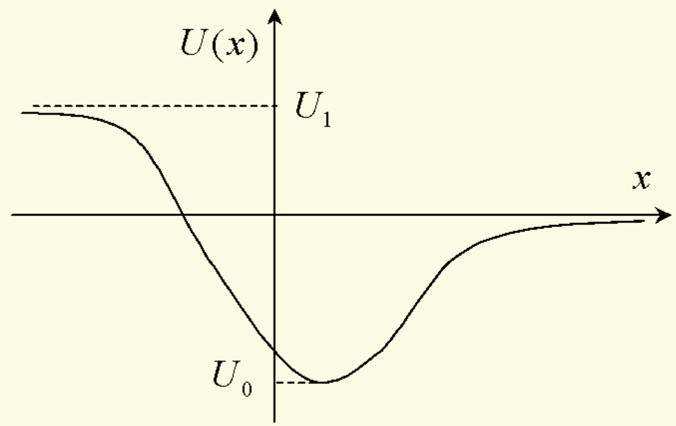
<u>Лекция 7.</u> Общие свойства стационарных состояний одномерного движения для дискретного спектра. Осцилляционная теорема

Пусть потенциальная энергия частицы $U(x)$ является ограниченной функцией при всех конечных значениях координат. Также пусть функция $U(x)$ обращается на бесконечностях в некоторые постоянные, одну из этих постоянных без ограничения общности можно выбрать равной нулю (
изменяя начало отсчета энергий):



$$U(-\infty) = U_1 \qquad U_{\min} = U_0 \qquad U(+\infty) = 0$$

Лекция 7 (2 слайд)

Докажем, что все собственные значения E лежат выше уровня U_{min}.

Для этого возьмем произвольное состояние $\Psi(x)$. Очевидно,

$$\overline{U} = \int dx \, |\Psi(x)|^2 \, U(x) > U_0$$

Поэтому

$$\overline{H} = \frac{\overline{p^2}}{2m} + \overline{U} = \overline{E} \geq U_0$$

Это неравенство выполнено для любого состояния, а для собственных состояний гамильтониана его среднее значение равно соответствующему собственному значению. Поэтому весь спектр лежит выше U_0.

Лекция 7 (3 слайд)

При энергиях $U_0 < E < 0$ могут существовать только дискретные

собственные значения. Действительно, при $x \to \pm\infty$

асимптотики

решений уравнения Шредингера имеют вид

$$\exp(-|k_1|x) \quad \exp(|k_1|x) \quad -\infty$$

и на

$$\exp(-|k_2|x) \quad \exp(|k_2|x) \quad +\infty.$$

и на

$$k_1^{\,2} = 2m(E - U_1)/\hbar^2 < 0, \; k_2^{\,2} = 2mE/\hbar^2 < 0.$$

Чтобы решение было

конечным при $x \to \pm\infty$,

необходимо наложить два дополнительных

дно при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

условия на решения: о второе – при

Лекция 7 (4 слайд)

У. Ш. – однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому одновременно удовлетворить двум указанным граничным условиям, подбирая произвольные постоянные в общем решении, вообще говоря, невозможно. Поэтому ненулевые ограниченные решения у.Ш. при $E < U(-\infty), U(\infty)$, вообще говоря, не существуют.

Однако, может оказаться, что при определенных значениях энергии E некоторое ненулевое решение удовлетворяет обоим граничным условиям. Эти значения E и будут собственными значениями оператора Гамильтона, а соответствующие ограниченные решения - собственными функциями.

Таким образом, при $E < U(-\infty), U(\infty)$ спектр собственных значений (если они существуют) дискретен, а отвечающие этим собственным значениям собственные функции затухают при $x \to \pm\infty$.

Лекция 7 (5 слайд)

При $U(\infty) < E < U(-\infty)$. .

В этом случае частными решениями у Ш.

в области $x \to +\infty$ ические функции $\sin k_2 x$

являются тригонометр и

$\cos k_2 x$, $x \to -\infty$ -

в области растущая и затухающая экспоненты. Т.е.

нужно наложить одно дополнительное условие на решения. Этому

условию можно всегда удовлетворить, подбирая нужным образом одну

из произвольных постоянных. Это значит, что в рассматриваемом случае

для любого значения E

существует конечное решение у.Ш. причем на

той бесконечности, где $E > U$, ение представляет собой линейную

это реш

комбинацию тригонометрических функций и, следовательно, не затухает.

Лекция 7 (6 слайд)

Если выполнены оба неравенства $\varepsilon > U(-\infty)$, $\varepsilon > U(\infty)$,

то ограничений

ение у.Ш. требования конечности не накладывают, и ограниченные

на реш

ешения существуют при любом значении величины E.

незатухающие р

Очевидно, в этом случае собственные значения двукратно вырождены

Лекция 7 (7 слайд)

Сформулируем без доказательства осцилляционную теорему. Перенумеруем собственные значения одномерного гамильтониана в порядке их возрастания. Тогда собственному состоянию с минимальной энергией (основному состоянию) отвечает собственная функция, которая нигде не обращается в нуль, второму по энергии состоянию (первому возбужденному) - собственная функция, которая обращается имеет один узел, второму возбужденному – функция с двумя узлами и т.д. Собственная функция n -го по энергии состояния обращается в нуль $n-1$ раз, или имеет $n-1$ узел

Лекция 7 (8 слайд)

Можно доказать, что если потенциал обращается в нуль при $x \to \pm\infty$,

и интеграл от функции $U(x)$ ицателен:

отр

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)dx = -\alpha < 0$$

то существует хотя бы один уровень энергии

Лекция 7 (9 слайд)

В случае дискретного спектра решения затухают при $x \to \pm\infty$, и, следовательно, определяют такие состояния, в которых частица не уходит на бесконечность. Это значит, что такие волновые функции описывают «связанное» потенциалом состояние частицы. Совершенно другая ситуация имеет место в случае решений, отвечающих непрерывному спектру.

Эти решения не затухают при $x \to \pm\infty$ и, следовательно, определяют состояния инфинитного движения.

Лекция 7 (10 слайд)

Рассмотрим вопрос о четности решений у. Ш. Пусть потенциальная энергия - четная функция координаты.

Тогда оператор четности $\hat{I}$ коммутирует с оператором Гамильтона. Поэтому любая собственная функция Гамильтониана (с учетом невырожденности) является собственной функцией оператора четности (то есть либо четной, либо нечетной). Из осцилляционной теоремы следует, что собственная функция, отвечающая основному

состояние четна, первого возбужденного – нечетна и т.д.