1. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Прежде, чем приступить к квантовой и оптической электронике – необходимо изучить классическую электродинамику (классическое электромагнитное поле)

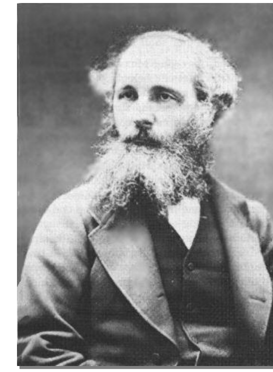
Электромагнитное поле:

- **что такое электромагнитное поле;**
- **как оно генерируется;**
- **как распространяется в вакууме и в веществе;**
- **как отражается и поглощается;**
- **какова квантовая природа электромагнитного поля;**
- **каковы специфические свойства квантового электромагнитного поля;**
- **наконец, как использовать ЭМ в различных приложениях**

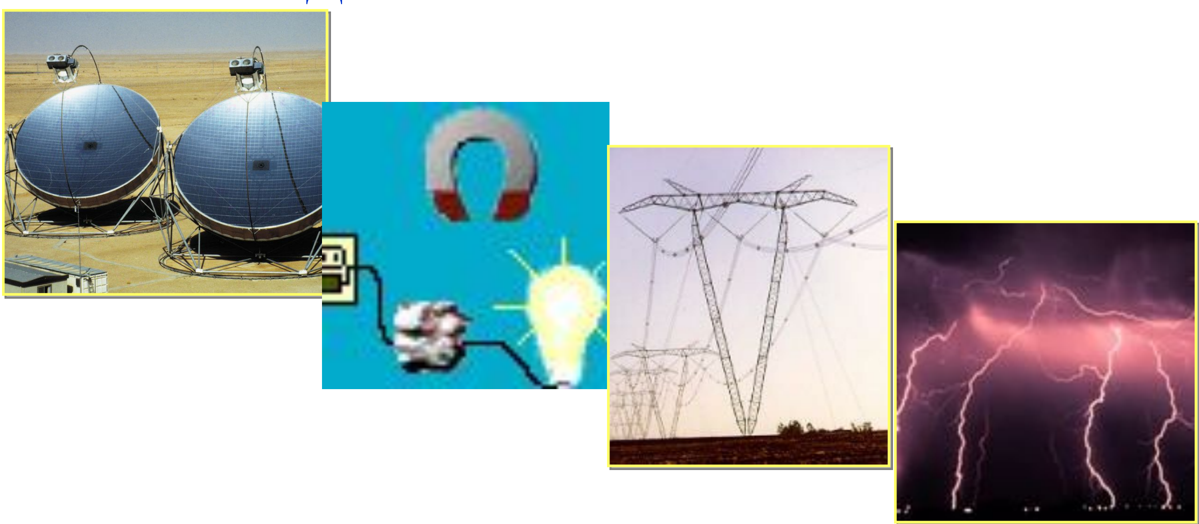
КЛАССИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Все электрические и магнитные явления, открытые экспериментально, могут быть описаны единым образом, если ввести понятие электромагнитного поля

Дж. Максвелл



Дж.Максвелл (1831-1879)



<u>ГЛАВНОЕ</u>: предсказание *электромагнитных волн*, как делокализованных объектов, распространяющихся в пустом пространстве (вакууме)

ИНФОРМАЦИЯ К РАЗМЫШЛЕНИЮ

Что нам уже известно:

- **существуют два вида механики для объектов:**
  - **классическая механика – описывает точечные объекты, состояния описываются набором координат и импульсов**

$$\left\{\vec{q}(t), \vec{p}(t)\right\}$$

Эволюция точечных объектов описывается уравнением Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

  - **квантовая механика – описывает дуальные объекты, состояния описываются уже не координатами и импульсами (они одновременно, согласно принципу неопределенности Гейзенберга, не существуют), а волновой функцией**

$$\Psi = \Psi(\vec{q}, t) \Leftrightarrow \Psi(\vec{p}, t)$$

Эволюция дуальных объектов описывается уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

Однако, известны и другие объекты природы – например, гидродинамические поля, которые определяют непрерывное изменение в пространстве и во времени различных гидродинамических величина (мы это изучали ранее). Поле, по своему определению, это непрерывно изменяющееся в пространстве и во времени поведение некоторых величин, удобных для описания такого объекта.

Теперь мы обратимся к полям иной природы – <u>электромагнитным</u>

Состояние электромагнитного поля характеризуется заданием его векторных характеристик – <u>напряженностей электрического и магнитного полей.</u>

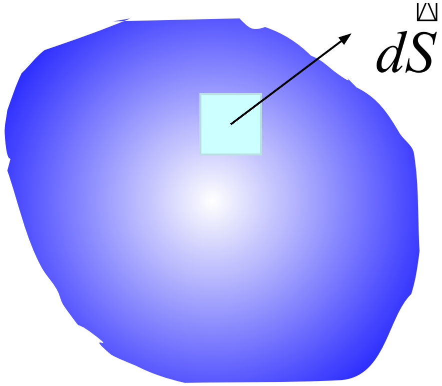
Электродинамика – наука о поведении в пространстве и времени электромагнитных полей, которые описываются векторными функциями

$$\vec{E}(\vec{r},t) \quad \vec{H}(\vec{r},t)$$

Математическое отступление

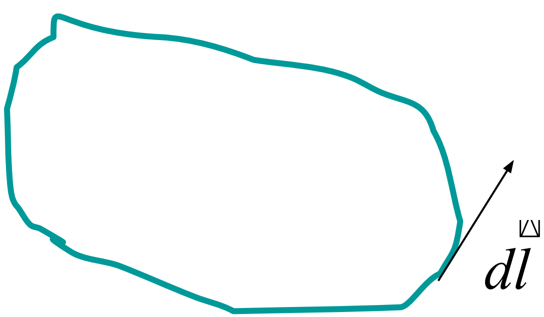
Пусть во всем пространстве имеется векторное поле: $\vec{A}(\vec{r},t)$

Пусть имеются две интегральных характеристики этого поля поток вектора и его циркуляция (в каждой точке пространства):



$$\oint_S \vec{A}(\vec{r})d\vec{S} \quad (\;) \quad \oint_L \vec{A}\;\vec{r}\;d\vec{l}$$

Покажем, что по потоку и циркуляции можно восстановить и само поле. Пусть $f(\vec{r})$ - известная функция координат, тогда, согласно теореме Гаусса-Остроградского:



$$\oint_S \vec{A}(\vec{r})d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{A}(\vec{r})dV = \int_V \mathrm{f}(\vec{r})dV$$

Отсюда, поскольку объем интегрирования произволен, имеем:

$$\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

Таким образом, задание потока вектора через замкнутую поверхность в каждой точке пространства эквивалентно заданию дивергенции этого вектора.

На основании теоремы Стокса, имеем:

$$\oint_L \vec{A}(\vec{r})d\vec{l} = \int_S rot\vec{A}(\vec{r})d\vec{S} = \int_S \vec{\Omega}(\vec{r})d\vec{S}$$

где $\vec{\Omega}(\vec{r})$ - известная векторная функция координат

Оператор набла

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \mathrm{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\times(\nabla\varphi) = 0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

Способы интегрирования

$$\int_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{A})dV$$

$$\int_L \vec{A}d\vec{r} = \int_S (\nabla\times\vec{A})d\vec{S}$$

$$\int_V \left[\varphi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\varphi\right]dV = \int_S \left[\varphi\nabla\phi - \phi\nabla\varphi\right]d\vec{S}$$

1.2. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА (в вакууме)

В гауссовской системе единиц (CGS)

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

В системе СИ (МКСА)

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}$$

Соотношения между системами единиц:

$$\varepsilon_O = 1/4\pi;\ \mu_0 = 4\pi/c;\ \vec{B} = (1/c)\vec{B};\ \vec{E} = \vec{E}$$

Закон Кулона:

$$\vec{F}_{12} = \alpha \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \text{ система СИ}$$

$$\alpha = 1 \quad , \text{ система CGS}$$

Ш.О.Кулон

1736-1806

Закон Ампера:

$$\vec{F}_A = \beta \iint \frac{\vec{j}_1 \times (\vec{j}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} d\vec{r}$$

$$\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}, \text{ система СИ}$$

$$\beta = \frac{1}{c^2} , \text{ система CGS}$$

А.М.Ампер

1775 - 1836

1.2.1. Другое представление электромагнитного поля - потенциалы

Вернемся к уравнениям ЭМ поля в вакууме и введем другое представление, удобное в некоторых случаях – потенциалы ЭМ поля (в гауссовой системе).

Вектор магнитного поля всегда соленоидален – его дивергенция равна нулю, откуда можно записать

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}, \text{ в вакууме } \vec{B}=\vec{H}$$

Вектор $\vec{A}$ носит название вектора-потенциала, который является функцией координат и времени. Подставляя в уравнение Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

получим:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} rot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Таким образом, вектор под операцией rot является потенциальным вектором, т. е. может быть представлен в виде скалярного потенциала:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi, \text{ где } \varphi \text{ скалярная функция координат и времени}$$

Таким образом, в отличие от электростатики, вектор электрического поля уже не может быть представлен в виде градиента потенциала, поскольку имеет и вихревую составляющую. Отсюда электрическое поле – можно записать в виде суммы скалярного и векторного потенциала:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Электрическое поле определено двумя функциями, поэтому, используя другие уравнения Максвелла получим:

$$\mathrm{rotrot}\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Используя приведенные выше соотношения для оператора набла, имеем

$$\nabla \mathrm{div}\vec{\mathrm{A}} - \Delta\vec{\mathrm{A}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Или для вектора-потенциала

$$\Delta\vec{\mathrm{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \nabla\left(\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

Для скалярного потенциала

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}}$$

Поскольку вектор полностью определяется своими div и rot, необходимо найти соотношение для дивергенции вектора-потенциала.

Введем так называемое условие (калибровку) Лоренца:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0}$$

Отсюда сразу получаем <u>независимые</u> уравнения для вектора-потенциала и скалярного потенциала:

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \star$$

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho \qquad \star\star$$

Полученные уравнения для потенциалов совершенно эквивалентны исходным уравнениям Максвелла. Если заданы распределения плотности заряда и плотности тока, удовлетворяющие закону сохранения заряда

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{j}=0,}$$

то интегрирование уравнений (со звездочками) позволяет найти вектор-потенциал м скалярный потенциал, а следовательно, электрическое и магнитное поля

Информация к размышлению

Уравнение типа

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \phi(\vec{r},t), \quad \phi(\vec{r},t) \text{ — заданная функция r и t}$$

называется в математической физике уравнением Даламбера, решение которого можно получить в общем случае (аналогично, и для вектора-потенциала).

В частных случаях, если правая часть равна нулю (нет свободных зарядов), получаем волновое уравнение:

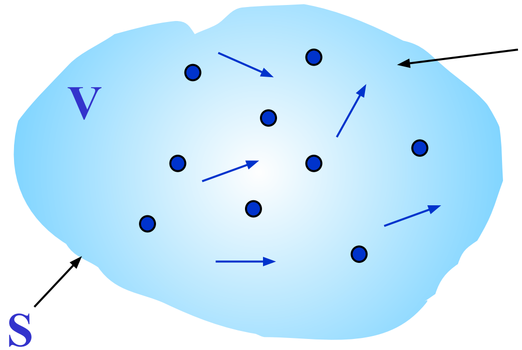
$$\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

Если потенциала не зависит от времени (электростатика), имеем уравнение Пуассона для распределения потенциала:

$$\Delta\varphi = \phi(\vec{r})$$

Уравнения для потенциалов существенно проще, чем исходные уравнения Максвелла – это основной метод нахождения электромагнитных полей !!!

1.2.2. Закон сохранения энергии электромагнитного поля



Пусть в некоторой области имеются поля, заряды и токи

Найдем работу, которую производит ЭМ над зарядами и токами. Пусть заряды и токи непрерывно распределены в объеме, тогда изменение работы со временем есть:

$$\frac{dW}{dt}=\int \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{v}}\,dV=\int\rho\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{H}}\right]\right)\vec{\mathrm{v}}\,\mathrm{dv}=$$

$$\int\rho\vec{\mathrm{E}}\vec{\mathrm{v}}\,\mathrm{dV}+\frac{1}{\mathrm{c}}\int\rho\left[\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{H}}\right]\vec{\mathrm{v}}\,\mathrm{dV}=\int\vec{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{dV}+\frac{1}{\mathrm{c}}\int\rho\left[\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}}\right]\vec{\mathrm{H}}\,\mathrm{dV}=\int\vec{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{dV}$$

Работа магнитного поля равна нулю – магнитная сила перпендикулярна скорости частиц (токам). Используя уравнения Максвелла, можно записать

$$\frac{dW=}{dt}=\int\vec{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{dV}=\frac{c}{4\pi}\int\left(\vec{E}\,\mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}}-\vec{\mathrm{H}}\,\mathrm{rot}\vec{E}\right)dV-\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+\mathrm{H}^2}{8\pi}\right)dV$$

Но

$$\int\left(\vec{E}\,\mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}}-\vec{\mathrm{H}}\,\mathrm{rot}\vec{E}\right)dV=-\int\mathrm{div}\left[\vec{E}\vec{\mathrm{H}}\right]dV=-\oint\left[\vec{E}\vec{\mathrm{H}}\right]dS$$

Таким образом

$$\frac{dW}{dt}=\int \vec{j}\vec{E}dV=-\frac{c}{4\pi}\oint\left[\vec{E}\vec{H}\right]dS-\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)dV$$

Изменение энергии ЭМ поля со временем в некотором объеме равна работе сил поля и потоку через поверхность:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)dV}_{\text{Изменение энергии поля}}=\underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\text{Работа сил поля}}+\underbrace{\frac{c}{4\pi}\oint\left[\vec{E}\vec{H}\right]dS}_{\text{Поток через поверхность}}}$$ ★★★

Понятно, что поток через поверхность можно интерпретировать как поток энергии ЭМ поля. Заметим, что он отличен от нуля, даже если заряженные частицы и токи не пересекают этой поверхности! Отсюда можно ввести вектор

$$\boxed{\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right]}$$ **- вектор Пойнтинга**

Дж. Пойнтинг (1852-1914)

Вектор Пойнтинга – поток энергии ЭМ поля через единичную поверхность; он перпендикулярен векторам электрического и магнитного поля и образует с ними правовинтовую систему координат

Замечание

Величина

$$U = \int \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV$$

не есть потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц: плотность энергии (под интегралом) отлична от нуля даже в области пространства, где нет ни зарядов, ни токов!

Перепишем уравнение ★★★ в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV = \frac{dW}{dt} + \oint \vec{S} d\vec{S}$$

Не путать вектор Пойнтинга с поверхностью!

Важно, что ЭМ убывает от любого источника поля по закону

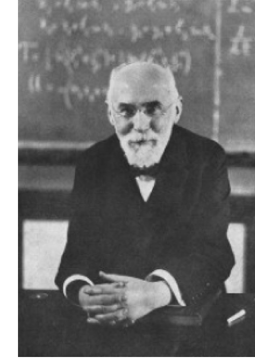
$$|\vec{E}| \sim |\vec{H}| \sim 1/r \quad \text{при} \quad r \to \infty$$

При этом интеграл от вектора Пойнтинга, взятый даже по бесконечно удаленной поверхности не стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{S \to \infty} \oint \vec{S} d\vec{S} \le const$$

Физически это означает, что система, теряющая энергию ЭМ поля, излучает!!!

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$$ - сила Лоренца



Г.А. Лоренц (1853-1928), NP-1902

Уравнения движения электронов в поле (классический случай)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$$

Теория Друде (классический случай) (1900г.) – объяснение закона Ома

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} - m\vec{v}/\tau \Rightarrow e\vec{E} = m\vec{v}/\tau$$

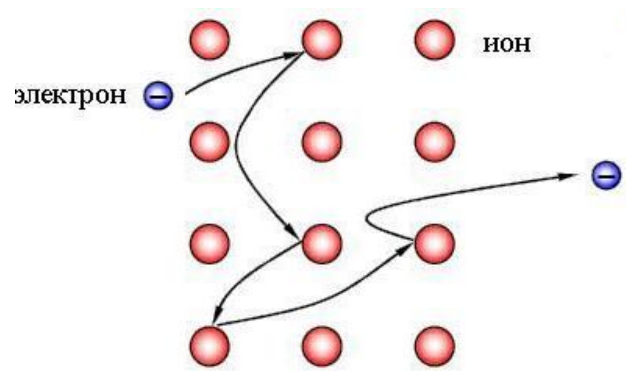
$$\vec{j} = en_e\vec{v} \Rightarrow \quad e^2 n_e \vec{E} = en_e m\vec{v}/\tau \Rightarrow \vec{j} = (e^2 n_e \tau / m)\vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \sigma_e \vec{E}$$ -закон Ома

$$\sigma_e = e^2 n_e \tau / m$$

Г.С.Ом (1789-1854)

Э. фон Сименс (1816-1892)

П. Друде (1863-1906)



1.2.3. Генерация электромагнитных волн (классическая физика)

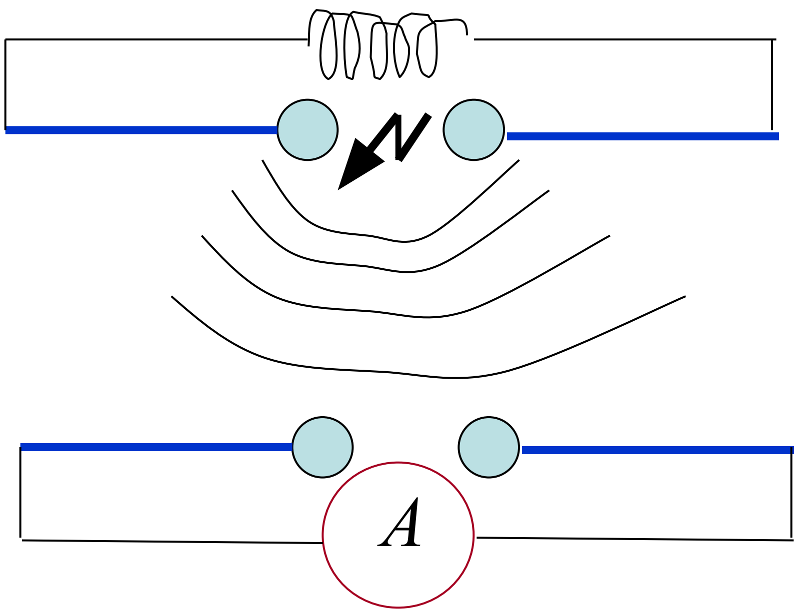
Как и почему возникает световое излучение? Что является источником электромагнитных волн?

Ответы может дать только квантовая теория. Именно генерация ЭМ волн привело к открытию квантовых законов природы. Само понятие «квант» было введено Максом Планком в связи с излучением нагретых тел.

Однако и в классической физике Максвелл, Лоренц и Герц сумели создать модель излучения Ее преимущества – простота и наглядность.

А. Опыт Герца

Излучение ЭМ волн впервые было продемонстрировано на устройстве, называемом «вибратором Герца»



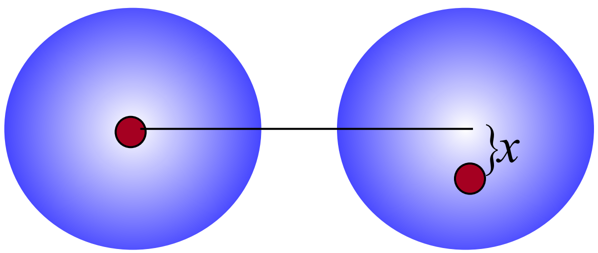
Вибратор Герца (1883г.)

Х. Герц (1857-1894)

Впервые обнаружены электромагнитные волны, предсказанные Максвеллом (1873г.)

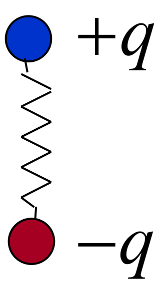
Частота электромагнитных колебаний, зарегистрированная Герцем, составляла 10^7-10^8 Гц. Частота видимого света на много порядков выше – 10^{14}- 10^{15} Гц. Отсюда вытекал вывод – размер генератора электромагнитных волн оптического диапазона чрезвычайно мал – возможно, это атомы или молекулы.

Б. Классическая модель излучения атома



Движение электрона в поле Е описывается уравнением для координаты смещения:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E$$



Важной величиной является *__дипольный момент__*, определяемый как:

$$p(t) = ex(t)$$

Можно строго показать, что покоящийся или равномерно движущийся заряд не излучает (силовые линии электрического поля везде прямые линии, выходящие из центра заряда – поле везде продольное, а электромагнитные волны – поперечные!).

$$-q = e$$

ОТСЮДА: ***__излучает только ускоренный заряд !!!__***

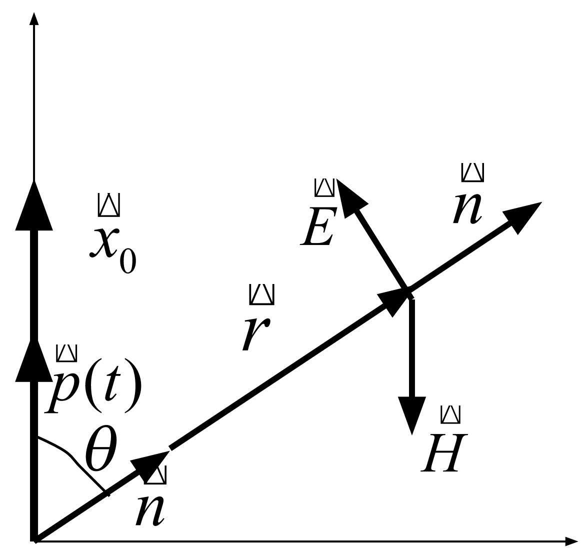
Продольная и поперечная компоненты электрического поля есть

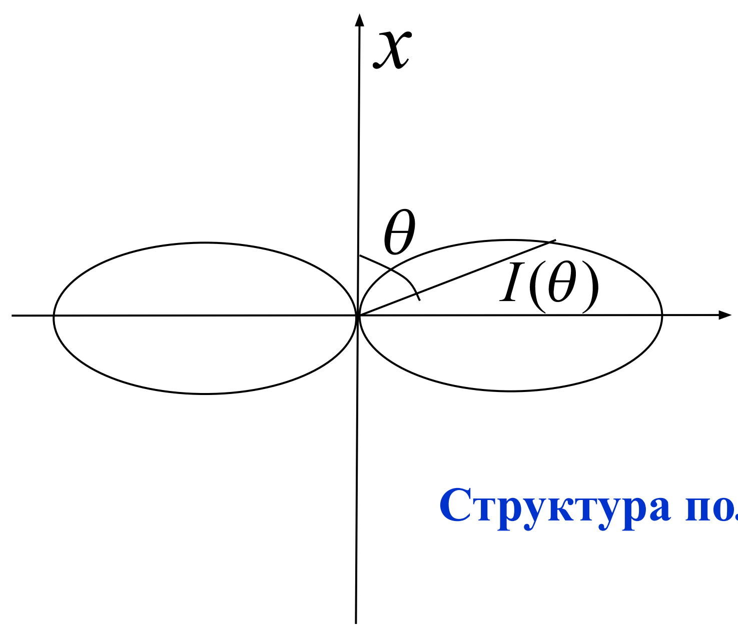
$$E_{\parallel} = q / r^2 \qquad E_{\perp} = \frac{aq}{c^2 r}\sin\theta$$

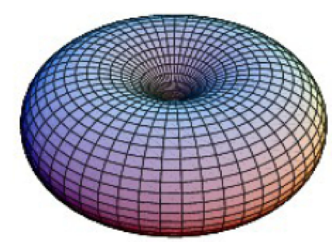
a – ускорение заряда q, c –скорость света, θ – угол между радиусом-вектором, проведенном в точку наблюдения поля и направлением движения заряда. Переменное электрическое поле порождает магнитное поле, причем выполняется в силу уравнений Максвелла: $H_{\perp} = E_{\perp}$

Плотность потока электромагнитной энергии есть: $S = \frac{c}{4\pi} H_{\perp} E_{\perp} = \frac{(aq\sin\theta)^2}{4\pi c^3 r^2}$

Направление вектора $\vec{S}$ **совпадает с направлением** $\vec{r}$ **:**







Структура поля излучения диполя

В. Гармонические колебания диполя

Вектор дипольного момента есть: $\vec{p}(t) = q\vec{x}(t) \rightarrow p(t) = qx(t)$

в одномерном случае

Пусть дипольный момент совершает гармонические колебания:

$$x(t) = X\cos\omega t$$

Используя формулы Максвелла, можно получить выражения для поля излучения

$$\vec{E} = \vec{e}A\cos\omega(t - r/c), \quad \vec{H} = \vec{h}A\cos\omega(t - r/c)$$

$$A = \frac{\omega^2 qX}{c^2 r}\sin\omega t, \quad \vec{e} = -\left[\vec{n}, \vec{h}\right], \quad \vec{h} = \frac{\left[\vec{n}, \vec{x}_0\right]}{\sin\theta}$$

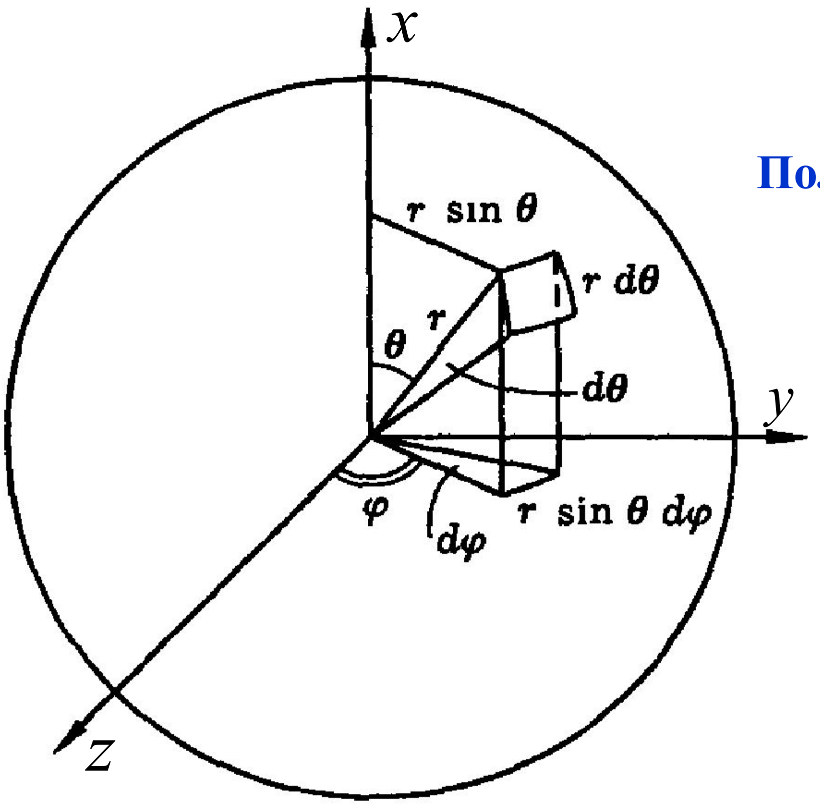
Полученные соотношения показывают, что излучение диполя линейно поляризовано. Вектор потока энергии есть

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right] = \frac{cA^2}{4\pi}\left[\vec{e}, \vec{h}\right]\cos^2\omega(t - r/c)$$

Интенсивность излучения есть

$$I = \langle S \rangle = \frac{cA^2}{8\pi} = \frac{q^2 X^2 \omega^4}{8\pi c^3 r^2} \sin^2\theta$$

Полная мощность излучения диполя есть суммарная мощность излучения во всех направлениях. Для этого надо проинтегрировать по сфере вокруг диполя. Тогда, если записать элемент поверхности сферы в виде



$$d\sigma = r^2 \sin^2\theta d\theta d\varphi$$

Полная мощность излучения есть

$$P = \int I d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I r^2 \sin\theta d\theta$$

Окончательно получаем

$$P = \frac{q^2 X^2 \omega^4}{3c^3}$$

$$P \sim \omega^4 \;!!!$$

Г. Радиационное затухание колебаний диполя

Совершая колебания и излучая электромагнитные волны, колебания диполя подвержены затуханию, которое называют *радиационным*. Время радиационного затухания можно определить как отношение начальной мощности диполя к мощности излучения:

$$\tau = W / P$$

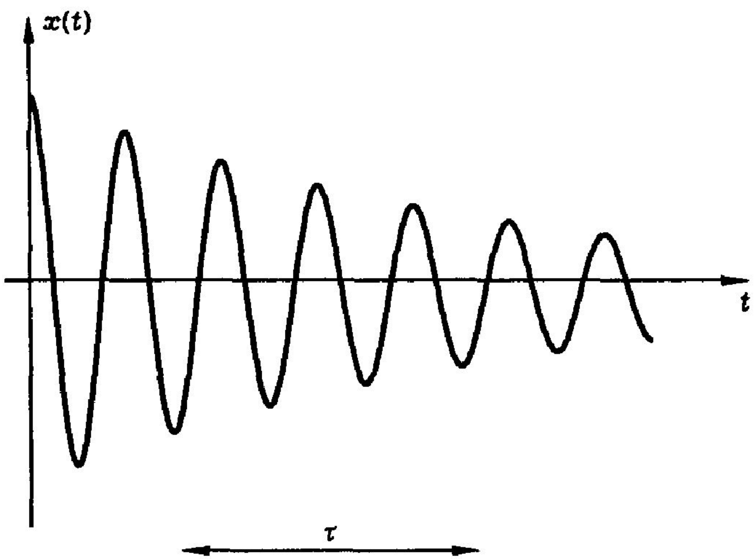
$$W = m\omega^2 X^2 / 2$$

$$P = \frac{q^2 X^2 \omega^4}{3c^3}$$

$$\tau = \frac{3mc^3}{2q^2\omega^2}$$

Оценка времени затухания для оптических частот колебаний электронов в атоме

$m = 9{,}1\cdot 10^{-28}$ г; $e = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ СГСЭ; $\omega = \cdot 10^{-15}$ $сек^{-1}$



Тогда

$$\tau \approx 10^{-8} \text{ сек}$$

Фактически это и есть время высвечивания отдельного атома, что подтверждается и опытом.

1.3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭМ ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

ГЕНЕРАЦИЯ ЭМ ПОЛЯ → РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭМ ПОЛЯ → ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭМ ПОЛЯ С ЧЕМ-ЛИБО…

\+   -   -

Рассмотрим как распространяется ЭМ поле <u>в вакууме (нет зарядов и токов</u>!), т.е.

$$\rho = 0, \ \vec{j} = 0$$

Уравнения Максвелла в этом случае есть

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Эти уравнения имеют решения даже в отсутствие зарядов и токов, следовательно могут существовать ЭМ поля в пустоте – это и есть *<u>электромагнитные волны</u>*

***<u>ВАЖНО:</u>* ЭМ волны – переменные во времени, т. е.**

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \ \vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$$

Если $\partial\vec{E}/\partial t = \partial\vec{H}/\partial t = 0$

решения для ЭМ поля обращаются в нуль!

Если нет токов, то уравнение для вектора-потенциала (см. выше) есть

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

1.3.1. Плоские ЭМ волны в вакууме

Если поля зависят только от одной пространственной переменной, то такие поля (волны) называются <u>плоскими.</u> В этом случае уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

где под функцией f понимается любая компонент ЭМ поля. Уравнение можно записать в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)f=0$$

Если ввести новые переменные

$$\xi=t-x/c,\ \eta=t+x/c\ \Rightarrow t=\frac{1}{2}(\eta+\xi),\ x=\frac{c}{2}(\eta-\xi)$$

Получим уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

Решение последнего уравнения есть

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(t - x/t) + f_2(t + x/c)$$

Физический смысл этого решения следующий. Если, например, имеем $f_2(\eta) = 0$, то

$$f = f_1(\xi) = f_1(t - x/t)$$

В каждой точке x=const поле меняется со временем; в каждый данный момент времени поле различно для разных значений координаты x. Однако, если при t=0 поле имело некоторое значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначальной точки. Таким образом, поле распространяется в пространстве вдоль оси x со скоростью света c в виде плоской электромагнитной волны, бегущей в положительном направлении оси x. Аналогично, часть поля

$$f = f_2(\eta) = f_2(t + x/c)$$

-поле, распространяющееся со скоростью света в отрицательном направлении вдоль оси x. Таким образом, общее поле представляет собой электромагнитное поле, распространяющееся со скоростью света в виде плоской волны в обе стороны вдоль оси x.

Если рассмотреть плоскую волну в положительном направлении оси x, можно и уравнений Максвелла записать:

$$\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t}, \quad \vec{\mathrm{H}} = \mathrm{rot}\vec A$$

Откуда

$$\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial \xi}, \quad \vec{\mathrm{H}} = \left[\nabla \vec A\right] = \left[\nabla \xi \cdot \frac{\partial \vec A}{\partial \xi}\right] = \frac{1}{c}\left[\vec n \frac{\partial \vec A}{\partial \xi}\right]$$

$\vec n$ **-единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя первое уравнение во второе, получим**

$$\boxed{\vec{\mathrm{H}} = \left[\vec{\mathrm{n}}\vec E\right]}$$

- электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны к направлению распространения

Таким образом, электромагнитные волны являются <u>поперечными.</u> Кроме того, электрическое и магнитное поля в плоской волне перпендикулярны друг другу и одинаковы по абсолютной величине!

Вектор Пойнтинга (плотность энергии) в плоской волне есть

$$\vec S = \frac{c}{4\pi}\left[\vec E \vec{\mathrm{H}}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec E\left[\vec n \vec{\mathrm{H}}\right]\right] = \frac{c}{4\pi}E^2\vec n = \frac{c}{4\pi}H^2\vec n \quad (\vec E \vec n = 0)$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Кроме того, поскольку плотность энергии

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{1}{4\pi}E^2$$

Имеем

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right] = cW\vec{n}$$

Вектор Пойнтинга переносит плотность энергии в данном направлении со скоростью света. При этом <u>импульс единицы объема ЭМ поля</u> есть

$$\vec{\Pi} = \vec{S}/c^2$$

Для плоской ЭМ волны

$$\boxed{\vec{\Pi} = \vec{S}/c^2 = (W/c)\vec{n}}$$

1.3.2. Монохроматические плоские ЭМ волны в вакууме

Если ЭМ поле – периодическая функция времени, то такие плоские ЭМ волны называются <u>монохроматическими.</u> В таких волнах все величины (потенциалы, компоненты полей) зависят от множителя:

$$\sim \cos(\omega t + \theta)$$

где ω **- циклическая частота волны**

Для монохроматической волны производная по времени есть

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$$

Для монохроматической плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x, все величины будут периодической функцией от аргумента

$$\xi = t - x/c$$

Векторный потенциал такой волны можно записать в форме

$$\vec{A}(x,t) = \vec{A}_0 \cos\left[\omega(t - x/c)\right] = \vec{A}_0 \cos\left[\omega(\xi)\right]$$

Информация к размышлению

Удобно использовать комплексное представление, используя формулу Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$ формула Эйлера

$$e^{x} = \cos x + i\sin x, \;\; e^{-x} = \cos x - i\sin x$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \; \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\cos x = \mathrm{Re}\left[\exp(ix)\right], \; \sin x = \mathrm{Im}\left[\exp(ix)\right]$$

Тогда можно записать периодическую функцию через комплексное представление

$$\vec{A}(x,t)=\mathrm{Re}\left\{\vec{A}_0\exp\left[-i\omega(t-x/c)\right]\right\}=\mathrm{Re}\left\{\vec{A}_0\exp\left[-i\omega\xi\right]\right\}$$

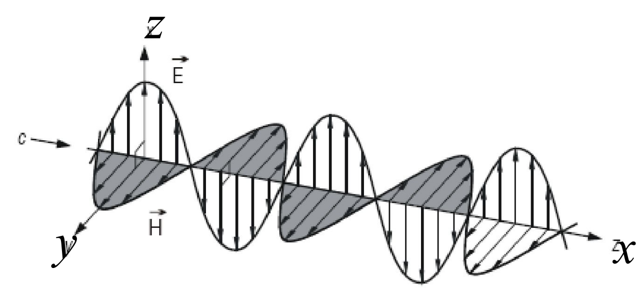
$\vec{A}_0$ **- некоторый постоянный комплексный вектор. Понятно, что и ЭМ поле будет иметь такой же вид**

$$\vec{E}(x,t)=\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\exp\left[-i\omega(t-x/c\right]\right\}=\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\exp\left[-i\omega\xi\right]\right\}$$

$$\vec{\mathrm{H}}(x,t)=\mathrm{Re}\left\{\vec{\mathrm{H}}_0\exp\left[-i\omega(t-x/c\right]\right\}=\mathrm{Re}\left\{\vec{\mathrm{H}}_0\exp\left[-i\omega\xi\right]\right\}$$

Если ввести величины, называемые <u>длиной волны</u> и <u>волновым вектором,</u> согласно соотношениям

$$\lambda=2\pi c/\omega,\quad \vec{k}=(\omega/c)\vec{n}$$



Тогда

$$\vec{A}(x,t)=\mathrm{Re}\left\{\vec{A}_0\exp\left[-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\right]\right\}$$

Пользуясь соотношениями для связи вектора-потенциала с полями, получим

$$\vec{E}=ik\vec{A},\quad \vec{H}=i\left[\vec{k}\vec{A}\right]$$

1.3.3. Поляризация монохроматических плоских ЭМ волн

Теперь необходимо понять, как направлено поле в ЭМ монохроматической волне. Возьмем, для примера, электрическое поле

$$\vec E = \mathrm{Re}\left\{\vec E_0 \exp\left[-i(\vec k\vec r - \omega t)\right]\right\}$$

Представим амплитуду поля в форме

$$\vec E_0 = \vec b \exp(-i\alpha) \Rightarrow \vec b^{\,2} = \left|\vec E_0\right|^2$$

Тогда

$$\vec E = \mathrm{Re}\left\{\vec b \exp\left[i(\vec k\vec r - \omega t - \alpha)\right]\right\}$$

Если представить вектор $\vec b$ в виде

$$\vec b = \vec b_1 + i\vec b_2 \ \ (\vec b_{1,2}\ \text{вещественные вектора})$$

Поскольку квадрат вектора – вещественен, то

$$\vec b^{\,2} = b_1^2 - b_2^2 + 2i\vec b_1\vec b_2 \Rightarrow \vec b_1\vec b_2 = 0 \Rightarrow \text{вектора } \vec b_1 \text{ и } \vec b_2 \text{ перпендикулярны!}$$

Если выбрать направление вектора $\vec b_1$ вдоль оси y, а $\vec b_2$ - вдоль оси z, то имеем

$$E_y = b_1\cos(\omega t - \vec k\vec r + \alpha),\ E_z = \pm b_2\sin(\omega t - \vec k\vec r + \alpha)$$

Из соотношений следует, что

$$\boxed{\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1}$$

Последнее соотношение – уравнение для эллипса. Таким образом, в общем случае, в каждой точке пространства вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, причем его конец описывает эллипс.

Такая волна называется **эллиптически поляризованной.** При этом вращение происходит в направлении по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси x, соответственно при знаке плюс или минус.

Если $b_1 = b_2$, то эллипс превращается в круг, т.е. вектор электрического поля вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят о **круговой поляризации** волны. Наконец, если

$$b_1 = 0 \quad \text{или} \quad b_2 = 0$$

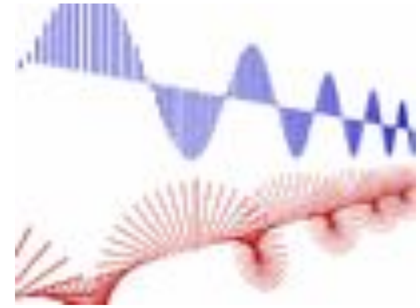
- волна называется **линейно поляризованной**. В такой волне поле везде и всегда параллельна (или антипараллельна) одному и тому же направлению. Естественно, эллиптически поляризованную волну можно представить как наложение двух линейно поляризованных волн.

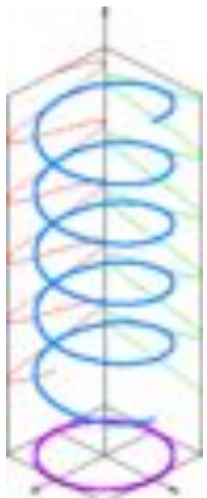
Поляризация: линейная, круговая и эллиптическая

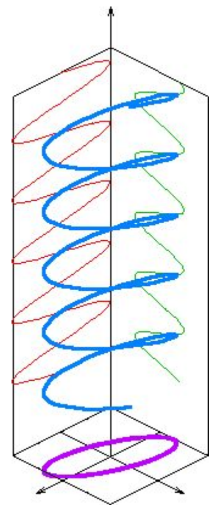
$\vec{E}$

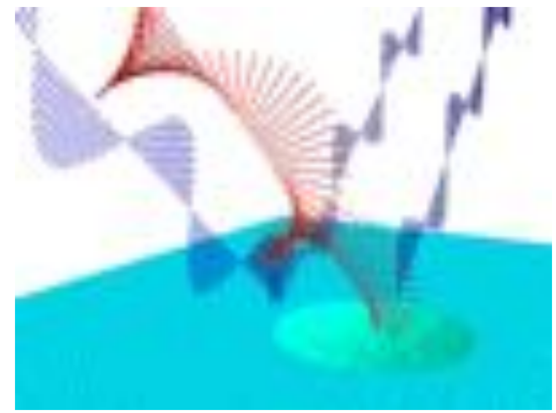
$\vec{E}$

$\vec{E}$

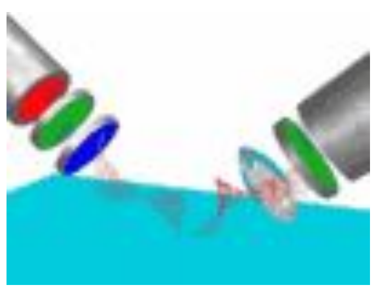


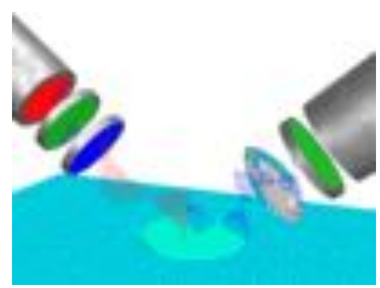






Поведение вектора электрического поля





1.3.4. Немонохроматическое ЭМ поле. Естественная поляризация

В плоской монохроматической волне напряженность электрического поля есть регулярная функция координат и времени. Такая волна называется полностью поляризованной или просто поляризованной. В общем случае, она эллиптически поляризована, а характеристики эллипса поляризации определяются амплитудами и фазами ортогональных компонент ЭМ поля E_i.

На самом деле ограниченность ЭМ пучка (апертура) и немонохроматичность приводят к отличию от такой идеальной картины. Если, например, лазерное излучение (см. ниже) бывает близко по своей структуре к поляризованной волне, то нелазерные источники содержат более сложную структуру излучения. Поле немонохроматической волны естественно рассматривать как случайный процесс. Для таких волн направление вектора поля волны случайным образом меняется со временем в плоскости фронта. Если все направления оказываются равновероятными, то ЭМ поле называется естественно поляризованным. Примерами являются солнечный свет или излучение лампы накаливания. Если же все-таки существует преимущественное направление вектора поля, то излучение называется частично поляризованным.

1.3.5. Источники ЭМ поля

НЕЛАЗЕРНЫЕ

Термические – полихроматические, пространственно некогерентные; например, лампа накаливания

Газоразрядные – квазимонохроматические, пространственно некогерентные; например, Na лампа

Светоэмиттирующие диоды (LED) – монохроматические, пространственно некогерентные

ЛАЗЕРНЫЕ

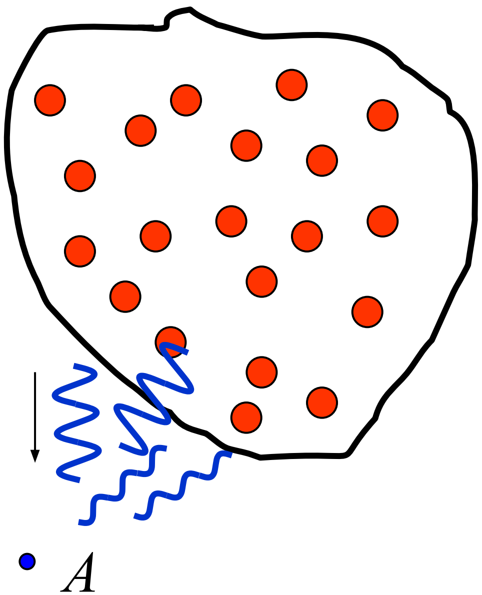
Непрерывные лазеры – монохроматические, пространственно когерентные; например, HeNe, Ar, лазерные диоды

Импульсные лазеры – квазимонохроматические, пространственно когерентные

1.4. ИЗЛУЧЕНИЕ АНСАМБЛЯ ДИПОЛЕЙ

Перейдем от динамики одного осциллятора к к ансамблю таких осцилляторов.

1.4.1. Излучение ансамбля осцилляторов



Главная проблема – суммирование вкладов отдельных осцилляторов. В силу того, что в реальной среде таких осцилляторов огромное количество, необходимо использование статистических методов. Пусть необходимо вычислить поле в данной точке (А) от системы (ансамбля) осцилляторов. Напряженность поля в точке А можно представить в виде (N – число осцилляторов):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \qquad \vec{E}_i = \vec{e}_i a_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

Если переписать суммарное поле в виде $\vec{E} = N\langle \vec{E}_i \rangle$**, где**

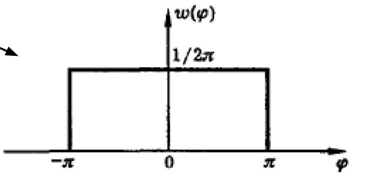
$$\langle \vec{E}_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

где $\langle \vec{E}_i \rangle$ **- среднее по ансамблю осцилляторов значение поля. Если считать величины** $\vec{e}_i, a_i, \varphi_i$ **- независимые случайные величины, то имеем**

$$\langle \vec{E}_i \rangle = \langle \vec{e}_i \rangle \langle a_i \rangle \langle \cos(\omega_i t - \varphi_i) \rangle = 0$$

Поскольку фазы осцилляторов распределены равномерно, то

$$w(\varphi_i) = 1/2\pi$$



Следовательно

$$\langle \sin\varphi_i \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi_i w(\varphi_i) d\varphi_i = 0$$

$$\langle \cos\varphi_i \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi_i w(\varphi_i) d\varphi_i = 0$$

$$\langle \cos(\omega t - \varphi_i) \rangle = \cos\omega t \langle \cos\varphi_i \rangle + \sin\omega t \langle \sin\varphi_i \rangle = 0$$

Итак, вследствие хаотическое распределения фаз, среднее значение напряженности ЭМ поля, создаваемого ансамблем осцилляторов, равно нулю. Поэтому интенсивность излучения равна сумме средних интенсивностей излучения отдельных осцилляторов

$$I = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle = N \langle I_i \rangle,$$

где

$$\langle I_i \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle E_i^2 \rangle, \langle E_i^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_i^2$$

Мощность излучение ансамбля равна сумме средних мощностей отдельных осцилляторов

$$P = N\left\langle P_i \right\rangle$$

Кроме того, вследствие хаотической ориентации дипольных моментов осцилляторов, диаграмма направленности излучения изотропна. Можно также показать, что по этой же причине, излучение ансамбля осцилляторов имеет <u>естественную поляризацию.</u>

1.4.2. Статистика излучения ансамбля независимых осцилляторов

Рассмотрим поле напряженностью

$$\vec{E} = E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

Одну из компонент поля можно записать в виде:

$$E_z = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

Определим понятия огибающей А, фазы и интенсивности:

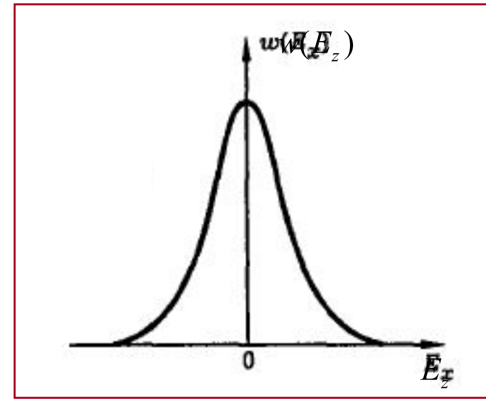
$$E_z = A\cos(\omega t - \varphi)$$ огибающая, A - фаза φ

$$I = \frac{c}{4\pi}\left\langle E_z^2 \right\rangle_T = \frac{cA^2}{4\pi}$$

Здесь $\langle\ \rangle_T$ - означает усреднение по периоду колебаний Т.

В реальных условиях нелазерных источниках ЭМ поля все параметры в приведенных соотношениях являются <u>случайными</u> для большого ансамбля осцилляторов. В этом случае мы может говорить только о *статистических свойствах излучения ансамбля осцилляторов*. В этом случае можно показать, что имеет место гауссово распределение вероятности:

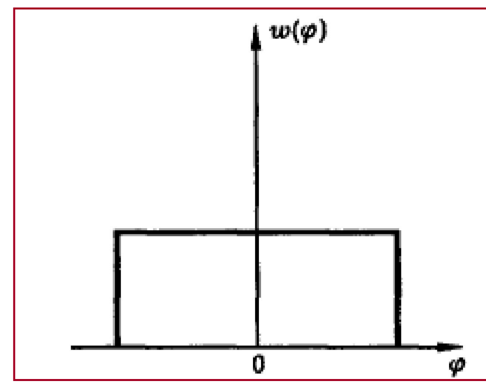
$$w(E_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-E_z^2 / 2\sigma^2\right), \ \left\langle E_z^2 \right\rangle = \sigma^2$$



$$\left\langle E_z \right\rangle = \left\langle a \right\rangle = \left\langle b \right\rangle = 0$$

$$w(A,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-A^2 / 2\sigma^2)$$

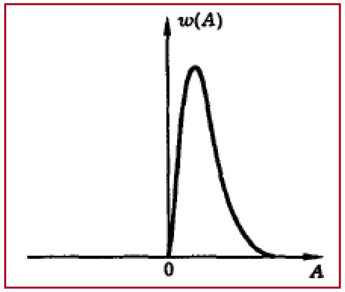
$$w(A) = \int_{-\pi}^{\pi} w(A,\varphi) d\varphi = (A/\sigma^2) \exp(-A/2\sigma^2)$$

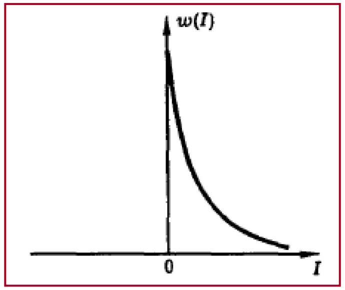


$$w(\varphi) = \int_{0}^{\infty} w(A,\varphi) dA = 1/2\pi$$

$$w(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-I / \langle I \rangle\right), \ \langle I \rangle = (c/4\pi)\sigma^2$$

где $\langle I \rangle = \int_{0}^{\infty} I w(I) dI$





Таким образом, получаем основные характеристики нелазерного (например, теплового) источника ЭМ поля распределения вероятности различных величин следующие:

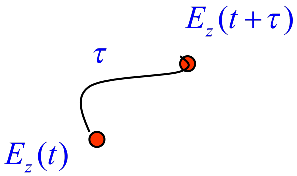
напряженность поля – гауссово распределение,

- **огибающая - распределение Рэлея,**
- **фаза – прямоугольное,**
- **интенсивность – экспоненциальное распределение.**

1.4.3. Спектр излучения ансамбля независимых осцилляторов

Излучение ансамбля независимых осцилляторов естественно рассматривать как стационарный случайный процесс. В этом случае спектр излучения определяется следующим соотношением:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$$

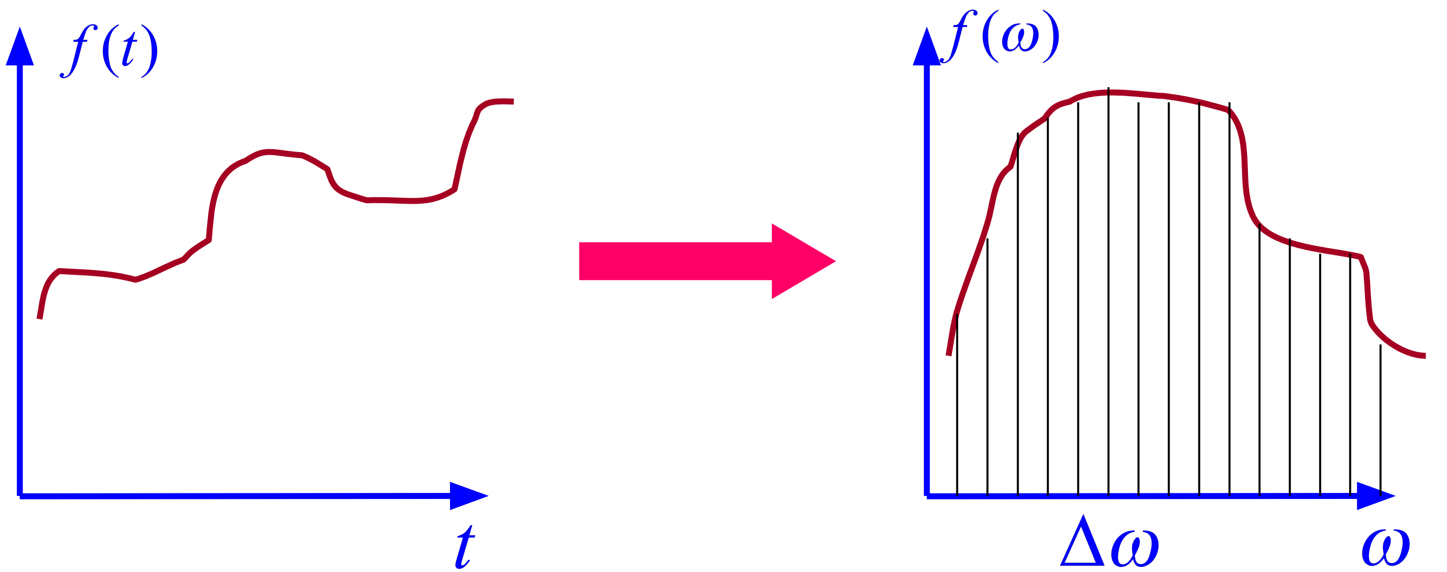


где $B(\tau) = \langle E_z(t)E_z(t+\tau)\rangle$

$B(\tau)$ – корреляционная функция ЭМ поля

1.4.4. Спектральное представление ЭМ волн

Всякую волну можно представить как сумму монохроматических волн. Удобнее при этом представить такую сумму или как дискретную или как интеграл по всем частотам (разложение Фурье).



А. Разложение по дискретным частотам

Если имеем периодическое (не обязательно монохроматическое) поле, то

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-i\omega_0 n t) \Leftrightarrow f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp(in\omega_0 t)dt$$

Поскольку функция вещественна, то

$$f_{-n} = f_n^*$$

Кроме этого, средний квадрат поля (средняя интенсивность волны) представляется в виде суммы интенсивностей монохроматических компонент

$$\overline{f}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$$

Б. Разложение по непрерывному спектру

В более общем (непериодических) функций можно разлагать поле в ряды Фурье (для этого необходимо только условие, чтобы поле обращалось в нуль при $t \to \pm\infty$):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega,$$ причем $$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(i\omega t)\, dt$$

При этом имеет место соотношение

$$f_{-\omega} = f_\omega^*$$