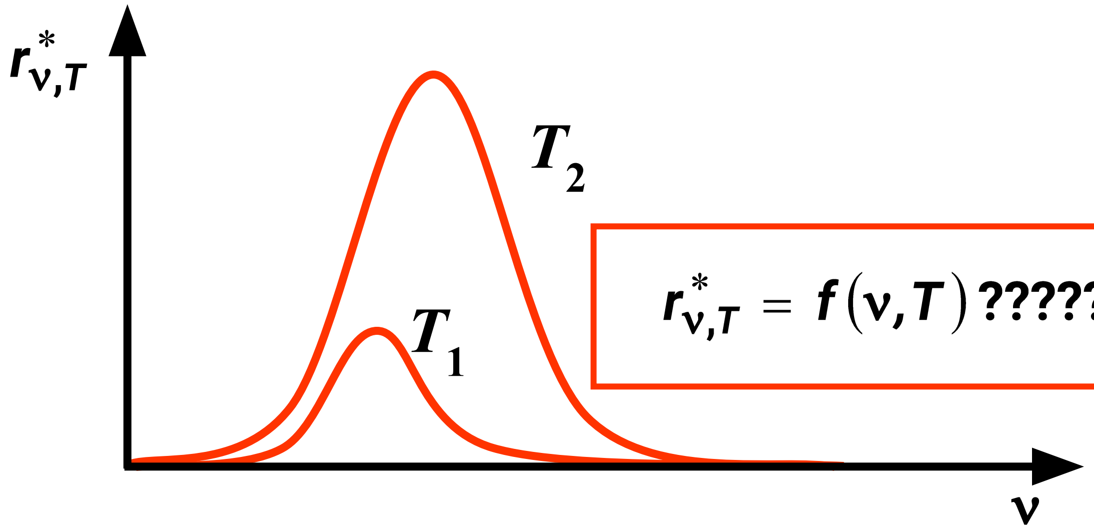
ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЗАКОНОВ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ



$$\boxed{r^*_{\nu,T} = f(\nu, T)\ ?????}$$

Закон Стефана-Больцмана

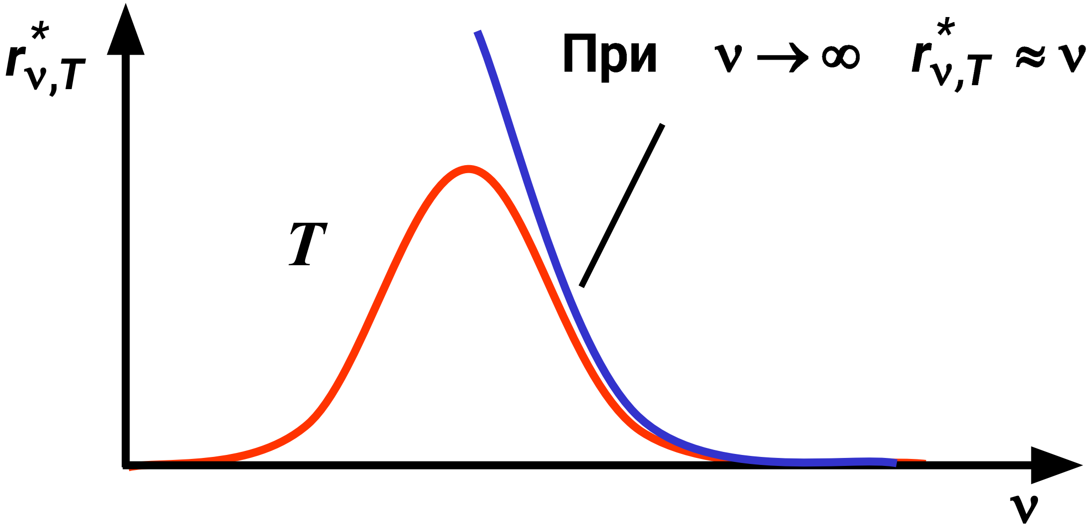
$$R^*_T = \sigma T^4$$

Закон смещения Вина

$$\lambda_m T = b$$

ФОРМУЛА ВИНА

$$r^*_{\nu,T} = \nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) \qquad \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) = ???$$



При $\nu \to \infty \quad r^*_{\nu,T} \approx \nu^3 e^{-\frac{a_1 \nu}{T}}$

ФОРМУЛА РЭЛЕЯ-ДЖИНСА

Теорема классической статистики о равнораспределении энергии по степеням свободы

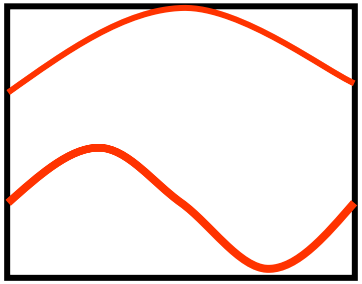
Представление о равновесном излучении как совокупности стоячих электромагнитных волн

$\langle \varepsilon \rangle = kT$ **средняя энергия стоячей волны**

$\frac{1}{2}kT$ **энергия электрического поля**

$\frac{1}{2}kT$ **энергия магнитного поля**

Число стоячих волн в интервале частот от ν до ν+dν



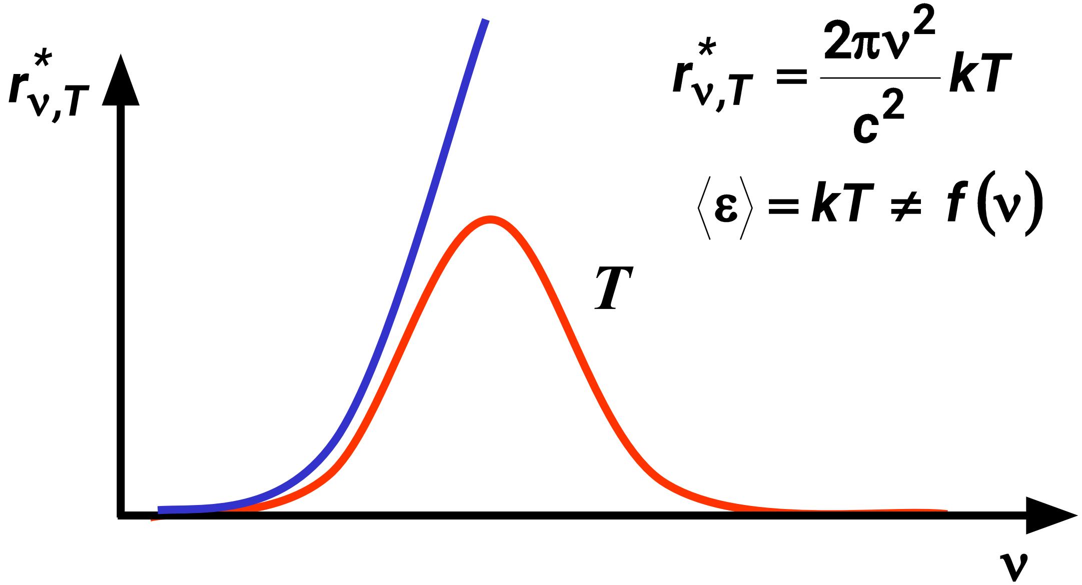
$$dn = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$ число стоячих волн в единице объема

$$du = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT d\nu$$ объемная плотность энергии

$$u(\nu,T) = \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$$ спектральная плотность объемной плотности энергии

$$r^*_{\nu,T} = \frac{c}{4}u(\nu,T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT$$ испускательная способность

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT}$$ формула Рэлея-Джинса



$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$$

$$\langle \varepsilon \rangle = kT \neq f(\nu)$$

$$R^* = \int_0^\infty r^*_{\nu,T} \, d\nu = \infty$$

КВАНТОВАЯ ГИПОТЕЗА И ФОРМУЛА ПЛАНКА

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\cdot\langle\varepsilon_\nu\rangle; \quad \langle\varepsilon_\nu\rangle = ???$$

КВАНТОВАЯ ГИПОТЕЗА

$$\varepsilon = h\nu \qquad h = 6{,}62\cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с}$$

$$\varepsilon_n = n\varepsilon = nh\nu \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\nu \qquad \underbrace{h\nu \quad 2h\nu \quad 3h\nu \qquad\qquad}_{}$$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = ?$$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\,\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}}$$

Вывод формулы Планка

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\cdot\langle\varepsilon_\nu\rangle; \quad \langle\varepsilon_\nu\rangle = ???$$

$$P_n = Ce^{-n\varepsilon/kT} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 \qquad C = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon/kT}}$$

N - полное число осцилляторов

N_n - число осцилляторов с энергией $n\varepsilon$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} N_n n\varepsilon = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} P_n N n\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P_n n\varepsilon$$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon e^{-n\varepsilon/kT}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon/kT}} = -\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} e^{-nx}\right) \qquad \text{где} \quad x = \frac{\varepsilon}{kT}$$

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = -\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}} \right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = -\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln \frac{1}{1-e^{-x}} \right) = \varepsilon \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{\varepsilon}{e^{x}-1}$$

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right)} \Longrightarrow \varepsilon = h\nu$$

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}}$$

Формула Планка

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \quad\Longrightarrow\quad r^*_{\omega,T} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

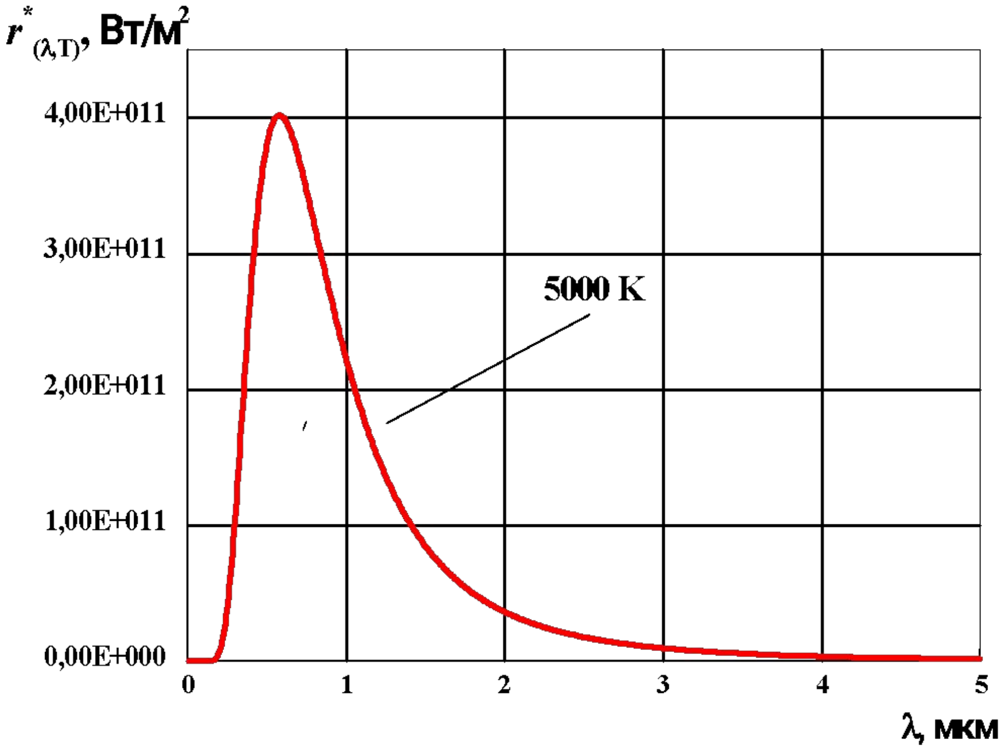
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

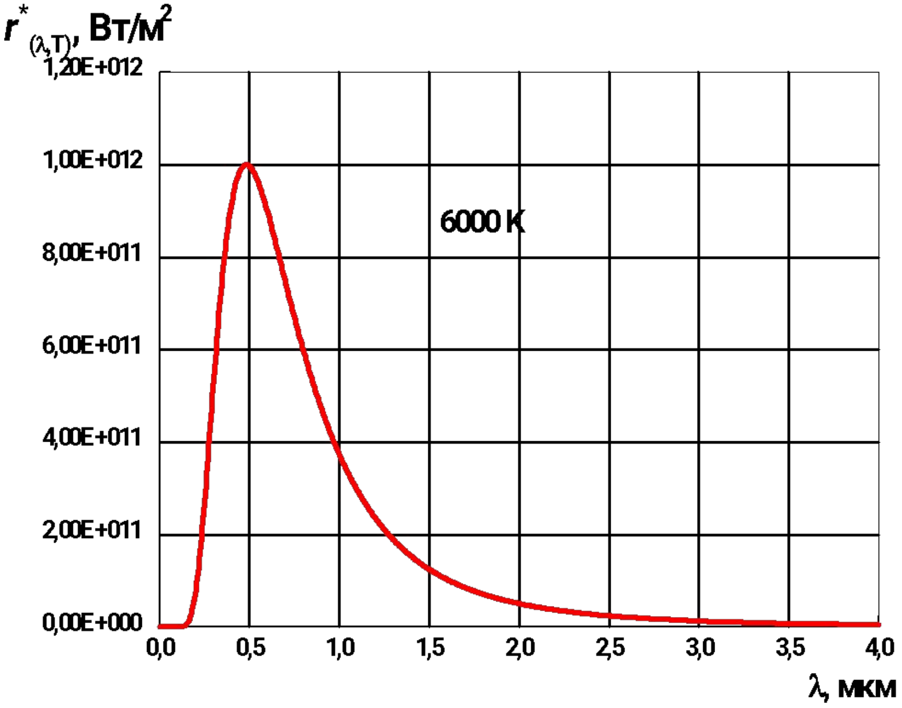
$$r^*_{\lambda,T} = \frac{4\pi\hbar c^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{2\pi\hbar c/kT\lambda}-1}$$

Для малых длин волн

$$r^*_{\lambda,T} = \frac{4\pi\hbar c^2}{\lambda^5}e^{-2\pi\hbar c/kT\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5}e^{-C_2/\lambda T}$$

Расчет по формуле Планка




$r^*_{(\lambda,T)}$, Вт/м^2
1,20E+012
1,00E+012
8,00E+011
6,00E+011
4,00E+011
2,00E+011
0,00E+000
6000 K
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
λ, мкм

ВЫВОД ИЗ ФОРМУЛЫ ПЛАНКА ФОРМУЛ ВИНА, РЭЛЕЯ-ДЖИНСА И ЗАКОНА СТЕФАНА-БОЛЬЦМАНА

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

1. $h\nu >> kT$ $\qquad e^{h\nu/kT} >> 1$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} h\nu e^{-h\nu/kT}}$$

2. $h\nu << kT$ $\qquad e^{h\nu/kT} - 1 \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} - 1$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT}$$

3. $R^* = \int\limits_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}$

$x = \frac{h\nu}{kT} \qquad \nu = \frac{kTx}{h} \qquad d\nu = \frac{kT}{h}dx$

$$\boxed{R^* = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4}$$

ОПТИЧЕСКАЯ ПИРОМЕТРИЯ

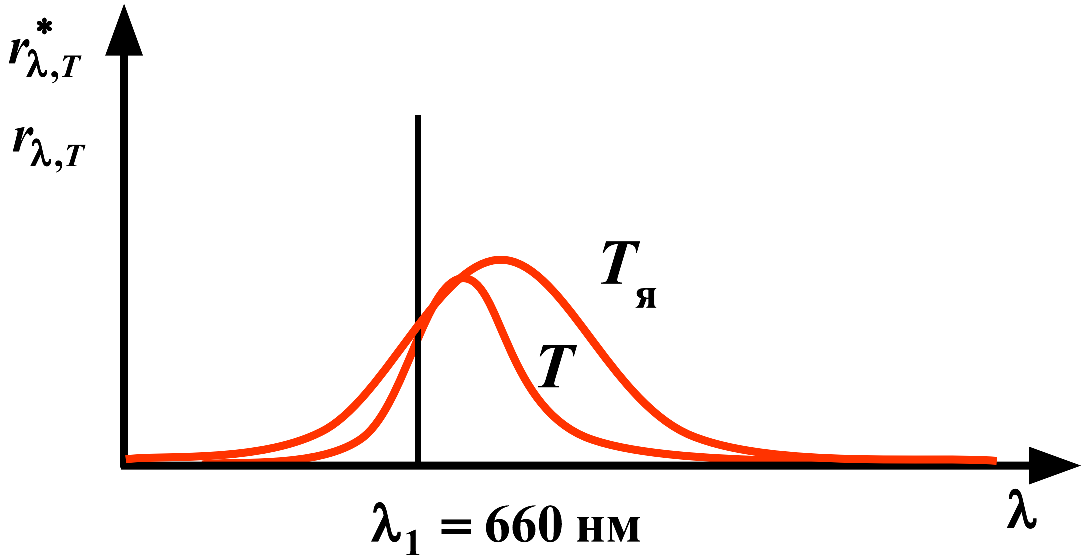
Определение температур, основанное на законах теплового излучения абсолютно черного тела.

- **Радиационная температура**

- **Цветовая температура**

- **Яркостная температура**

Яркостная температура



$$r^*_{\lambda_1} = \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{-C_2/\lambda_1 T_я} \qquad r_{\lambda_1} = a_{\lambda,T} \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{-C_2/\lambda_1 T}$$

$$a_{\lambda,T} = e^{\frac{C_2}{\lambda_1}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_я}\right)} \qquad T = \frac{C_2 T_я}{\lambda_1 T_я \ln a_{\lambda,T} + C_2}$$

Яркостный пирометр с исчезающей нитью