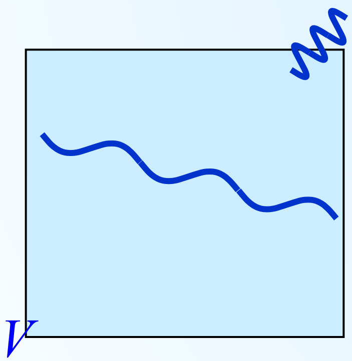
2. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.1. Элементарное введение

До сих пор мы имели дела с классическим ЭМ полем, которое описывается непрерывными функциями времени и координат и подчиняется уравнениям Максвелла. Вместе с тем ясно, что любое поле имеет квантовую природу, в том числе и электромагнитное. В этом смысле фундаментальное ЭМ поле должно по своей природе быть квантовым.

Для перехода к квантовому описанию воспользуемся представлением вектора-потенциала поля. При этом предположим, что

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0, \varphi = 0$$



Пусть имеется объем, для которого формально V. Тогда поле в конечном объем можно разложить в ряды Фурье (по бегущим плоским волнам) в виде

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \left(\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{a}^{*}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right)$$

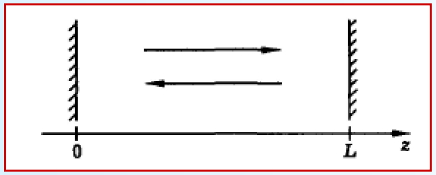
$$\vec{a}_{\vec{k}} \sim \exp(-i\omega t), \ \omega = c\left|\vec{k}\right|$$

Суммирование в последней формуле производится по бесконечному дискретному набору значений волнового вектора (его трех компонент –k_x, k_y k_z). Переход от суммирования к интегрированию проводится, согласно выражению:

$$\sum_{\vec{k}} \to \int \ldots \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = \int \ldots \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}$$

Для упрощения вывода рассмотрим одномерный случай:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + c^2 k_x^2 A = 0$$



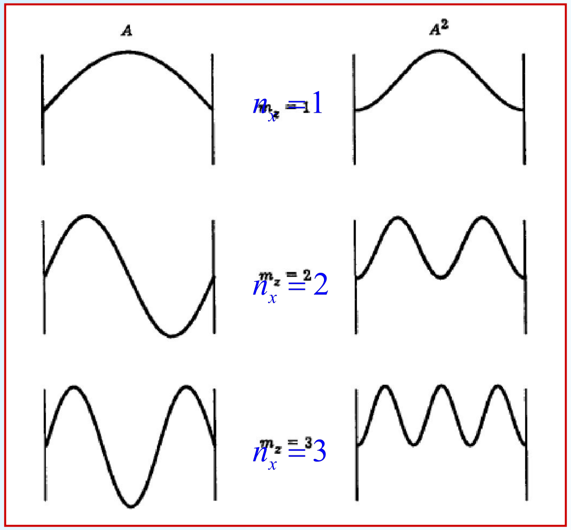
Решение:

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi),\ \omega = c k_x$$

Откуда:

$$k_x L = n_x \pi, \qquad n_x = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\omega = c k_x = n_x \frac{\pi c}{L}$$

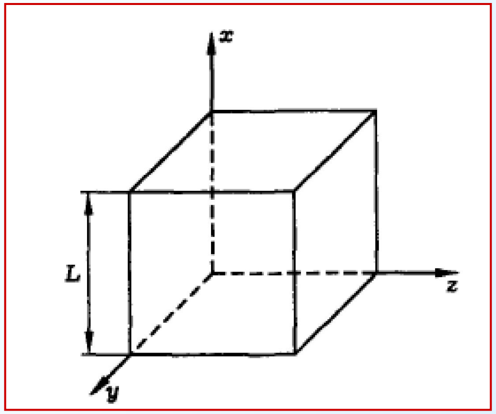


Таким образом, видно, что ЭМ в резонаторе имеет структуру дискретную, т.е. образуют счетный набор. Поскольку осцилляторы поля независимы, полное их число имеет смысл числа степеней свободы ЭМ поля. При этом на долю каждого осциллятора приходится ячейка в k_x – пространстве размером

$$\Delta k_x = \pi / L$$

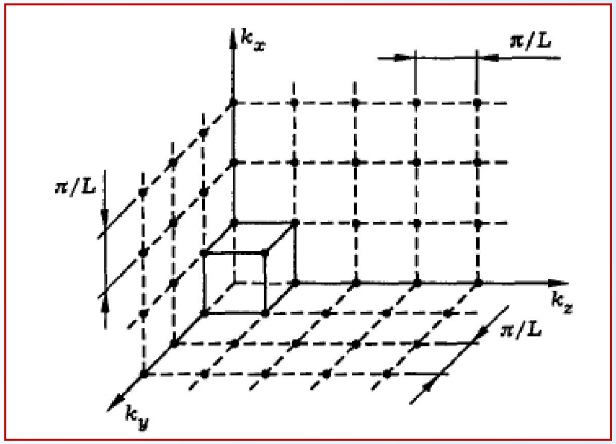
В трехмерном пространстве, соответственно

$$k_x = n_x\pi / L,\ k_y = n_y\pi / L,\ k_z = n_z\pi / L,\ \ n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$$



Итак, в трехмерном пространстве каждый осциллятор поля характеризуется тройкой натуральных чисел n_j. Таким образом, все k-пространство разбивается на кубики объемом

$$v_k = (\pi / L)^3$$



Вычислим теперь полное число степеней свободы ЭМ поля. Учитывая, что физически различным конфигурациям (осцилляторам) поля отвечают лишь положительные значения k_j, а полный объем в k-пространстве есть

$$V_k = 4\pi k^3 / 3$$

Тогда число степеней свободы поля есть отношение последнего объема к объему, занимаемому в k-пространстве одним осциллятором поля, т.е.

$$Z' = V_k / v_k = \omega^3 L^3 / 6\pi^2 c^3$$

Учитывая, что на самом деле в одной волне есть два поля (компонента электрического и компонента магнитного, имеем окончательно число степеней свободы поля

$$Z = \omega^3 L^3 / 3\pi^2 c^3$$

2.2. Квантование поля

Теперь вернемся к квантованию ЭМ поля. Можно показать, что удобно произвести замену вида (эти переменные вещественны)

$$\vec{Q}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\vec{a}_{\vec{k}} + \vec{a}^{*}_{\vec{k}}), \quad \vec{P}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\vec{a}_{\vec{k}} - \vec{a}^{*}_{\vec{k}}) \equiv \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}}\left(\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{a}^{*}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)$$

Тогда

$$\vec{A} = \sqrt{4\pi}\sum_{\vec{k}}\left(\vec{Q}_{\vec{k}}\cos\vec{k}\vec{r} - \frac{1}{\omega}\vec{P}_{\vec{k}}\sin\vec{k}\vec{r}\right)$$

$$\vec{a}_{\vec{k}} \sim \exp(-i\omega t), \ \omega = c\left|\vec{k}\right|$$

Полная энергия поля тогда есть

$$W = \frac{1}{8\pi}\int(E^2 + H^2)dV$$

В квантовой теории ей отвечает оператор энергии, выраженный через выписанные выше величины

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi}\int(\hat{E}^2 + \hat{H}^2)dV = \sum_{\vec{k},\alpha}\frac{1}{2}\left(\hat{P}^2_{\vec{k},\alpha} + \omega^2\hat{Q}^2_{\vec{k},\alpha}\right)$$

где α **- нумерует поляризацию**

Таким образом, общая энергия ЭМ поля представлена через переменные и операторы отдельных (независимых!) осцилляторов, для которых имеет место соотношений для уровней энергии

$$\varepsilon = \sum_{\vec{k},\alpha}\left(N_{\vec{k},\alpha} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

2.3. Фотоны

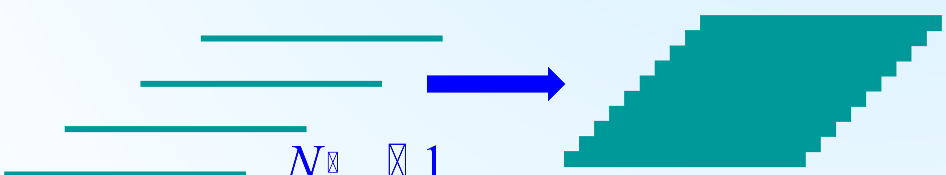
Если пренебречь энергией «нулевых колебаний» $\varepsilon_0 = (1/2)\hbar\omega$, тогда энергия и импульс электромагнитного поля есть

$$\varepsilon = \sum_{\vec k,\alpha} N_{\vec k,\alpha}\hbar\omega, \quad \vec P = \sum_{\vec k,\alpha} N_{\vec k,\alpha}\hbar\vec k$$

Отсюда можно ввести понятие о <u>квантах электромагнитного поля</u> или <u>фононах</u>. Это впервые сделано А. Эйнщтейном в 1905г. Согласно этой концепции, ЭМ поля можно рассматривать как совокупность частиц (квазичастиц), каждая из которых имеет энергию и импульс

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad \vec P = \hbar\vec k = \vec n\hbar\omega / c$$

Тогда величины $N_{\vec k,\alpha}$ представляют собой так называемые <u>числа заполнения</u> – число фотонов с данными импульсами $\vec k$ и поляризацией α. Представление в квантовой теории ЭМ поля через фотоны и числа заполнения полностью заменяет классическое его описание через напряженности поля или потенциалы. Заметим также, что ЭМ поле становится чисто классическим, когда велики числа заполнения $N_{\vec k,\alpha}$. Отсюда также понятно, что фотоны должны подчиняться статистике Бозе-Эйнштейна, которая допускает любое число частиц в данном состоянии (в отличие от статистики Ферми-Дирака).



$N_{\vec k,\alpha} \sim 1$ $\quad$ $N_{\vec k,\alpha} >> 1$

- рост чисел заполнения при переходе к классическому ЭМ полю