ГИДРОДИНАМИКА

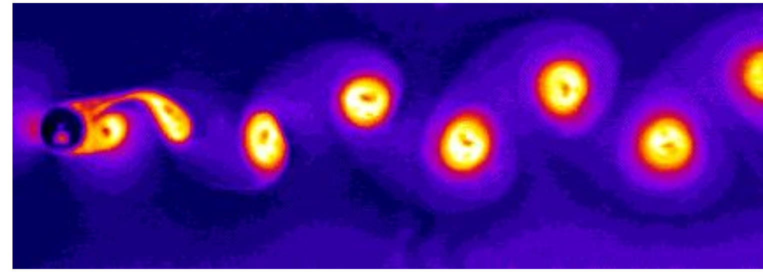
КУРС ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «НАНОТЕХНОЛОГИЯ И НАНОМАТЕРИАЛЫ»

Проф. А.С. Дмитриев

Центр высоких технологий и кафедра низких температур МЭИ

«Экономить можно на всем, кроме фундамента…»

ВВЕДЕНИЕ



Гидродинамика – наука о поведении жидкостей в различных условиях. Основные проблемы гидродинамики – изучение течений в природных, технологических и иных системах, получение комплекса данных о различных гидродинамических процессах, создание математических моделей течений и предсказание новых физических закономерностей при течении сплошных сред.

Они создали основы гидродинамики!!!

Классификация жидкостей

- **Жидкости**
  - несжимаемые
  - сжимаемые
  - **Классические жидкости**
    - идеальные жидкости
    - вязкие жидкости
    - жидкости сложной реологии
  - **Квантовые жидкости**
    - **Бозе-жидкости**
      - Нормальные (например, He I)
      - Сверхтекучие (например, He II)
    - **Ферми-жидкости**
      - Нормальные (электронная жидкость в металле при $T>T_c$)
      - Сверхпроводящие (электронная жидкость в металле при $T<T_c$)

Параметр взаимодействия

$$\alpha = U / K \geq 1$$

Модели гидродинамики классических жидкостей

***Идеальная жидкость*:** пренебрегается всеми процессами релаксации – вязкостью, теплопроводностью и т.д.

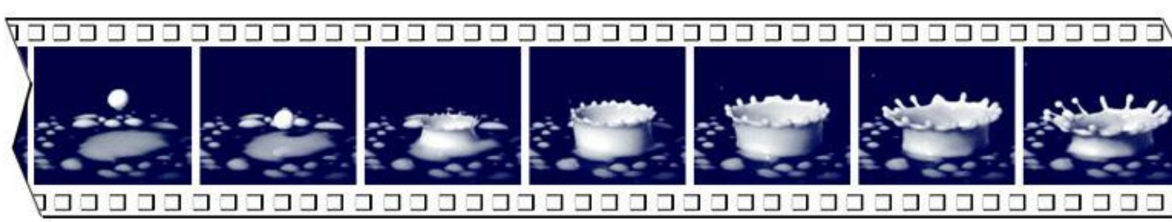
Вязкая жидкость: пренебрегается всеми процессами релаксации, кроме вязкости

- линейная вязкость жидкость – закон
- нелинейная вязкость

Вязкая теплопроводная жидкость: пренебрегается всеми процессами релаксации, кроме вязкости и теплопроводности

Последовательное усложнение моделей – нормальный процесс исследования природы

Но необходим *принцип (бритва) Окама* «не вводите сущностей без необходимости»



1. Гидродинамика идеальной жидкости

Идеальная жидкость: пренебрегается всеми процессами диссипации – вязкостью, теплопроводностью и т.д.

Отсутствие диссипации энергии в жидкости означает, что нет теплопереноса как между отдельными частями жидкости, так и между жидкостью и окружающей средой. Это в свою очередь означает, что движение происходит *адиабатически* в каждой части жидкости.

Адиабатичность означает, что энтропия каждой части жидкости остается постоянной при движении этой части:

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

Если в начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках, то она сохраняется во все последующие моменты времени во всех точках, так что можно записать:

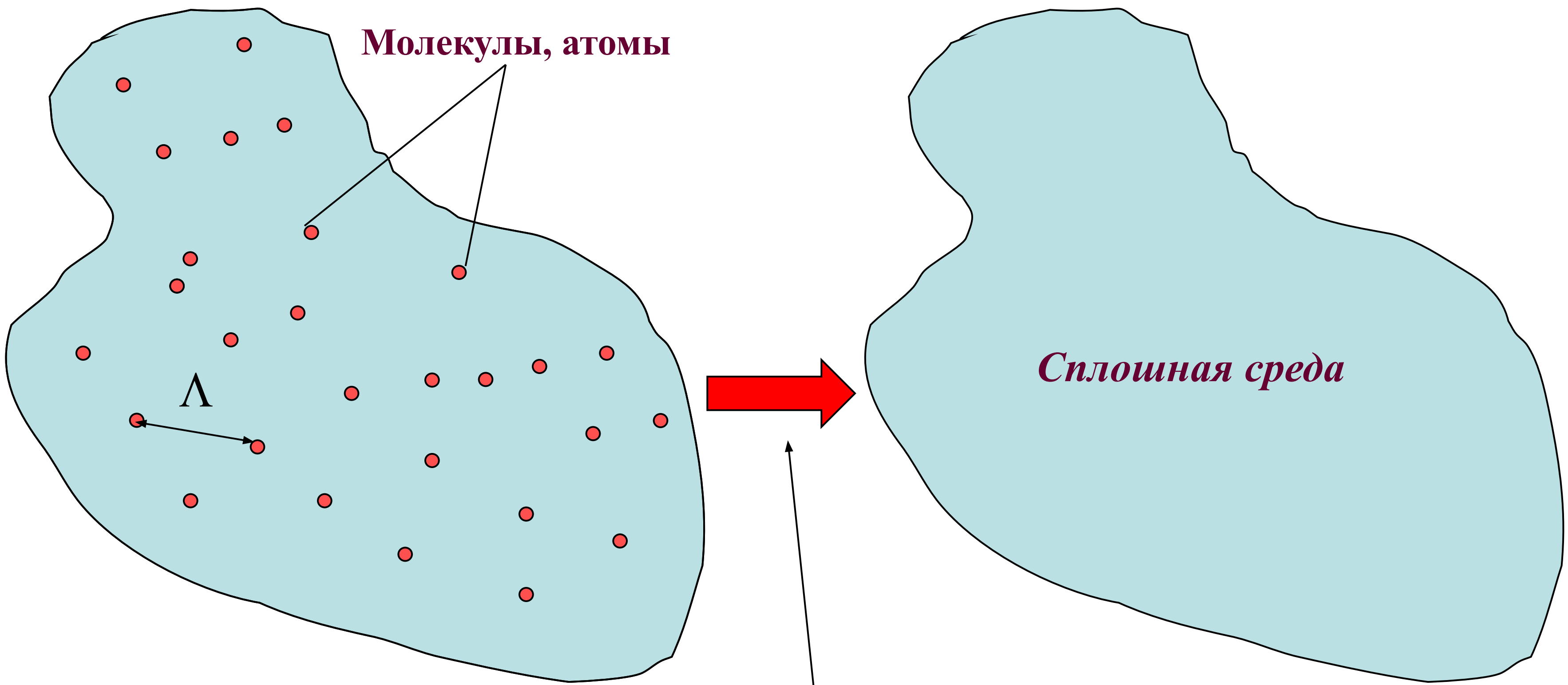
$$s=const$$

Такое движение жидкости носит название *изоэнтропийного.*

1. Общие положения гидродинамики и ее модели

1.1 Модель – сплошная среда

$$L >> \Lambda \; (L - \text{характерный масштаб системы})$$



Λ - длина свободного пробега

Усреднение по физически бесконечно малому объему

1.2. Описание динамики – поля плотности, давления и скорости (гидродинамика)

От координат и скоростей отдельных частиц (атомов, молекул, …) – переход к макроскопическим параметрам – скорости, давлению, плотности и т.п. сплошной среды

$$\rho(\vec{r},t),\ p(\vec{r},t),\ \vec{\mathrm{v}}(\vec{r},t)$$

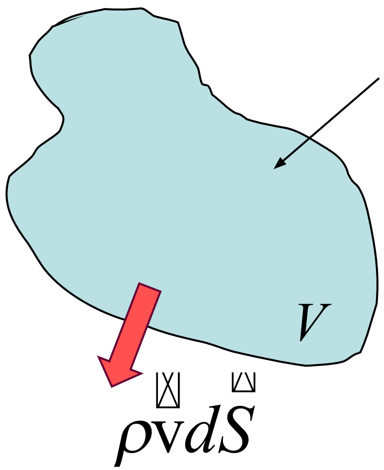
Всего пять величин – функций точки пространства и времени (три компоненты скорости, плотность и давление) описываю полностью состояние в гидродинамике

1.3. Описание термодинамики – уравнения, связывающие термодинамические параметры (например, плотность, давление и температуру)

$$\rho = \rho(p,T)$$

2. Гидродинамика идеальной жидкости

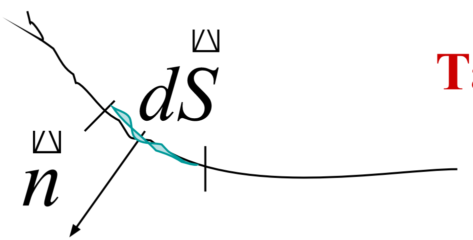
2.1. Закон сохранения массы – уравнение неразрывности



$$m = \int \rho dV \qquad \frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho dS$$

Уравнение баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint\limits_{S} \rho\vec{v}d\vec{S} = \int\limits_{V} \mathrm{div}(\rho\vec{v})dV$$



Таким образом:

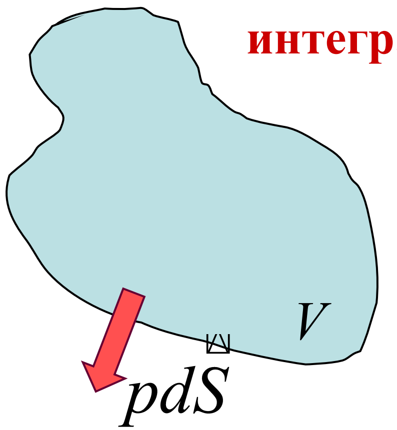
$$\int\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\vec{v}\right)dV = 0$$

Откуда:

★ $$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\vec{v} = 0}$$

- уравнение неразрывности (непрерывности)

2.2. Закон сохранения импульса – уравнение Эйлера



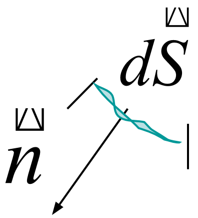
Полная сила, действующая на некоторый объем V есть интеграл:

$$\vec{F} = -\oint_S p\,d\vec{S} = -\int_V \nabla p\,dV$$

Леонард Эйлер
1707 - 1783

Таким образом, сила, действующая на некоторый объем dV есть

$$dV \nabla p$$



Таким образом, изменение импульса элемента объема жидкости есть:

$$\rho \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = -\nabla p$$

Полная производная в уравнении относится к перемещаемому объему жидкости, а не к точке. Переход к изменению скорости в точке можно произвести введением конвективной производной:

$$\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}\nabla)\vec{\mathrm{v}}$$

Отсюда получаем:

$$\bigstar\bigstar\quad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

-уравнение движения (закон сохранения импульса), *<u>уравнение Эйлера</u>*, 1755г.

Леонард Эйлер 1707 - 1783

Если жидкость находится в поле других объемных сил, то имеем:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right]=-\nabla p+\vec{F}$$

В частности, если жидкость находится в поле сил тяжести $\vec{F}=\rho\vec{g}$ **:**

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right]=-\nabla p+\vec{g}$$

Или:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}=-\frac{\nabla \mathrm{p}}{\rho}+\vec{g}$$

Уравнения идеальной жидкости содержат пять скалярных функций:

- **три компоненты скорости;**
- **плотность;**
- **давление.**

Таким образом, эти пять скалярных функций должны определяться из уравнения неразрывности, уравнения движения (Эйлера) и условия адиабатичности.

Уравнения требуют для своего однозначного разрешения граничных условий. Для идеальной жидкости единственным условием является невозможность движения перпендикулярно границам, что приводит к граничному условию на нормальную компоненту скорости жидкости:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{n}} = 0, \ \textit{если граница неподвижна};$$

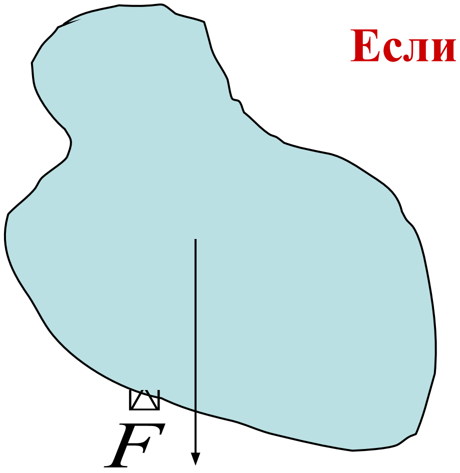
$$\mathrm{v}_{\mathrm{n}} = \mathrm{v}_{\Gamma}, \ \textit{если скорость границы равна} \ \mathrm{v}_{\Gamma}$$

Если имеются две несмешивающиеся жидкости (1 и 2), то на поверхности их раздела равны их нормальные компоненты скорости и выполняется равенство давлений:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{n1}} = \mathrm{v}_{\mathrm{n2}}$$

$$p_1 = p_2$$

2.3. Гидростатика



Если жидкость покоится, то из уравнения Эйлера следует, что

$$\nabla p = \vec{F}$$

В однородном поле тяжести $\vec{F} = \rho \vec{g}$ Откуда:

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

Последнее уравнение описывает механическое равновесие жидкости в поле сил тяжести. Если внешние силы вообще отсутствуют, то

$$\nabla p = 0 \longrightarrow p = const$$

Задача 1: показать, что при $\rho = const$ давление в жидкости есть

$$p = -\rho g z + const$$

Задача 2: определить форму поверхности жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью

2.4. Стационарные течения, уравнение Бернулли

Важным случаем гидродинамических течений являются *стационарные* (установившиеся) течения. В таких течениях в каждой точке пространства скорость течения остается постоянной во времени. В этом случае $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$

Тогда:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Воспользуемся теперь изоэнтропийностью течений. В этом случае можно записать для тепловой функции (энтальпии):

$$dw = Tds + Vdp = Vdp \ (ds = 0)$$

Отсюда:

$$dw = Vdp = (1/\rho)dp \Longrightarrow (1/\rho)\nabla p = \nabla w$$

Поэтому:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla w$$

Используя соотношение векторного анализа:

$$(1/2)\nabla(v^2) = [\vec{v}, \mathrm{rot}\vec{v}] + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

ЦЕНТР ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Получаем:

$$\left[\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{v}\right] = \nabla(w + v^2/2)$$

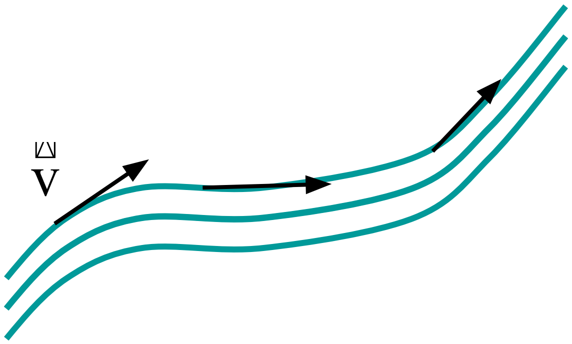
Откуда:

$$(1/2)\nabla(v^2) - \left[\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{v}\right] = -\nabla w$$

Даниил Бернулли

(1667-1748)

Введем понятие о линиях тока:



<u>Линии тока</u> – линии, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точке касания в данный момент времени – они определятся системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Если уравнение умножить на единичный вектор касательный к линии тока в каждой точке, то, поскольку градиент на некоторое направление равен производной, взятой по этому направлению, то (проекция $\left[\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{v}\right]$ равна нулю!)

$$(\partial / \partial \vec{l}\,)\left[v^2/2 + w\right] = 0$$

Отсюда следует, что

$$\frac{v^2}{2} + w = \mathrm{const}$$

Последнее уравнение носит название *уравнения Бернулли (1738г.)*

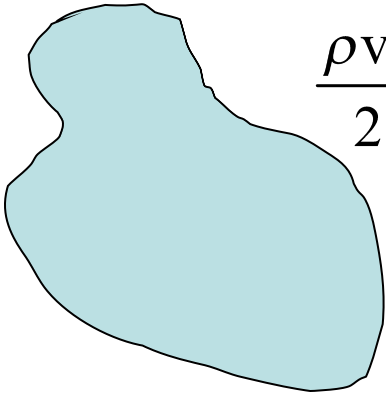
Если течение жидкости происходит в поле сил тяжести (сила тяжести действует вдоль направления z, то уравнение Бернулли будет иметь вид (задача: показать !):

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \mathrm{const}$$

Даниил Бернулли
(1667-1748)

2.5. Поток энергии

Вычислим изменение со временем энергию единичного объема жидкости



$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon$$ **- сумма кинетической и внутренней энергии жидкости**

Изменение со временем энергии есть:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$$

Используя уравнения неразрывности и движения, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2}div(\rho\vec{v}) - \vec{v}\nabla p - \rho\vec{v}(\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

Изменение внутренней энергии со временем можно найти из термодинамического соотношения:

$$d\varepsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Но энтальпия (тепловая функция) есть $w = e + p/r = pV$ **Откуда:**

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = wd\rho + \rho Tds$$

Отсюда можно записать (используя соотношение адиабатичности ds/dt=0):

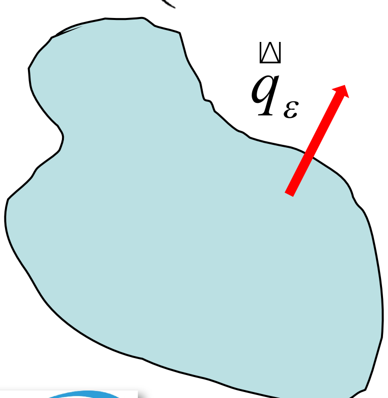
$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\,div(\rho\vec{v}) - \rho T\vec{v}\nabla s$$

Окончательно можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right) = -\left(w+\frac{v^2}{2}\right)div(\rho\vec{v}) - \rho(\vec{v}\nabla)\left(w+\frac{v^2}{2}\right) = -div\left[\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]$$

Проинтегрируем полученное выражение по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV = -\int_V div\left[\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]dV = -\oint_S \rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)d\vec{S}$$



$$\vec{q}_\varepsilon = \rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)$$ - ***<u>вектор плотности потока энергии</u>***

Абсолютная величина вектора плотности потока энергии есть количество энергии, протекающей в единицу времени через единичную поверхность, расположенную перпендикулярно к направлению скорости

Информация к размышлению:

Вектор потока энергии показывает, что каждая частица жидкости переносит при своем движении энергию $w+v^2/2$. Факт, что переносится не величина внутренней энергии, а тепловая функция связано со следующим обстоятельством. Если подставить $w=\varepsilon+p/\rho$

то полный поток энергии через замкнутую поверхность есть:

$$\vec{Q}_\varepsilon = -\oint_S \rho \vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)d\vec{S} - \oint_S p\vec{v}\,d\vec{S}$$

В этом выражении первый член есть энергия – кинетическая и внутренняя – непосредственно переносимая в единицу времени через поверхность, а второй член – работа, совершаемая силами давления над жидкостью, заключенной внутри поверхности

2.6. Поток импульса

Вычислим изменение со временем импульса $\vec{p} = \rho\vec{\mathrm{v}}$ единичного объема жидкости. Будем пользоваться тензорными обозначениями.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}} = \rho\frac{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}$$

Запишем уравнение неразрывности в форме $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\dfrac{\partial(\rho \mathrm{v}_k)}{\partial x_k}$

Уравнение Эйлера в форме $\dfrac{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{i}}}{\partial t} = -\mathrm{v}_k\dfrac{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{i}}}{\partial x_k} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$

Тогда получим

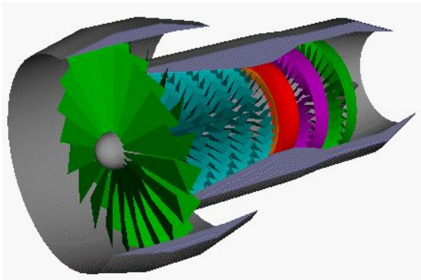
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}} = -\rho \mathrm{v}_{\mathrm{k}}\frac{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{i}}}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho \mathrm{v}_{\mathrm{k}})}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}}\mathrm{v}_{\mathrm{k}})$$

Можно записать

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}} = -\frac{\partial \Pi_{\mathrm{ik}}}{\partial x_k}$$



Тензор Π_{ik} определяется так:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}} \mathrm{v}_{\mathrm{k}}$$

Тензор Π_{ik} является симметричным, т.е.

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}} \mathrm{v}_{\mathrm{k}} = \Pi_{ki} = p\delta_{ki} + \rho \mathrm{v}_{\mathrm{k}} \mathrm{v}_{\mathrm{i}}$$

Чтобы выяснить физический смысл тензора Π_{ik}, проинтегрируем по некоторому объему:

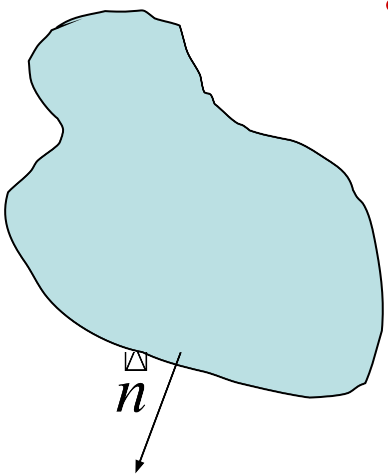
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}} dV = -\int_V \frac{\partial \Pi_{\mathrm{ik}}}{\partial x_k} dV = -\oint \Pi_{ik} dS_k$$

Слева стоит изменение в единицу времени i –компоненты импульса в объеме, а справа – количество импульса, протекающего в единицу времени через поверхность

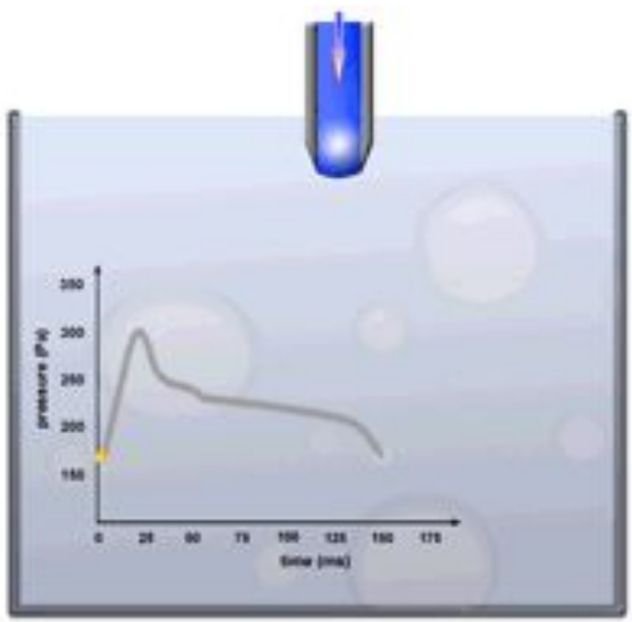
Комментарий:

- величина $\Pi_{ik} dS_k$ есть i – я компонента импульса, протекающего через элемент поверхности dS; записывая $dS_k = n_k dS$, то $\Pi_{ik} n_k$ - поток i – ой компоненты импульса, отнесенный к единице площади поверхности.;

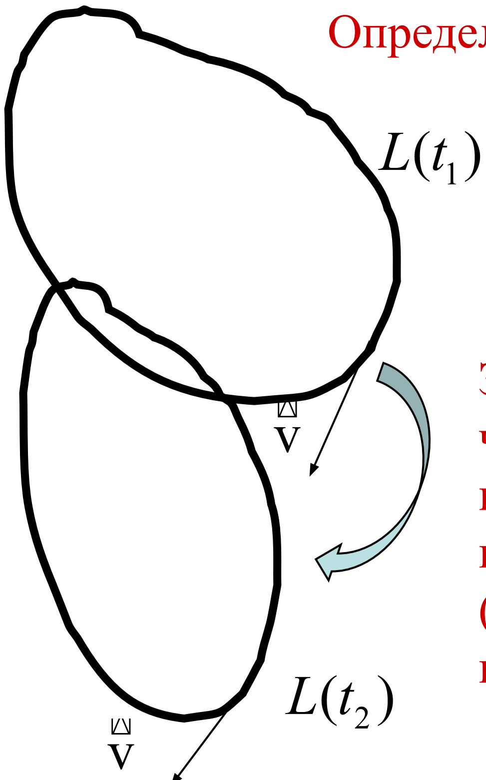
- $\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k$, величина Π_{ik} – **называют** ***<u>тензором плотности потока импульса;</u>***



- **Поток энергии (последняя – скалярная величина) – вектор, а поток импульса (последний – векторная величина) – тензор второго ранга;**



2.7. Сохранение циркуляции скорости



Определим интеграл вдоль замкнутого контура L

$$\Gamma = \oint\limits_L \vec{v}\,d\vec{l}$$

Назовем эту величину ***циркуляцией скорости*** вдоль контура

Замкнутый контур L будем считать «жидким» - состоящим из частиц жидкости. Поскольку частицы жидкости движутся, перемещается в жидкости и сам контур. Что происходит с циркуляцией скорости? Вычислим производную по времени (полная производная по времени означает, что изменение циркуляции скорости происходит в движущемся контуре:

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_L \vec{v}\,d\vec{l} = \oint\limits_L \frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} + \oint\limits_L \vec{v}\,\frac{dd\vec{r}}{dt} = \oint\limits_L \frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} + \oint\limits_L \vec{v}\,d\frac{d\vec{r}}{dt} = \oint\limits_L \frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} + \oint\limits_L \vec{v}\,\frac{dd\vec{r}}{dt} =$$

$$\oint\limits_L \frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} + \oint\limits_L \vec{v}\,d\vec{v} = \oint\limits_L \frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} + \underbrace{\cancel{\oint\limits_L d(v^2/2)}}_{=0} = \oint\limits_L \frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r}$$

Интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала!

Таким образом, поскольку из уравнения движения

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla w$$

то применяя теорему Стокса (поскольку $rot\nabla w = 0$), имеем:

$$\oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int rot\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) dS = 0$$

Откуда окончательно находим:

$$\frac{d}{dt}\oint_L \vec{v}\, d\vec{l} = 0$$

Или, окончательно:

$$\oint_L \vec{v}\, d\vec{l} = const$$

Таким образом, в идеальной жидкости циркуляция скорости вдоль замкнутого жидкого контура остается неизменной во времени (***<u>теорема Томсона</u>***, 1869) – ***<u>закон сохранения циркуляции скорости</u>***

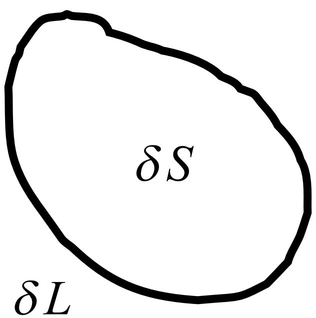
ТОМСОН (Thomson) лорд КЕЛЬВИН

1824- 1907 гг.

Теорема Томсона получена на основе использования уравнения Эйлера, т.е. на базе использования предположения об изоэнтропичности движения жидкости. Действительно, необходима однозначная связь между p и ρ. При изоэнтропическом движении эта связь определяется соотношением:

$$s = s(p, \rho)$$

Если такой связи нет, то вектор $-\nabla p/\rho$ может быть записан в виде градиента некоторой функции, что требуется для вывода теоремы Томсона.



Применим теорему Томсона к бесконечно малому замкнутому контуру и преобразуя интеграл по теореме Стокса, получим:

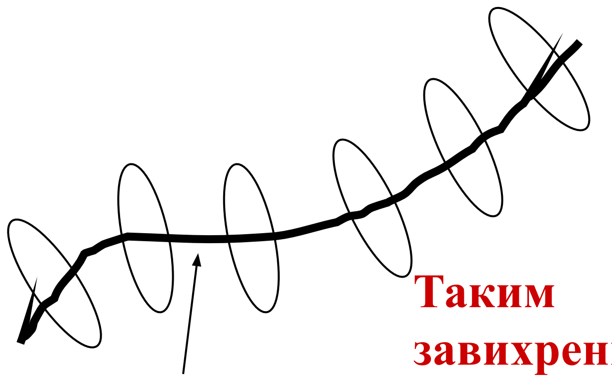
$$\oint_{dL} \vec{v}\, d\vec{l} = \int \operatorname{rot}\vec{v}\, d\vec{S} \approx dL \times \operatorname{rot}\vec{v} = \mathrm{const}$$

Вектор $rot\vec{v}$ носит название ***<u>завихренности</u>*** течения жидкости в данной точке.

Соотношение означает, что завихренность переносится вместе с идеальной жидкостью

2. 8. Потенциальные течения

Закон сохранения циркуляции скорости позволяет рассмотреть специальный класс течений в гидродинамике идеальной жидкости. Для стационарных течений жидкости рассмотрим линию тока, в некоторой точке которой



Линия тока

Тогда

$$\oint_{dL} \vec{v}\, d\vec{l} = \int \mathrm{rot}\,\vec{v}\, d\vec{S} \approx dL \times \mathrm{rot}\,\vec{v} = \mathrm{const} = 0$$

Таким образом, если в какой-либо точке линии тока завихренность отсутствует, то она отсутствует и вдоль всей этой линии

Движение жидкости, при котором во всем пространстве $rot\,\vec{v} = 0$

называется _потенциальным (или безвихревым)_

Если же $rot\,\vec{v} \neq 0$ **, то движение относится к классу _вихревых._**

Таким образом, стационарное обтекание всякого тела однородным потоком жидкости должно быть потенциальным

Как и всякое векторное поля с равным нулю ротором, скорость потенциально движущейся жидкости может быть выражена в виде градиента от некоторого скаляра. Этот скаляр носит название потенциала скорости и вводится следующим образом:

$$\vec{v} = \nabla \varphi$$

В этом случае уравнение Эйлера в виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{v}] = -\nabla w$$

Может быть переписано с использованием потенциала скорости:

$$\nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right) = 0$$

Откуда:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t)$$

f(t)- произвольная функция времени

- первый интеграл уравнений потенциального течения жидкости

Поскольку скорость через потенциал определяется с точностью до произвольной функции от времени, можно положить правую часть соотношения равной нулю

Если имеет место стационарное течение (потенциал скорости не зависит от времени), то

$$\partial\varphi / \partial t = 0,\ f(t) = const$$

Отсюда получаем уравнение Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + w = const$$

Замечание:

Отличие последнего уравнение от уравнения Бернулли состоит в том, что const в правой части последнего уравнения вдоль каждой линии тока, в случае же потенциального движения эта константа постоянна во всех точках жидкости. Отсюда столь важна роль уравнения Бернулли для потенциальных течений жидкости

2.9. Несжимаемая жидкость

Важным случаем гидродинамических течений является ситуация, когда плотность жидкости можно считать постоянной (при гидродинамических течениях не происходит заметных сжатий и расширений в жидкости). Такое движение носит название *движение несжимаемой жидкости (или модель несжимаемой жидкости).*

При этом общие уравнения гидродинамики сильно упрощаются $\rho = const$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} \longrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \vec{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\vec{v} = 0 \longrightarrow \mathrm{div}\vec{v} = 0$$

Поскольку плотность не является теперь неизвестной функцией, то можно выбрать уравнения, содержащие только скорость:

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{v} = \mathrm{rot}\left[\vec{v}, \mathrm{rot}\vec{v}\right]$$

Уравнение Бернулли тоже может быть записано для несжимаемой жидкости в более простом виде:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const$$

Для потенциального течения несжимаемой жидкости (ротор скорости равен нулю) с использованием потенциала скорости, получаем:

$$\Delta\varphi = 0$$

- уравнение Лапласа для потенциала скорости

Это открывает возможности решения задач потенциальных течений несжимаемой жидкости на базе теорий функций комплексного переменного в двумерном случае (см. учебник Ландау Лифшиц. Гидродинамика. с. 39-48)

<u>Условие несжимаемости жидкости</u>

При адиабатическом течении изменение плотности связано с изменением давления:

$$\Delta\rho = \left(\partial\rho / \partial p\right)_s \Delta p$$

Согласно уравнению, колебания давления *<u>в стационарно движущейся жидкости</u>* – порядка величины

$$\Delta p \sim \rho \mathrm{v}^2$$

Производная $(\partial\rho / \partial p)_s$ **- квадрат скорости звука в жидкости c, откуда находим:**

$$\Delta\rho \sim \rho \mathrm{v}^2 / c^2$$

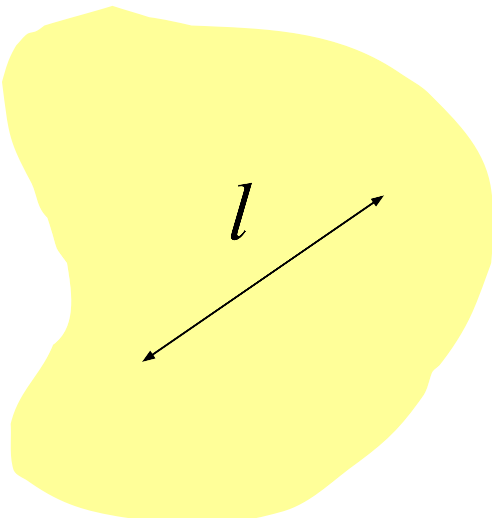
Жидкость можно считать несжимаемой, если $\Delta\rho / \rho \ll 1$

Отсюда необходимым условием несжимаемости жидкости является малость скорости ее движения по сравнению со скоростью звука:

★ $\mathrm{v} \ll \mathrm{c}$ ***- условие несжимаемости жидкости***

В нестационарно движущейся жидкости необхожимо для несжимаемости выполнение еще одного условия.

Пусть $\tau \; u \; l$ **- величины порядка масштабов изменения скорости при нестационарном движении. Тогда сравним в уравнении Эйлера термы**



$$\partial v/\partial t \quad p/ \quad \nabla \quad \rho$$

Откуда: $\partial v/\partial t \sim v/\tau \sim \Delta p/l\rho$

$$\Delta p \sim l\rho v/\tau$$

В свою очередь, изменение плотности есть:

$$\Delta\rho \sim l\rho v/\tau c^2$$

Из уравнения неразрывности, сравнивая термы $\partial\rho/\partial t \quad \rho \,\mathrm{div}\, \vec{v}$**, получаем:**

$$\Delta\rho/c \sim l\rho v/\tau^2 c^2 \sim \rho v/l, \quad \text{если} \quad \tau \sim l \;\; c \quad ★★$$

Таким образом, нестационарное движение можно считать несжимаемым, если выполняются одновременно условия

★ **и** ★★

2.10. Сжимаемая жидкость и акустика

Общие уравнения сжимаемой жидкости могут быть приведены к виду для описания акустических явлений – гидродинамических движений со сравнительно небольшой скоростью

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}\nabla)\vec{\mathrm{v}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\vec{\mathrm{v}} = 0$$

Полагая, что $\mathrm{v} \ll c$, показать, что из приведенных уравнений следуют уравнения акустики

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \Delta\rho$$

Волновое уравнение и оно имеет общие решения в виде волн, в общем случае – трехмерных

<u>Задачи:</u>

1. **Найти общее решение для акустических волн (возмущений) в 1D-случае**
2. **Показать, что в случае плоских бегущих волн, энергия в звуковой волне есть**

$$E = \rho_0 \mathrm{v}^2$$