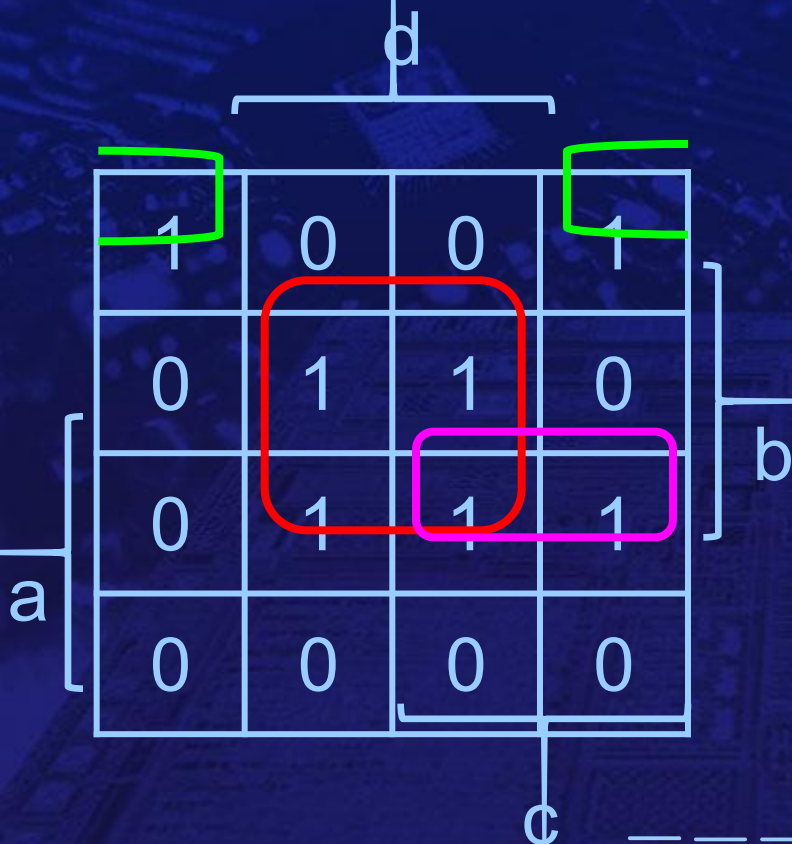
Решение задачи «Минимизация логической функции с помощью карт Карно»

A	B	C	D	Out
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0



Решение задачи «Минимизация логической функции с помощью карт Карно»



$$F_1 = ABC$$

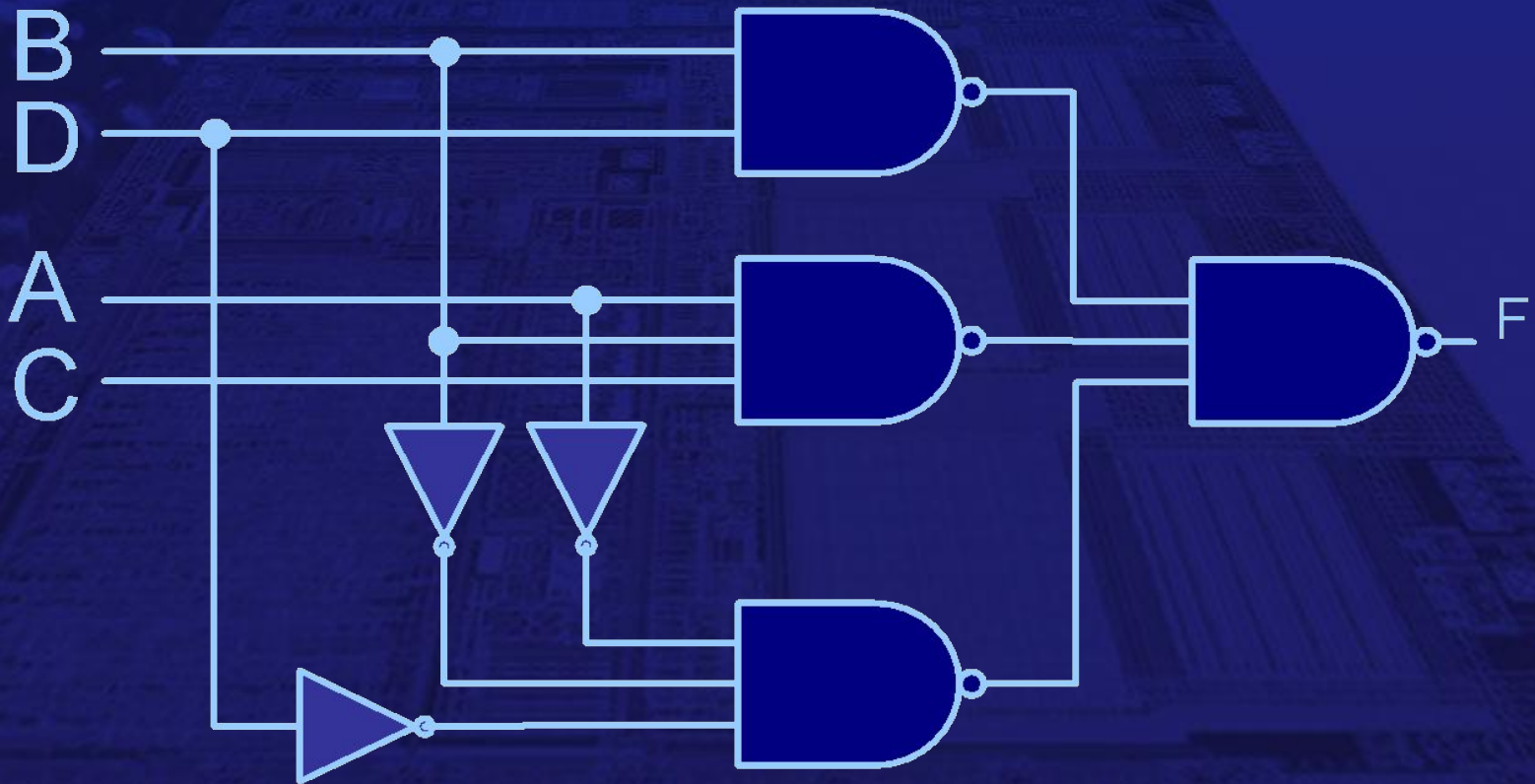
$$F_2 = \bar{A}\bar{B}\bar{D}$$

$$F_3 = BD$$

$$F = BD + ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{D} = \overline{\overline{BD + ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{D}}} = \overline{(\overline{BD}) \cdot (\overline{ABC}) \cdot (\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{D}})}$$

Решение задачи «Минимизация логической функции с помощью карт Карно»

$$F = \overline{(BD)} \cdot \overline{(ABC)} \cdot \overline{(\overline{A}\overline{B}\overline{D})}$$



Итоги:

В ходе лекции изучены:

- Представление логических функций в виде:
 - выражений булевой алгебры
 - логических схем
 - карт Карно
- Упрощение булевых выражений
 - с использованием алгебраических методов
 - с использованием карт Карно

