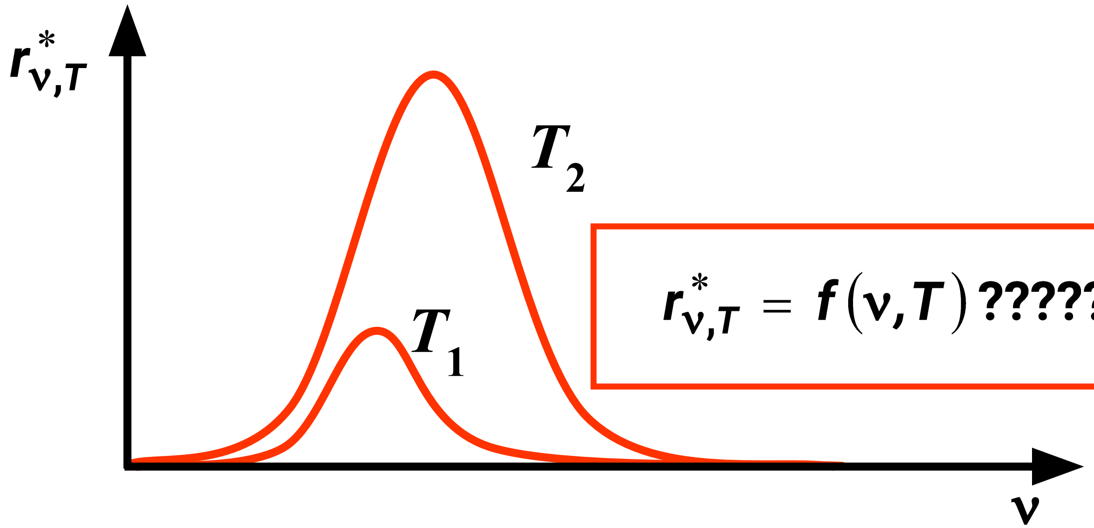
ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЗАКОНОВ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ



$$r^*_{\nu,T} = f(\nu, T)\ ?????$$

Закон Стефана-Больцмана

$$R^*_T = \sigma T^4$$

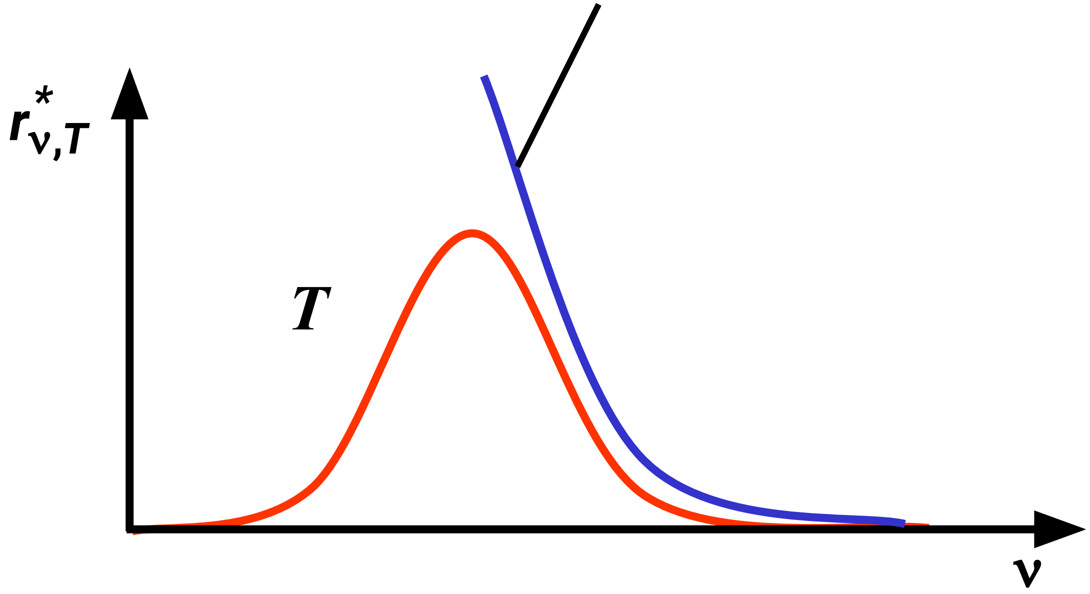
Закон смещения Вина

$$\lambda_m T = b$$

ФОРМУЛА ВИНА

$$r^*_{\nu,T} = \nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) \qquad \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) = ???$$

При $\nu \to \infty$ $\quad r^*_{\nu,T} \approx \nu^3 e^{-\frac{a_1 \nu}{T}}$



ФОРМУЛА РЭЛЕЯ-ДЖИНСА

Теорема классической статистики о равнораспределении энергии по степеням свободы

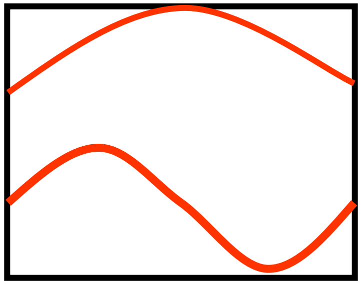
Представление о равновесном излучении как совокупности стоячих электромагнитных волн

$\langle \varepsilon \rangle = kT$ **средняя энергия стоячей волны**

$\frac{1}{2}kT$ **энергия электрического поля**

$\frac{1}{2}kT$ **энергия магнитного поля**

Число стоячих волн в интервале частот от ν до ν+dν



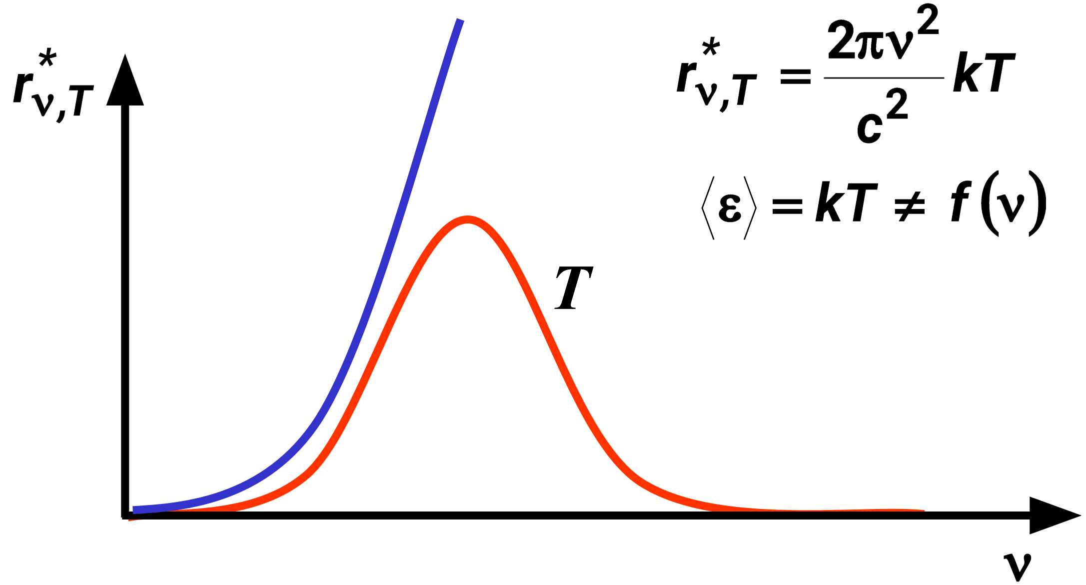
$$\mathrm{d}n = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu$$ число стоячих волн в единице объема

$$\mathrm{d}w = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\mathrm{d}\nu$$ объемная плотность энергии

$$\rho(\nu, T) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$$ спектральная плотность объемной плотности энергии

$$r^*_{\nu,T} = \frac{c}{4}\rho(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT$$ испускательная способность

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT}$$ формула Рэлея-Джинса



$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT$$

$$\langle\varepsilon\rangle = kT \neq f(\nu)$$

$$R^* = \int_0^\infty r^*_{\nu,T}\,\mathrm{d}\nu = \infty$$

КВАНТОВАЯ ГИПОТЕЗА И ФОРМУЛА ПЛАНКА

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\cdot\langle\varepsilon_\nu\rangle; \quad \langle\varepsilon_\nu\rangle = ???$$

КВАНТОВАЯ ГИПОТЕЗА

$$\varepsilon = h\nu \qquad h = 6{,}62\cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с}$$

$$\varepsilon_n = n\varepsilon = nh\nu \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\nu \qquad \underbrace{h\nu \quad 2h\nu \quad 3h\nu \qquad\qquad}$$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = ?$$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\,\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}}$$

Вывод формулы Планка

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\cdot\langle\varepsilon_\nu\rangle; \quad \langle\varepsilon_\nu\rangle = ???$$

$$P_n = Ce^{-n\varepsilon/kT} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 \qquad C = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon/kT}}$$

N - полное число осцилляторов

N_n - число осцилляторов с энергией $n\varepsilon$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} N_n n\varepsilon = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} P_n N n\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P_n n\varepsilon$$

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\varepsilon e^{-n\varepsilon/kT}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon/kT}} = -\varepsilon\frac{d}{dx}\left(\ln\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\right) \qquad \text{где} \quad x = \frac{\varepsilon}{kT}$$

$$= -\varepsilon \frac{d}{dx}\left(\ln \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = -\varepsilon \frac{d}{dx}\left(\ln \frac{1}{1-e^{-x}}\right) = \varepsilon \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{\varepsilon}{e^{x}-1}$$

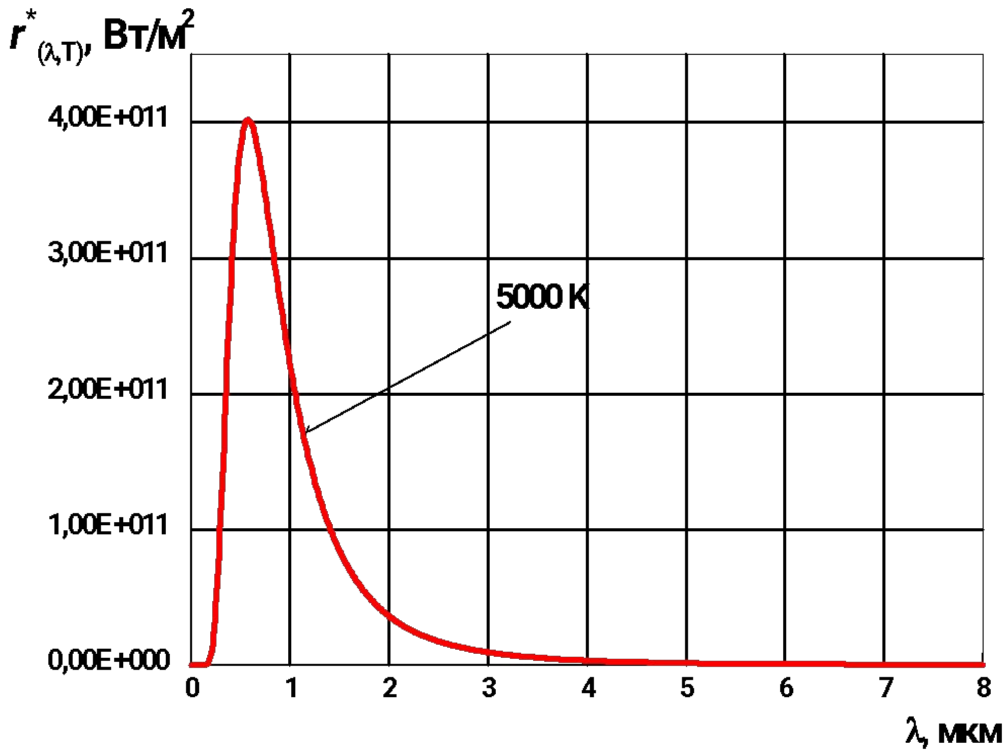
$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$$

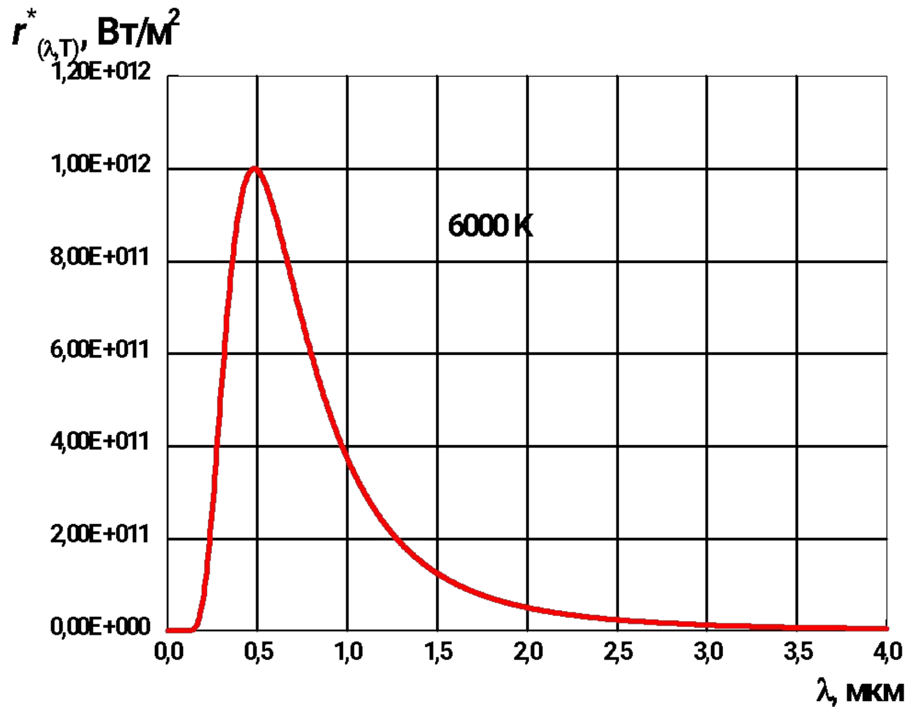
$$\boxed{r^{*}_{\nu,T} = \nu^{3}\varphi\left(\frac{\nu}{T}\right)} \Longrightarrow \varepsilon = h\nu$$

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$\boxed{r^{*}_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^{2}}{c^{2}} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}}$$

Расчет по формуле Планка





r*(λ,T), Вт/м2
1,20E+012
1,00E+012
8,00E+011
6,00E+011
4,00E+011
2,00E+011
0,00E+000
6000 K
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
λ, мкм

ВЫВОД ИЗ ФОРМУЛЫ ПЛАНКА ФОРМУЛ ВИНА, РЭЛЕЯ-ДЖИНСА И ЗАКОНА СТЕФАНА-БОЛЬЦМАНА

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

1. $h\nu >> kT$ $\qquad e^{h\nu/kT} >> 1$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} h\nu e^{-h\nu/kT}}$$

2. $h\nu << kT$ $\qquad e^{h\nu/kT} - 1 \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} - 1$

$$\boxed{r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT}$$

3. $R^* = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}$

$$x = \frac{h\nu}{kT} \qquad \nu = \frac{kTx}{h} \qquad d\nu = \frac{kT}{h}dx$$

$$\boxed{R^* = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4}$$

ОПТИЧЕСКАЯ ПИРОМЕТРИЯ

- Радиационная температура
- Цветовая температура
- Яркостная температура

Яркостный пирометр