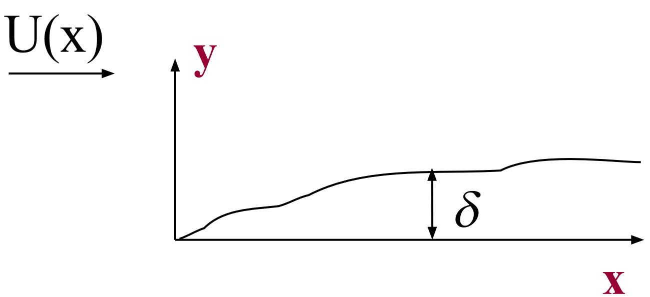
4. Пограничный слой

4.1. Ламинарный погранслой

При $Re \gg 1$ ситуация очень малой вязкости, так что жидкость можно рассматривать как идеальную. Однако, у идеальных жидкостей на твердых стенках - касательная компонента скорости отлична от нуля, а у вязких – равна нулю! Отсюда вывод: скорость до нуля вблизи твердых границ должна падать до нуля в очень тонком слое около тела. Такой слой носит название ***пограничного.*** Граница этого слоя не является, естественно, резкой и переход между погранслоем и внешним потоком жидкости непрерывен.

Рассмотрим систему уравнений, которыми описываются течения в тонком погранслое вблизи тела. Пусть имеет место двумерное обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела (вдоль оси x). Тогда уравнения Навье-Стокса для стационарного течения имеют вид:



$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}\right)$$

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial y^2}\right) \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} = 0$$

Из уравнения неразрывности следует, что

$$\mathrm{v_x}/L_x \sim \mathrm{v_y}/L_y \Rightarrow \mathrm{v_x} \sim \mathrm{v_y}(L_x/L_y) \Rightarrow \mathrm{v_y}(L/\delta) \Rightarrow \mathrm{v_x} \gg \mathrm{v_y}$$

Из уравнения Навье-Стокса:

$$\partial \mathrm{v_x}/\partial x \ll \partial \mathrm{v_x}/\partial y;\ \partial^2 \mathrm{v_x}/\partial x^2 \ll \partial^2 \mathrm{v_x}/\partial y^2$$

Откуда:

$$\mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}^2}} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial y^2}\right)$$

$$\mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\cancel{\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 \mathrm{v_y}}{\partial y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial y} = 0$$

$$\mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}} + \nu\frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial y^2}$$

$$\mathrm{v_x}\cancel{\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial y} = 0$$

В пограничном слое силы вязкости соизмеримы с силами инерции!

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (4.2)$$

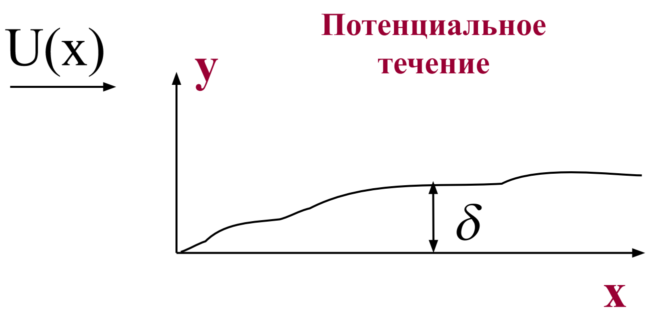
$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} = 0$$

Здесь учтено, что в пограничном слое нет поперечного градиента давления!

Людвиг Прандтль 1875 — 1953гг.

- уравнения пограничного слоя Прандтля (1904г.)

Уравнения пограничного слоя Прандтля (4.2) – незамкнуты: неизвестны компоненты скорости и давление; Прандтль предложил в первом приближении не учитывать обратного влияния погранслоя на внешний поток; поскольку толщина погранслоя мала, то распределение давления и скорости можно взять из внешнего (вне погранслоя) течения). Поскольку вне погранслоя течение потенциальное, то можно записать уравнение Бернулли:



$$p + (\rho U^2/2) = const \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}$$

Окончательно получаем уравнения Прандтля в форме:

Уравнения пограничного слоя Прандтля (1904г.)

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = U\frac{dU}{dx} \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} = 0$$

Граничные условия имеют вид:

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_y = 0 \quad при \quad y = 0$$

$$\mathrm{v}_x = U(x) \quad при \quad y \to \infty \qquad (4.4)$$

Подобные уравнения можно получить не только при обтекании плоской стенки, но и в более сложных случаях геометрии тел

Если ввести безразмерные переменные:

$$x = Lx', \; y = Ly'/\sqrt{\mathrm{Re}}, \; \mathrm{v}_x = U_0 \mathrm{v}'_x, \; \mathrm{v}_y = U_0 \mathrm{v}'_y/\sqrt{\mathrm{Re}}; \qquad U = U_0 U', \; \mathrm{Re} = U_0 L/\nu$$

U_0 **- скорость на бесконечности; тогда**

$$\mathrm{v}'_x \frac{\partial \mathrm{v}'_x}{\partial x'} + \mathrm{v}'_y \frac{\partial \mathrm{v}'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 \mathrm{v}'_x}{\partial y'^2} = U'\frac{dU'}{dx'}; \quad \frac{\partial \mathrm{v}'_x}{\partial x'} + \frac{\partial \mathrm{v}'_y}{\partial y'} = 0 \qquad (4.5)$$

Нетрудно видеть, что в новых переменных уравнения не содержат вязкости! Это означает, что решения этих уравнений не содержат числа Рейнольдса. Таким образом, течение в пограничном слое при изменении числа Рейнольдса изменяется подобна сама себе: продольные расстояния и скорости остаются неизменными, а поперечные меняются обратно пропорционально корню из числа Рейнольдса!

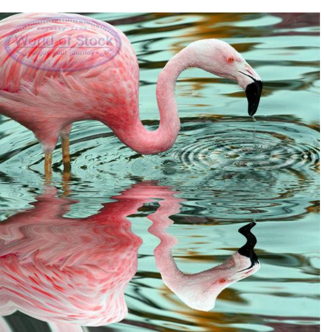
Кроме того, нетрудно показать, что:

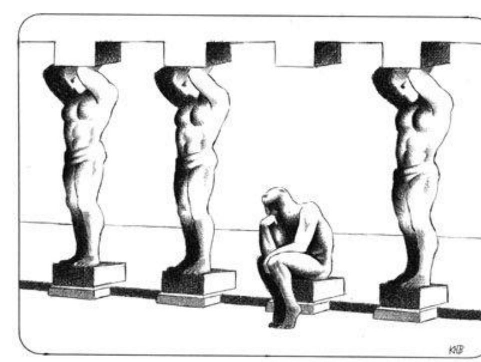
$$\mathrm{v}_x' \sim \mathrm{v}_y' \sim 1; \;\; \textit{это означает, что} \;\; \mathrm{v}_y \sim U_0/\sqrt{\mathrm{Re}}$$

Отношение поперечной скорости к продольной обратно пропорционально $\sqrt{\mathrm{Re}}$ **!**

При этом *толщина погранслоя* есть

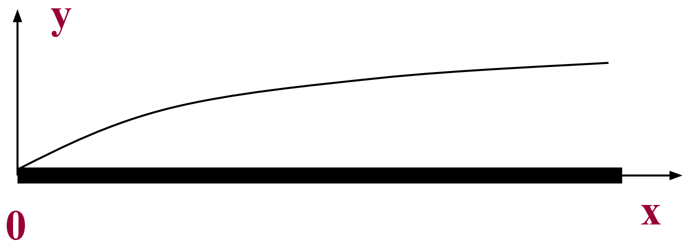
$$\delta \sim L/\sqrt{\mathrm{Re}} \qquad \textbf{(4.6)}$$





4.2. Ламинарный погранслой на пластине (задача Блазиуса)

В 1908 г. Блазиус рассмотрел задачу о погранслое на плоской полубесконечной пластине



Пусть скорость основного потока равна:

$$U = const$$

Тогда из уравнений (4.3) следует:

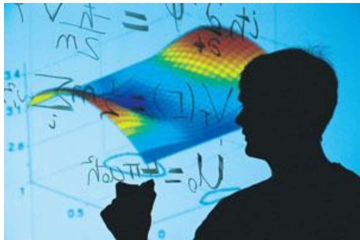
$$\begin{aligned} & \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial y^2} \\ & \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.7)}$$

В задаче о полубесконечной пластине нет никаких характерных параметров длины; отсюда введем следующие величины:

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 x}{\nu}; \;\; x/\delta = \sqrt{\mathrm{Re}}; \;\; y/\delta = \sqrt{U_0/x\nu}; \; \xi = y\sqrt{U_0/x\nu}$$

Вводим функцию тока:

$$\mathrm{v_x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \; \mathrm{v_y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



Тогда для безразмерной функции тока имеем:

$$\varphi = \psi / \sqrt{U_0 / x\nu}\,;\ \mathrm{v}_x / U_0 = d\varphi / d\xi = \varphi^{'}(\xi)$$

Или получаем:

$$\mathrm{v}_x = U_0 \varphi^{'}(\xi);\ \ \mathrm{v}_y = -\partial\psi / \partial x = -\partial(\varphi\sqrt{U_0 x\nu}) / \partial x = -\left[\frac{1}{2}\sqrt{U_0 \nu / x}\varphi + \varphi^{'}(-\xi / 2x)\right]$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \varphi^{''} U_0 \sqrt{U_0 / x\nu}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{y}^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{y}}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{y}}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \left(\varphi^{'''} U_0 \sqrt{U_0 / x\nu}\right)\sqrt{U_o x\nu} = \varphi^{'''} U_0^2 / x\nu$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = d(\mathrm{v}_x / U_0) / d\xi\left(U_0 \partial \xi / \partial x\right) = U_0 \varphi^{''}(-\xi / 2x)$$

Откуда:

$$U_0 \varphi^{'} U_0 (-\xi / 2x)\varphi^{''} + \frac{1}{2}\sqrt{U_0 \xi / x}(\varphi^{'}\xi - \varphi) U_0 \sqrt{U_o / x\nu}\,\varphi^{''} = \nu\left(\frac{U_0^2}{x\nu}\right)\varphi^{'''}$$

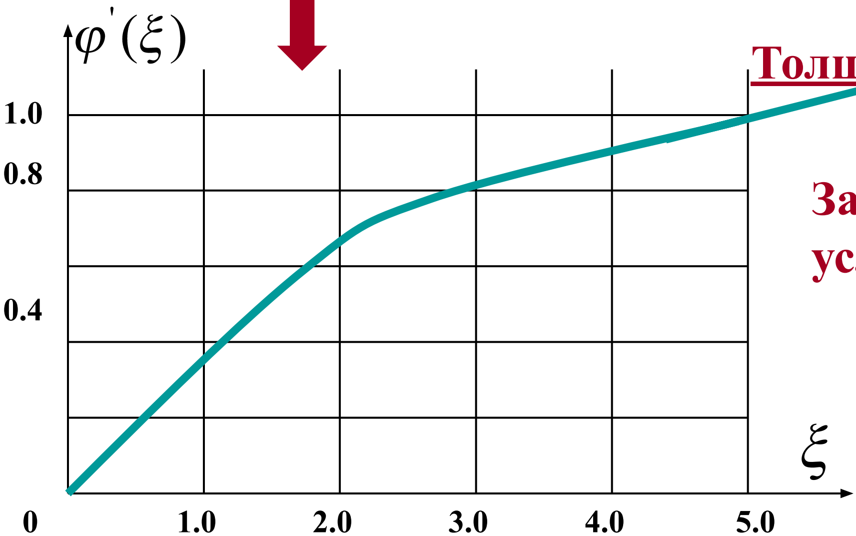
Тогда:

$$2\varphi^{'''} + \varphi^{''}\varphi = 0 \qquad \textbf{(4.8)}$$

Граничные условия для (4.8):

$$y=0:\ \mathrm{v_x}=0 \Rightarrow \xi=0: \varphi'=0;$$
$$y=0:\ \mathrm{v_y}=0 \Rightarrow \xi=0: \varphi=0; \qquad (4.9)$$
$$y=\infty:\ \mathrm{v_x}=U_0 \Rightarrow \xi=\infty: \varphi'=1;$$

Решение уравнения (4.8) с граничными условиями можно получить только численно.



$$\varphi'(\xi) \to 1 \quad \text{при} \quad \xi \gg 1$$

Толщина погранслоя

$$y \to \infty \Rightarrow \mathrm{v_x} \to U_0$$

За толщину погранслоя принимают следующее условие

$y=\delta$, если $\mathrm{v_x}/U_0 \approx 0,99\,(1\%)$ $\qquad \xi=\delta\sqrt{U_0/\nu x} \approx 5$

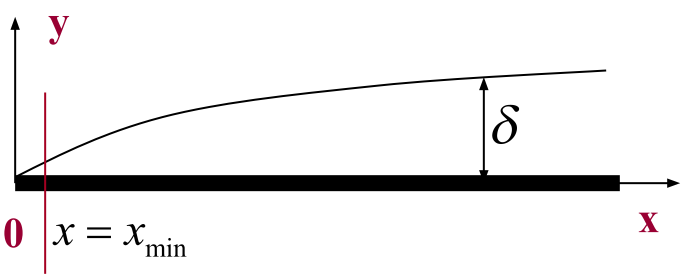
$$\Rightarrow \delta \approx 5\sqrt{\nu x/U_0} \sim \sqrt{x} \qquad \delta \sim \sqrt{x}$$

Или

$$\delta/x \approx 5/\sqrt{\mathrm{Re}_x} \qquad (4.10)$$

Если $\mathrm{Re}_x \to \infty: \delta/x \to 0\ (\ll 1)$

$\mathrm{Re}_x \to 0:\ \delta/x \to \infty\ (\gg 1)$



Таким образом, вблизи начала пластины решение Блазиуса несправедливо – имеется

$$x = x_{\min}$$

Касательные напряжения и сила трения на пластине

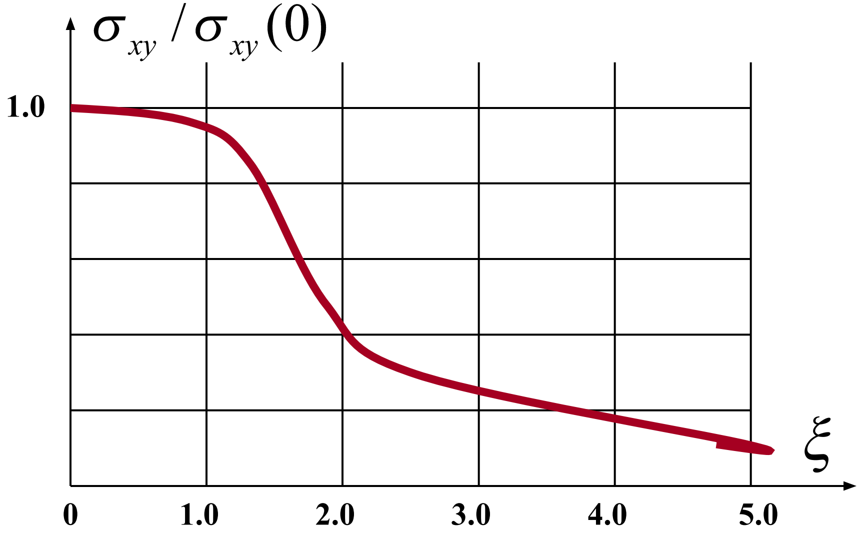
$$\sigma_{xy} = \eta\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right) = \eta\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = \eta\varphi''(\xi)U_0\sqrt{U_0/\nu x} \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$U_0/\delta = (U_0/\delta)(\delta/x)^2$$

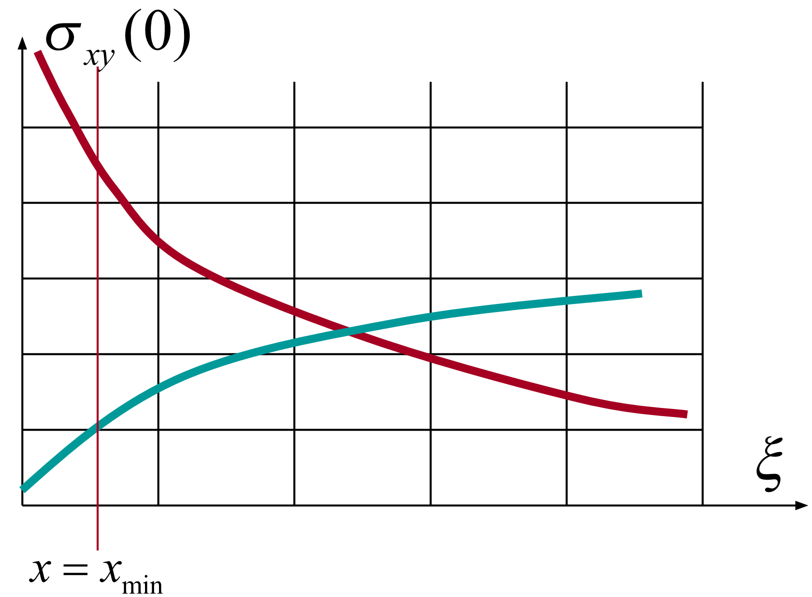
$$\sigma_{xy} = \eta\varphi''(\xi)U_0\sqrt{U_0/\nu x} = \varphi''(\xi)\sqrt{\rho\eta U_0^3/x}$$

Касательные напряжения:

$$\sigma_{xy}(\xi = 0) = \eta\varphi''(0)U_0\sqrt{U_0/\nu x} = \varphi''(0)\sqrt{\rho\eta U_0^3/x}$$



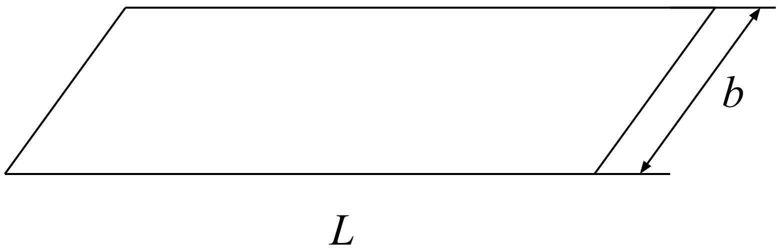
$$\sigma_{xy}(0) = \varphi''(0)\sqrt{\rho\eta U_0^3/x} \approx 0{,}332\sqrt{\rho\eta U_0^3/x}$$



Местный коэффициент сопротивления трения:

$$c_f = \sigma_{xy}(0)/(\rho U_0^2/2) \Rightarrow c_f = 0,664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \quad \text{где } \mathrm{Re}_x = U_0 x/\nu$$

Сила трения, действующая на всю пластину:



$$F_{тр} = \int_0^L 2\sigma_{xy}(0)b\,dx = 0,664b\sqrt{\rho\eta U_0^3}\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1,328b\sqrt{\rho\eta U_0^3 L}$$

Средний коэффициент сопротивления трения:

$$\overline{c}_f = 2F_{\text{тр}}/S\rho U_0^2 = 1,328/\sqrt{\mathrm{Re}_L}$$

Пределы применимости решения Блазиуса:

$$x_{\min} < x < x_{cr}$$

Оценки:

пусть $\partial^2 v_x/\partial x^2 / (\partial^2 v_x/\partial y^2) = 0,01 \Rightarrow (U_0/x^2) \sim (U_0/\delta^2) \Rightarrow \quad \delta \quad x_{\min} \approx \quad \Rightarrow \quad x_{\min} \approx$

$$\mathrm{Re}_{cr} \approx (3-10)\cdot 10^5 \Rightarrow \mathrm{Re}(x_{\min}) \ll \mathrm{Re}_x \ll (3-10)\cdot 10^5$$