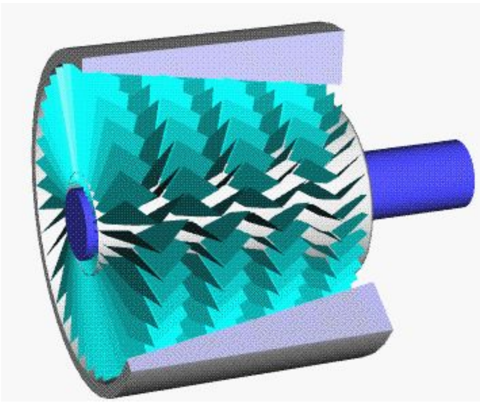
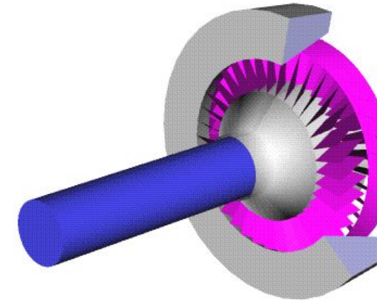
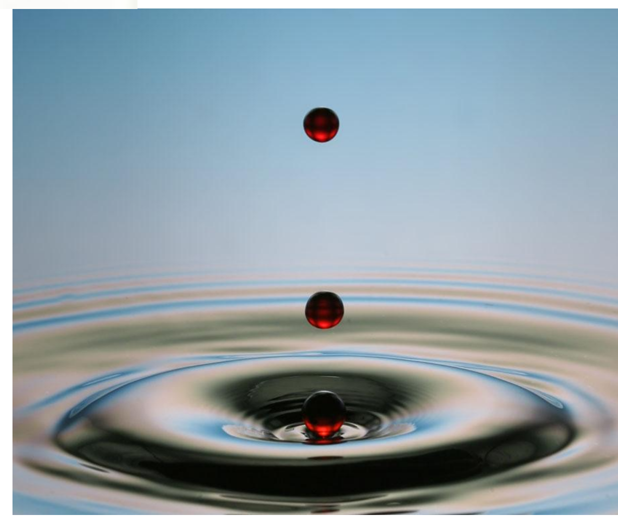


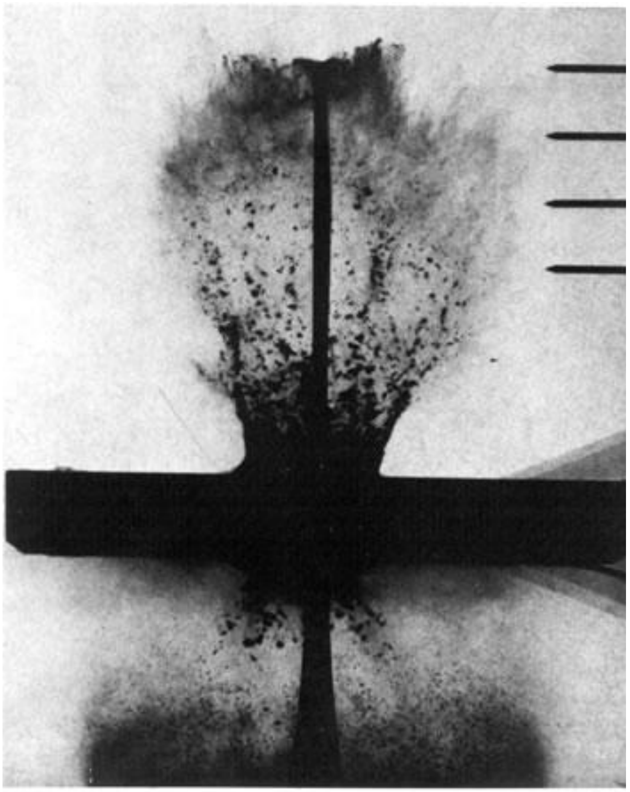



(c) 2006 Martin Waugh
www.liquidsculpture.com




(c) 2007 Martin Waugh
www.liquidsculpture.com


(c) 2006 Martin Waugh
www.liquidsculpture.com




INERT
00014

3. Гидродинамика вязкой жидкости

Обратимся к случаю, когда необходимо учитывать процессы диссипации в жидкости. В реальных жидкостях всегда имеет место термодинамическая необратимость, связанная с наличием эффектов внутреннего трения (вязкости) и переноса тепла(теплопроводности).

Понятно, что полученные ранее уравнения гидродинамики идеальной жидкости не содержат подобных эффектов (это относится только к уравнению Эйлера – уравнение неразрывности сохраняет свою силу).

Вывод уравнения для учета потерь от внутреннего трения основывается на следующих соображениях. Наличие внутреннего трения (вязкости) проявляется в наличии дополнительного (необратимого) переноса импульса из мест с большей скоростью в места с меньшей скоростью.

Формально, необходимо дополнить поток импульса для идеальной жидкости необратимым термом, имеющим физический смысл необратимого переноса импульса (диссипации).

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho \mathrm{v}_i \mathrm{v}_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho \mathrm{v}_i \mathrm{v}_k$$

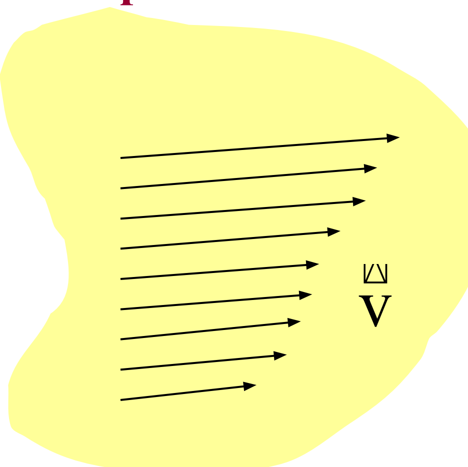
где тензор

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$ - называется ***тензором напряжений***

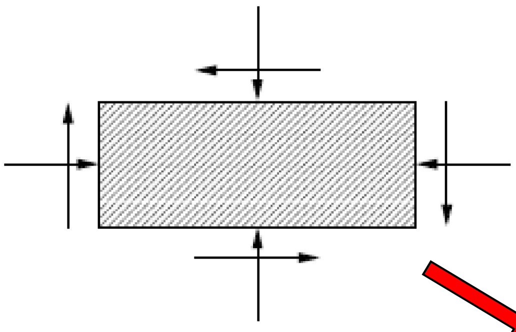
Тензор σ'_{ik} носит название ***вязкого тензора напряжений.***

Тензор σ_{ik} определяет часть потока импульса, которая не связана с диссипацией (обратимый перенос импульса)

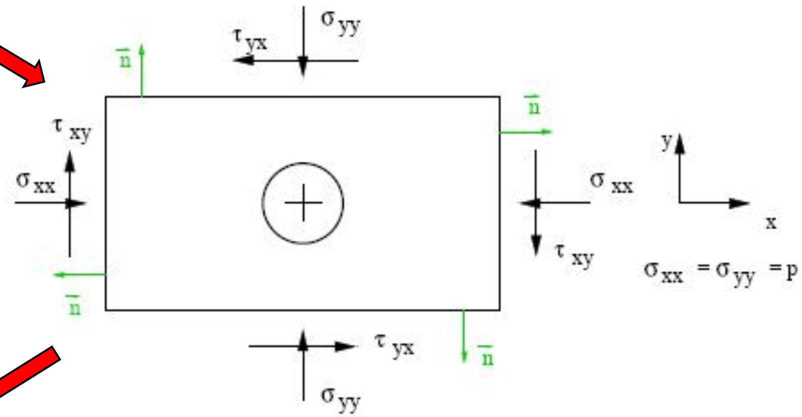
Общий вид вязкого тензора напряжений можно установить на основе определенных соображений, справедливость которых может подтвердить только эксперимент.

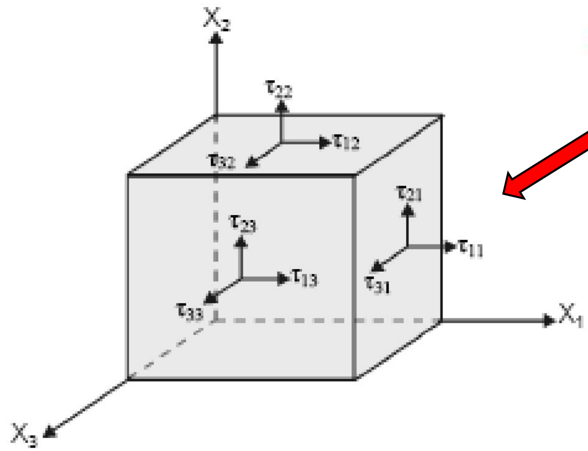


Поле скоростей в жидкости



Как устроены нормальные и касательные компоненты тензора напряжений в жидкости?

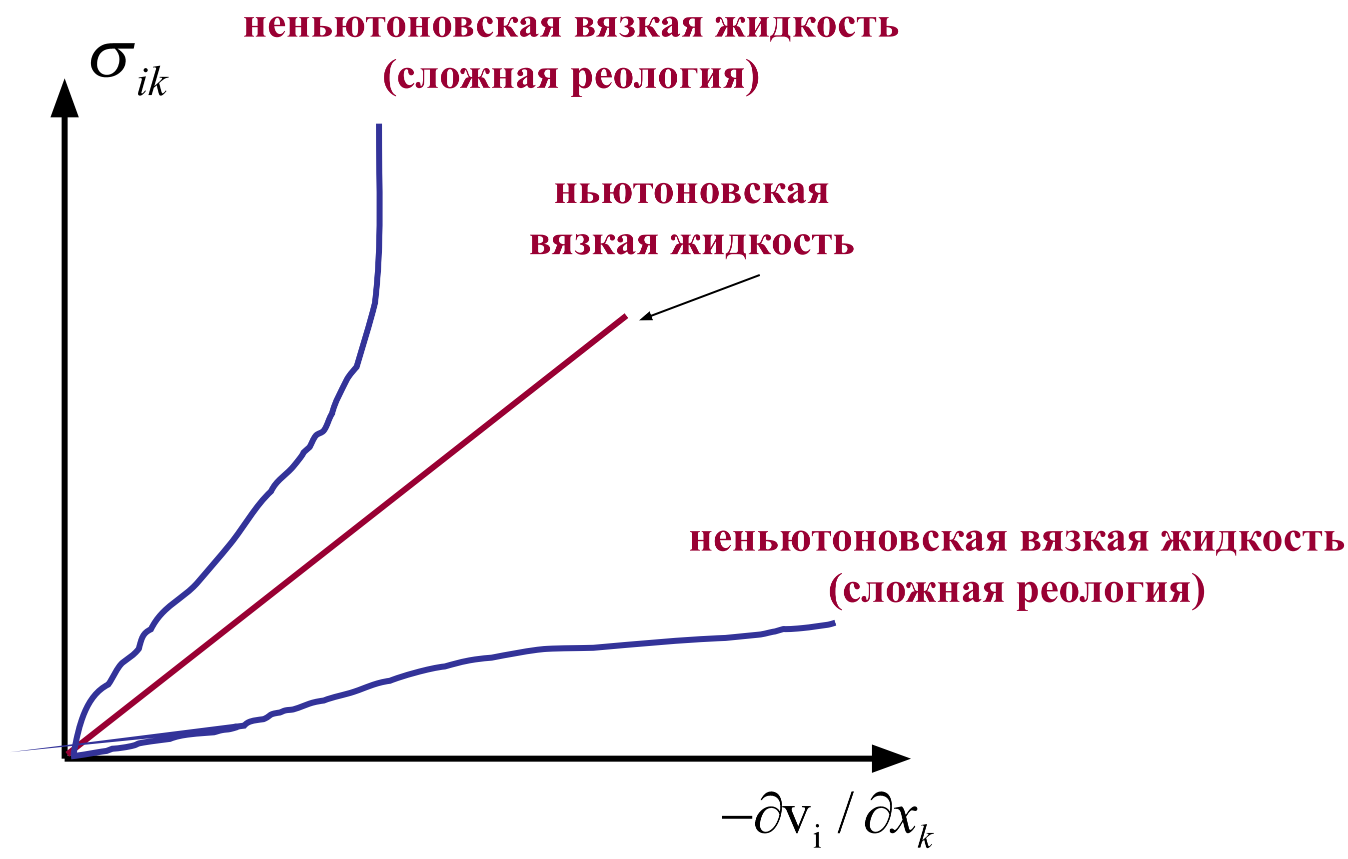




$$\sigma_{ik} = \tau_{ik}$$

3.1. Обобщенный закон Ньютона

$$\sigma_{ik} = -\eta \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}$$



3.2. Вывод уравнений вязкой жидкости

Для того, чтобы установить общий вид тензора вязких напряжений, используем следующие соображения:

- процессы внутреннего трения имеют место, если различные участки жидкости движутся с различной скоростью – тензор вязких напряжений должен зависеть от производных скорости жидкости по координатам $\sigma'_{ik} \sim \partial \mathrm{v}_i / \partial x_k$;
- если градиенты скорости не очень велики, то можно, разложив тензор вязких напряжений в ряд по градиентам скоростей по координатам, оставить только первые члены (обобщенный закон Ньютона для сил трения в жидкости);
- члены, не зависящие от градиентов скоростей по координатам должны отсутствовать в тензоре вязких напряжений, поскольку при $\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{const}$ он должен обращаться в нуль;
- тензор вязких напряжений должен быть симметричным, в силу изотропности жидкости, поэтому единственными комбинациями первых производных от скорости жидкости по координатам могут быть суммы $(\partial \mathrm{v}_i / \partial x_k) + (\partial \mathrm{v}_k / \partial x_i)$

Общий вид тензора второго ранга, который удовлетворяет приведенным выше условиям, является:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{x}_k} + \frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial \mathrm{x}_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial \mathrm{x}_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial \mathrm{x}_l} \qquad (3.1)$$

Здесь коэффициенты η и ζ, которые не зависят от скорости, называются соответственно коэффициентами *<u>первой и второй вязкости</u>*. Обе эти величины всегда положительны.

Уравнение движения вязкой жидкости можно получить непосредственно прибавляя в правую часть уравнения Эйлера величины $: \partial\sigma'_{ik} / \partial x_k$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{v_k}\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{x_k}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \qquad (3.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{x_k}} + \frac{\partial \mathrm{v_k}}{\partial \mathrm{x_i}} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \mathrm{v_l}}{\partial \mathrm{x_l}}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\left(\zeta\frac{\partial \mathrm{v_l}}{\partial \mathrm{x_l}}\right)$$

Это наиболее общий закон движения вязкой жидкости; величины η и ζ вообще говоря, могут зависеть от давления и температуры (вместе с последними величинами, коэффициенты вязкости могут меняться от точки к точке, поэтому не вынесены за знак производных).

Если коэффициенты вязкости постоянны вдоль жидкости, то можно получить следующее уравнение из (3.2):

(3.3) $$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right]=-\nabla p+\eta\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\vec{v}$$ **- уравнение Навье-Стокса**

C.L.Navier (1785-1836)

(Навье – 1827г. – из модельных соображений; Стокс – 1845г. – приведение к современной форме)

Если жидкость несжимаема, тот уравнение Навье-Стокса сильно упрощается $\operatorname{div}\vec{v}=0$**:**

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right]=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} \qquad (3.4)$$

G.G.Stokes (1819-1903)

Тензор напряжений в несжимаемой жидкости принимает сравнительно простой вид:

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \qquad (3.5)$$

Таким образом, процессы диссипации (внутреннего трения) в несжимаемой жидкости описываются всего одним коэффициентом η **- <u>коэффициентом динамической вязкости</u>. Величина** $\nu=\eta/\rho$ **- носит название <u>кинематической вязкости</u>**

Для несжимаемой жидкости, аналогично случаю уравнения Эйлера, можно исключить в уравнении Навье-Стокса давление. Применив операцию ротор к обеим частям уравнения (3.4), получим:

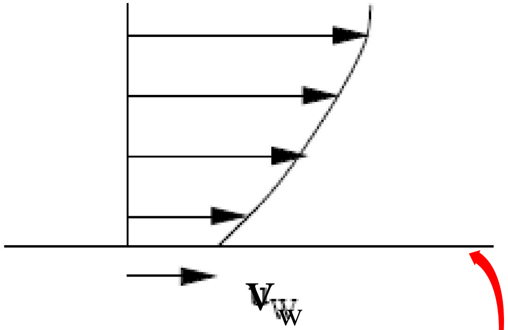
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{rot}\left[\vec{\mathrm{v}}\,\mathrm{rot}\vec{\mathrm{v}}\right]+\nu\Delta\mathrm{rot}\vec{\mathrm{v}} \qquad \textbf{(3.6)}$$

Если распределение скоростей найдено, то давление находится из соотношения (оно получается применением к уравнению (3.4) операции дивергенция:

$$\Delta p=-\rho\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{x_k}}\frac{\partial \mathrm{v_k}}{\partial \mathrm{x_i}}=-\rho\frac{\partial^2 \mathrm{v_i v_k}}{\partial x_i \partial x_k} \qquad \textbf{(3.7)}$$

3.3. Граничные условия для вязкой жидкости

3.3.1. Кинематические граничные условия



На границе с твердым (неподвижным) телом из-за сил межмолекулярного взаимодействия всегда должно быть

$$\vec{\mathrm{v}}_\Gamma=0 \qquad \textbf{(3.8)}$$

Таким образом, и нормальная и касательная компоненты скорости на неподвижной твердой границе должны обращаться в нуль:

$$\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{n}=\vec{\mathrm{v}}_\tau=0 \qquad \textbf{(3.8а)}$$

На подвижной твердой границе, движущейся со скоростью:

$$\mathrm{v}_\tau=\mathrm{v_w} \qquad \textbf{(3.8б)}$$

Условие равенства нулю касательной компоненты скорости в <u>макроскопической гидродинамике</u> носит название <u>непроскальзывания</u> (отсутствие скольжения на границе – no slip condition)

В микро- и наногидродинамике подобное условие может не выполняться !!!

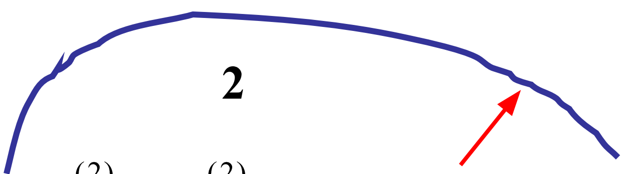
<u>3.3.2. Динамические граничные условия</u>

Для сил на границе с жидкостью должны выполняться условия непрерывности; на границе раздела фаз должны выполняться <u>условия равенства нормальных и касательных напряжений:</u>

$$\sigma_{ii}^{(1)} = p^{(1)}$$

$$\sigma_{ik}^{(1)} = \tau_{ik}^{(1)}$$

1



2

$$\sigma_{ii}^{(2)} = p^{(2)}$$

$$\sigma_{ik}^{(2)} = \tau_{ik}^{(2)}$$

межфазная граница

$\sigma_n = p_\sigma$ – капиллярное (нормальное) давление

$\sigma_{ik} = \tau_{ik}$ – касательная компонента

$$\sigma_{ii}^{(1)} - \sigma_{ii}^{(2)} = \sigma_\Gamma \Rightarrow p^{(1)} = p^{(2)} + p_\sigma \quad \textbf{(3.9)}$$

$$\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)} = \sigma_\tau\ ;\ i \neq k \qquad \textbf{(3.10)}$$

Общий вид капиллярного (нормального) давления и касательной компоненты тензора напряжений на границе должен устанавливаться отдельно

Поучение 1. Уравнения Навье-Стокса в различных координатах

А. Декартовы прямоугольные координаты:

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial y} + \mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta \mathrm{v_x}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta \mathrm{v_y}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y} + \mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta \mathrm{v_z}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} = 0$$

Б. Цилиндрические координаты:

$$\frac{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{t}}+(\vec{\mathrm{v}}\nabla)\mathrm{v}_{\mathrm{r}}-\frac{\mathrm{v}_{\varphi}^{2}}{\mathrm{r}}=F_{r}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta \mathrm{v}_{\mathrm{r}}-\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{r}}}{r^{2}}-\frac{2}{r^{2}}\frac{\partial \mathrm{v}_{\varphi}}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_{\varphi}}{\partial \mathrm{t}}+(\vec{\mathrm{v}}\nabla)\mathrm{v}_{\varphi}-\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{r}}\mathrm{v}_{\varphi}}{\mathrm{r}}=F_{\varphi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\Delta \mathrm{v}_{\varphi}-\frac{\mathrm{v}_{\varphi}}{r^{2}}+\frac{2}{r^{2}}\frac{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{r}}}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{t}}+(\vec{\mathrm{v}}\nabla)\mathrm{v}_{z}=F_{z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta \mathrm{v}_{\mathrm{z}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\mathrm{v}_{r})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\,\mathrm{v}_{\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial\,\mathrm{v}_{z}}{\partial z}=0$$

где $(\vec{\mathrm{v}}\nabla)\mathrm{f}=\mathrm{v}_{\mathrm{r}}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\mathrm{v}_{\varphi}}{\mathrm{r}}\frac{\partial f}{\partial \varphi}+\mathrm{v}_{\mathrm{z}}\frac{\partial f}{\partial z}$,

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2} f}{\partial \varphi^{2}}+\frac{\partial^{2} f}{\partial z^{2}}$$

3.4. Течения вязкой жидкости в каналах

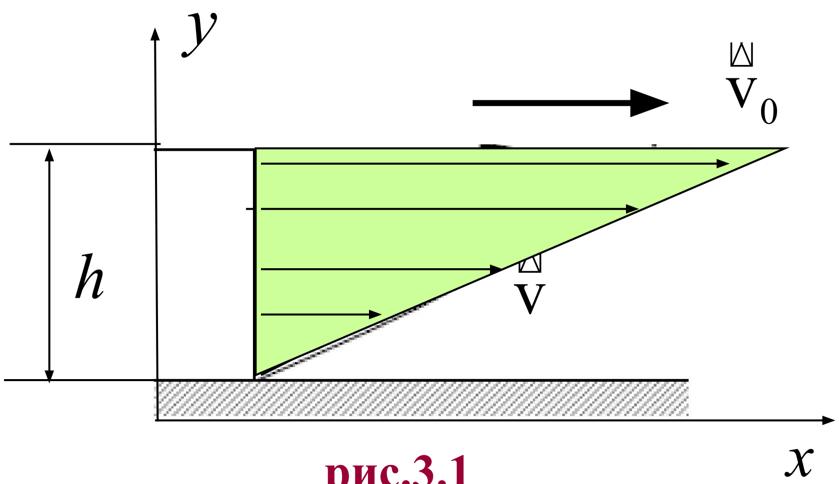


рис.3.1

3.4.1. Плоское течение

Пусть жидкость находится в плоском канале, одна из стенок которого движется со скоростью v_0 (рис.3.1). Все величины зависят только от y, а скорость направлена везде вдоль оси x.

Из уравнения Навье-Стокса следует, что (уравнение неразрывности выполняется автоматически):

$$\frac{dp}{dy} = 0; \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$$

Отсюда имеем:

$$p = const; \quad v = ay + b$$

При y=0, и при y=h, имеем:

$$v_{y=0} = 0; \; v_{y=h} = v_0$$

Откуда

$$v = (y/h)v_0$$

Таким образом, профиль скорости линеен. Средняя скорость жидкости может быть найдена из соотношения:

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{1}{\mathrm{h}} \int_0^h \mathrm{v}(y)\, dy = \frac{\mathrm{v}_0}{2}$$

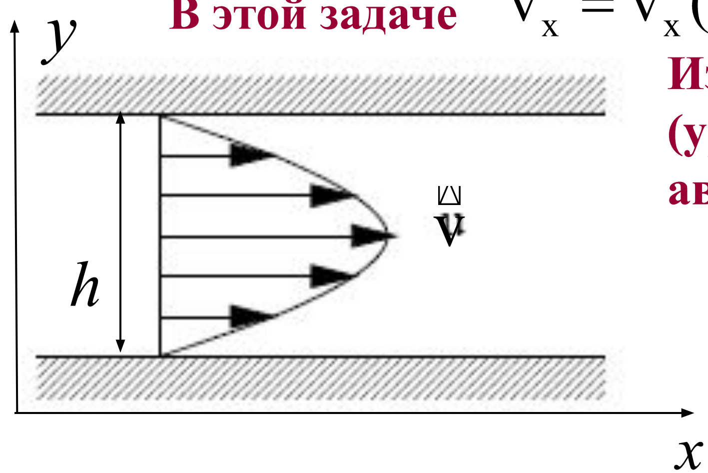
Найдем действующие на стенки силы:

- **нормальная компонента силы на стенку равна давлению p=const;**
- **тангенциальная компонента (сила трения при y=0) равна**

$$\sigma_{xy} = \eta\left(d\mathrm{v}/\mathrm{dy}\right) = \eta \mathrm{v}_0 / h$$

3.4.2. Течение между двумя плоскостями под действием градиента давления

В этой задаче $\mathrm{v}_\mathrm{x} = \mathrm{v}_\mathrm{x}(y)$



Из уравнения Навье-Стокса следует, что (уравнение неразрывности выполняется автоматически):

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}_\mathrm{x}}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Откуда давление по координате «y» постоянно: $p = const$

Поскольку давление не зависит от координаты «y», то в первом уравнении левая часть зависит только от «x», в правой - только от «y»; следовательно, и правая и левая части – постоянны; таким образом, имеем:

$$\frac{dp}{dx} = const - \text{давление является линейной функцией координаты "x"}$$

Для скорости получаем:

$$\mathrm{v_x} = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2 = ay + b$$

Из граничных условий при y=0 и y=h, получаем:

$$\mathrm{v_x} = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y(y-h)$$

Таким образом, имеет место параболический профиль скорости: скорость меняется вдоль толщины жидкости по параболическому закону, достигая максимума в середине канала. Среднее значение скорости по толщине задается градиентом давления:

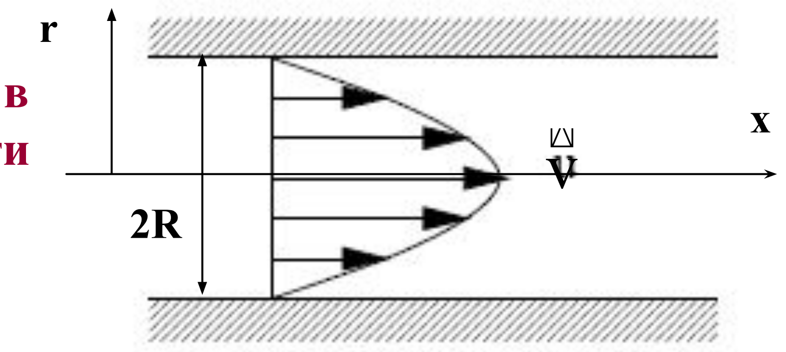
$$\bar{\mathrm{v}} = -\frac{\mathrm{h}^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

Сила трения на неподвижную стенку есть:

$$\sigma_{xy} = \eta\left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}}\right)_{y=0} = -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$

3.4.3. Течение в трубе (течение Пуазейля)

Рассмотрим течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе. Скорость жидкости должна зависеть только от координаты «r»



$$v=v(r)$$

Уравнение неразрывности выполняется тождественно, а r-компонента уравнения Навье-Стокса дает $\partial p / \partial r = 0$ **. При этом** $\partial p / \partial x = const \Rightarrow \partial p / \partial x \approx \Delta p / L$ **. Здесь** Δp — перепад давления наконцах трубы длиной L

Оператор Лапласа в цилиндрическом уравнении Навье-Стокса есть:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta L}$$

Интегрируя, получаем:

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + a \ln r + b$$

Поскольку скорость везде должна быть конечной, необходимо положить a=0; постоянная b определяется из граничного условия:

$$v(r=R)=0$$

Окончательно получаем профиль скорости в трубе

$$v(r)=\frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

- скорость распределена по параболическому закону (пуазейлевский профиль скорости)

При это расход жидкости можно определить из соотношения:

$$Q=2\pi\rho\int_0^R r\text{v}dr=\frac{\pi\Delta p}{8\nu L}R^4$$

★ ★ ★

<u>Общие замечания:</u>

- **существуют точные решения уравнений Навье-Стокса; их относительно немного (некоторые из них рассмотрены выше для простейших случаев);**

- **существуют так называемые асимптотические методы решения уравнений Навье-Стокса, в которых используются различные разложения решений по малому параметру;**

- **наиболее часто применяемыми в настоящее время являются численные решения, однако для достаточно сложных геометрий и граничных условий даже компьютерное моделирование (CFD) часто приводит к весьма серьезным сложностям в расчетах.**

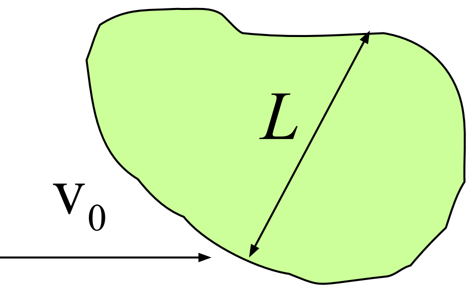
3.5. Течения при малых числах Рейнольдса

3.5.1. Законы подобия

Важную роль в исследованиях гидродинамики вязкой жидкости играют так называемые *законы подобия*. Можно показать, что любые стационарные вязкие течения жидкости характеризуются тремя основными размерными параметрами:

$\nu = \eta / \rho$ – *кинематическая вязкость*; L – *характерный геометрический размер тела*;

v – *скорость течения жидкости*



Из указанных величин можно составить единственную безразмерную комбинацию типа:

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{v}_0 L}{\nu} = \frac{\rho \mathrm{v}_0 L}{\eta} \qquad (3.11)$$

- число Рейнольдса

Если ввести, например, безразмерные координаты $\vec{\xi} = \vec{r} / L$, тогда поле скоростей вязкой жидкости можно искать в безразмерной форме:

$$\vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) = \mathrm{v}_0 f(\vec{\xi}, \mathrm{Re}) \qquad (3.12)$$

Таким образом, если числа Рейнольдса для двух видов течений, например, обтекания тел различного размера, равны, то поля скоростей подобны и получаются друг из друга изменением масштаба. Это – так называемый закон подобия Рейнольдса (1883г.)

O. Reynolds (1842-1912)

Аналогичные законы подобия можно сформулировать и для распределения давления и силы сопротивления:

$$p = \rho v_0^2 f(\vec{\xi}, \mathrm{Re}); \quad F_L = \rho v_0^2 L^2 f(\vec{\xi}, \mathrm{Re}) \tag{3.12a}$$

3.5.2. Течения при малых числах Рейнольдса

Существенное значение имеют классы стационарных течений вязкой жидкости при так называемых малых числах Рейнольдса. Если записать стационарное уравнение Навье-Стокса в форме:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}, \tag{3.13}$$

тогда справедливы оценки:

$$\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v} \sim v_0^2 / L; \left(\eta / \rho\right)\Delta\vec{v} \sim \eta v_0 / \rho L^2 \Rightarrow \frac{\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}}{\left(\eta / \rho\right)\Delta\vec{v}} \sim \frac{v_0 L}{\nu} = \mathrm{Re}$$

Если число Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$, то нелинейным членом вида $\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}$ можно пренебречь! В этом случае вместо (3.13) имеем линейное уравнение вида:

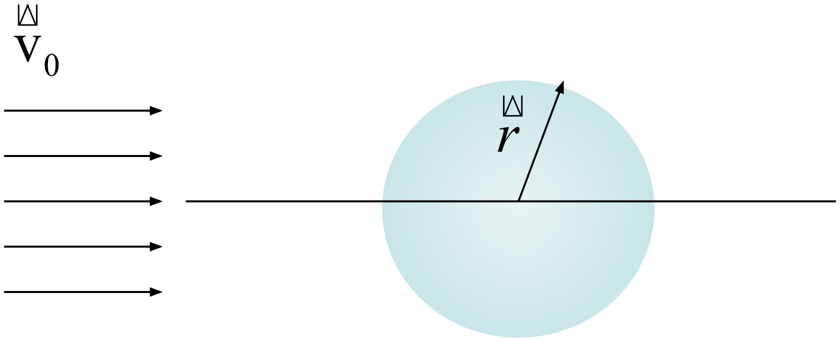
$$\eta\Delta\vec{v} - \nabla p = 0 \tag{3.14}$$

Таким образом, при малых числах Рейнольдса уравнение (3.14) вместе с уравнением неразрывности полностью определяет движение вязкой жидкости

3.5.3. Течение Стокса

G.G.Stokes
(1819-1903)

Рассмотрим прямолинейное и равномерное движение шара в вязкой жидкости (что эквивалентно задаче об обтекании неподвижного шара потоком жидкости). Пусть на бесконечности скорость есть $\vec{v}_0$.



Для решения этой задачи (задача Стокса, 1851г.) воспользуемся тем обстоятельством, что, если $\vec{v}$ - скорость жидкости, то очевидно выполняется условие:

$$\mathrm{div}(\vec{v}-\vec{v}_0)=0 \longrightarrow \vec{v}-\vec{v}_0=\mathrm{rot}\vec{A}$$ **(причем** $\mathrm{rot}\vec{A} \to 0$ *при* $r \to \infty$ **)**

Можно показать, что общий вид решения уравнения Навье-Стокса должен иметь вид:

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = [\vec{n}, \vec{v}_0]\,\partial f(r)/\partial r \qquad \textbf{(3.15)}$$

$\vec{n}$ **- единичный вектор в направлении радиуса-вектора** $\vec{r}$, $(\partial f/\partial r)\vec{n} = \nabla f(r)$

Отсюда получаем, что

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\mathrm{rot}\left[\nabla f,\vec{v}_0\right]=\vec{v}_0+rotrot(f\vec{v}_0),$$

$$\text{где учтено, что } \vec{v}_0=\mathrm{const}$$

Из уравнение (3.14) следует (дивергенция скорости равна нулю, что

$$\Delta rot\vec{v}=0$$

Тогда получаем, что

$$rot\vec{v}=\mathrm{rotrotrot}(f\vec{v})=(\nabla\mathrm{div}-\Delta)\mathrm{rot}(f\vec{v})=-\Delta\mathrm{rot}(f\vec{v})$$

В этом случае уравнение (3.14) принимает вид:

$$\Delta^2 rot(f\vec{v})=\Delta^2\left[\nabla f,\vec{v}\right]=\left[\Delta^2\nabla f,\vec{v}\right]=0$$

Или

$$\Delta^2\nabla f=0 \qquad \textbf{(3.16)}$$

Отсюда

$$\Delta^2 f=const \qquad \textbf{(3.17)}$$

В уравнении (3.17) постоянную можно положить равной нулю.

Таким образом, получаем в соответствующих координатах уравнение типа:

$$\Delta^2 f\equiv\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Delta f}{dr}\right)=0 \qquad \textbf{(3.18)}$$

Откуда

$$\Delta f = \frac{2A}{r} + C$$ **, причем** $C \to 0$ ïðè $r \to 0$

Окончательно

$$f = Ar + B / r \qquad \textbf{(3.19)}$$

Постоянные должны находится из граничных условий $r = R \to \vec{\mathrm{v}} = 0$

Находя константы, получаем решение Стокса

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r} \qquad \textbf{(3.20)}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = -\frac{3R}{4}\frac{\vec{\mathbf{v}}_o + \vec{n}(\vec{\mathbf{v}}_o\vec{n})}{\mathbf{r}} - \frac{R^3}{4}\frac{\vec{\mathbf{v}}_o - 3\vec{n}(\vec{\mathbf{v}}_o\vec{n})}{r^3} + \vec{\mathbf{v}}_o$$

В сферических координатах получаем для скорости

$$\mathrm{v}_r = \mathrm{v}_o \cos\theta \left[1 - \frac{2R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right],$$

$$\mathrm{v}_\theta = -\mathrm{v}_o sin\theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right] \qquad \textbf{(3.21)}$$

Выражение для давления в жидкости можно найти, согласно соотношению:

$$p = p_0 - \frac{3}{2}\eta \frac{\vec{\mathrm{v}}_0 \vec{n}}{r^2} R$$

p_0 **- давление жидкости на бесконечности**

Вычислим силу со стороны жидкости, действующую на шар (или, силу сопротивления, которую испытывает шар в жидкости). Общее выражение для такой силы, действующей на единицу поверхности, есть:

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$$

Поскольку такая сила действует только вдоль направления $\vec{\mathrm{v}}_0$, то введя полярные координаты (см. рисунок) и проектируя эту силу на направление скорости, получим (S – поверхность шара):

$$F = \int_S \left(-p\cos\theta + \sigma'_{rr}\cos\theta - \sigma'_{r\theta}\sin\theta\right) dS$$

Подставляя выражения для компонент скорости в:

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial \mathrm{r}}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\mathrm{v}_\theta}{\mathrm{r}}\right)$$

Получаем:

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R}\mathrm{v}_0 \sin\theta$$

Откуда давление и сила соответственно равны:

$$p = p_0 - \frac{3}{2}\eta\frac{\mathrm{v}_0}{R}\cos\theta$$

$$F = \frac{3}{2}\eta\frac{\mathrm{v}_0}{R}\int_S dS$$

Окончательно получаем формулу Стокса для силы сопротивления шара стационарном потоке вязкой жидкости:

$$F = 6\pi R\eta \mathrm{v}_0 \qquad \textbf{(3.22)}$$

- формула Стокса (1851г.)

<u>Поправки к формуле Стокса</u>

На самом деле (3.14) – не точно отражает ситуацию. Более строгий подход (Озеен, 1910г.) показывает, что необходимо пользоваться уравнением вида

$$\nu\Delta\vec{\mathrm{v}} - \frac{1}{\rho}\nabla p = (\vec{\mathrm{v}}_0\nabla\vec{\mathrm{v}}) \qquad \textbf{(3.23)}$$

Из этого уравнения можно получить поправки Озеена к формуле Стокса

$$F = 6\pi R\eta \mathrm{v}_0\left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re}\right) \qquad \textbf{(3.24)}$$

- формула Озеена (1910г.)