

Лекция 11

ПРОВОДИМОСТЬ ПЛАЗМЫ

Одной из наиболее важных величин, характеризующих плазму, является проводимость. Для низкотемпературной плазмы типичным случаем является ее многокомпонентность. Поэтому для теоретического рассмотрения наиболее простой является водородная полностью ионизованная плазма, что возможно при температурах $T=1-10$ кэВ. Потребность в изучении проводимости возникла в 50^е годы XX века в период начала работ по управляемому термоядерному синтезу, а также при изучении космической плазмы. Формула для проводимости данной плазмы впервые была получена известным американским теоретиком Лайманом Спитцером.

Для вывода формулы считается, что полностью ионизованная водородная плазма помещена во внешнее электрическое поле (рис.1). Величинами, характеризующими направленное движение электронов и ионов, являются их дрейфовые скорости u_e и u_i . Тогда суммарная плотность токов плазмы запишется в виде:

$$j = en(u_i - u_e)$$

Электронные скорости в случае высокотемпературной плазмы характеризуются большими значениями, чем ионные, поэтому полагают, что $u_e \gg u_i$.

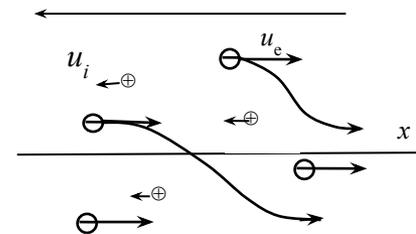


Рис.1

В силу кулоновского взаимодействия, траектория электрона в плазме, как классической частицы, представляет плавную кривую (рис.1). Под столкновением электрона и иона понимается случай изменения направления траектории на угол 90° . Заметим, что в общем случае учитываются три вида столкновений: электрон-ионные, ион-ионные и электрон-электронные. В самой простой модели столкновений ионы считаются неподвижными и учитываются только электрон-ионные столкновения. Данные столкновения характеризуются длиной столкновения λ_{ei} , зависящей от температуры. Время между данными столкновениями выражается в виде $\tau_{ei} = \frac{\lambda_{ei}}{v_e}$, где v_e – тепловая скорость электрона.

Предполагается, что при каждом столкновении электрон останавливается и полностью передает иону свой импульс mv_e . Уравнение для движения электрона будет иметь вид:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

С учетом дрейфовой скорости и времени столкновений уравнение можно записать в форме:

$$\frac{m u_e}{\tau_{ei}} = -eE$$

Для дрейфовой скорости электронов получается выражение:

$$u_e = -\frac{eE\tau_{ei}}{m}$$

Формула для плотности тока запишется следующим образом:

$$j = -enu_e = \frac{e^2 n \tau_{ei}}{m} E = \sigma E$$

Проводимость плазмы выражается в виде:

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau_{ei}}{m}$$

Приведем выражение, полученное в теории плазмы для времени электрон-ионных столкновений:

$$\tau_{ei} = 0,67 \frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n\Lambda}$$

Данная формула содержит зависимость от температуры, как $T_e^{\frac{3}{2}}$, а также, величину, имеющую слабую (логарифмическую) зависимость от температуры – кулоновский логарифм:

$$\Lambda = \ln \left(1,2 \cdot 10^4 \frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Как правило, данная зависимость от температуры T_e в кулоновском логарифме Λ не учитывается. При использовании данных выражений формула Спитцера для проводимости примет вид:

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau_{ei}}{m} = 0,67 \frac{e^2 T_e^{\frac{3}{2}}}{m\Lambda}$$

$$\sigma = 1,4 \cdot 10^8 \frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{\Lambda}$$

Единицы температуры в формуле – градусы Кельвина. В диапазоне значений n и T_e , свойственных высокотемпературной плазме, выбирается значение $\Lambda=15$ и приближенный вид формулы будет следующий:

$$\sigma \approx 10^7 \cdot T_e^{\frac{3}{2}}$$

Данные формулы записываются в системе СГСЭ. Принципиальным моментом для формулы Спитцера является ее зависимость практически только от температуры. Следует заметить, что полностью ионизованная водородная плазма обладает проводимостью, сравнимой с проводимостью меди при $T=10^7$ К и значительно превосходит проводимость морской воды:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Спит.}} &\approx 10^{17} \text{ ед.СГСЭ} \\ \sigma_{\text{медь}} &\approx 10^{17} \text{ ед.СГСЭ} \\ \sigma_{\text{м.вода}} &\approx 10^{11} \text{ ед.СГСЭ} \end{aligned}$$

Предположим, что полностью ионизованная водородная плазма помещена в высокочастотное электрическое поле, которое описывается следующей зависимостью:

$$E = E_0 e^{i\omega t}$$

Допустим, что в проводимость, также, как и в формуле Спитцера, основной вклад вносит электронная составляющая, т.е. электронная дрейфовая скорость значительно превосходит ионную дрейфовую скорость ($u_e \gg u_i$). Уравнение движения для электрона в электрическом поле запишется в виде:

$$m \ddot{x} = -eE - m \nu_{ei} \dot{x}$$

Последнее слагаемое в формуле представляет собой импульс электрона, переданный иону в результате столкновения, где ν_{ei} — частота электрон-ионных столкновений:

$$m \nu_{ei} \dot{x} = \frac{m v}{\tau_{ei}} \sim \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Общий вид уравнения будет следующий:

$$\ddot{x} + \nu_{ei} \dot{x} = -\frac{eE}{m} e^{i\omega t}$$

Зависимость $x(t)$ ищется в виде:

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

Данное выражение подставляется в уравнение:

$$-x_0\omega^2 e^{i\omega t} + v_{ei}x_0i\omega e^{i\omega t} = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t}$$

Для амплитуды колебаний x_0 получается следующее выражение:

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m(i\omega v_{ei} - \omega^2)}$$

Плотность тока будет иметь вид:

$$j = -en\dot{x} = \frac{ne^2}{m(i\omega v_{ei} - \omega^2)} i\omega \cdot E = \sigma E$$

Проводимость плазмы, полученная из последнего уравнения, умножается на выражение комплексно сопряженное со знаменателем, что в результате дает следующую формулу:

$$\sigma = \frac{ne^2 \cdot i\omega}{m(i\omega v_{ei} - \omega^2)} \frac{(i\omega v_{ei} + \omega^2)}{(i\omega v_{ei} + \omega^2)} = \frac{(v_{ei} - i\omega) ne^2}{(\omega^2 + v_{ei}^2) m}$$

$$\sigma = \frac{ne^2 (v_{ei} - i\omega)}{m (\omega^2 + v_{ei}^2)}$$

Проводимость плазмы обычно представляют в виде действительной и мнимой частей:

$$\sigma_{\text{Re}} = \frac{ne^2\nu_{ei}}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}$$

$$\sigma_{\text{Im}} = -\frac{ne^2\omega}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}$$

1) При $\nu_{ei} \gg \omega$, когда частота электрон-ионных столкновений значительно превышает частоту высокочастотного поля, проводимость плазмы определяется действительной частью проводимости и имеет вид:

$$\sigma = \sigma_{\text{Re}} = \frac{ne^2}{m\nu_{ei}}$$

2) Если $\nu_{ei} \ll \omega$, т.е. при значительном превышении частоты высокочастотного поля над частотой электрон-ионных столкновений, проводимость плазмы зависит от мнимой части проводимости:

$$\sigma = \sigma_{\text{Im}} = \frac{ne^2}{m\omega}$$

Рассмотрим проводимость полностью ионизованной водородной плазмы, помещенной в постоянное однородное магнитное поле. Более простым случаем является одинаковое направление магнитного и электрического полей $\vec{B} \parallel \vec{E}$. Сила Лоренца, действующая на заряженную частицы в данном варианте не будет иметь своей составляющей. В результате проводимость плазмы определяется формулой Спитцера:

$$\sigma_{||} = \sigma_{\text{Спит.}}$$

Представим случай взаимного перпендикулярного расположения полей: $\vec{E} \perp \vec{B}$. В скрещенных полях частицы (протоны и электроны) будут испытывать дрейфовое движение в одном и том же направлении перпендикулярно электрическому и магнитному полям (рис.2), а скорость их дрейфа будет равна:

$$u_d = c \frac{E}{B}$$

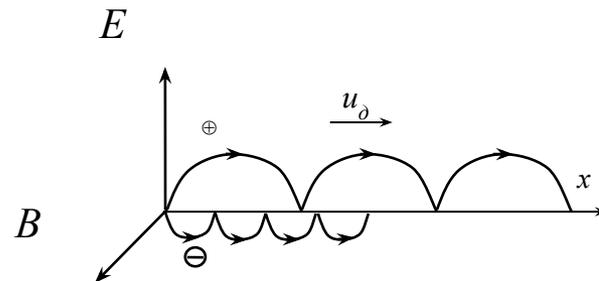


Рис.2

Рассмотрим влияние столкновений электрона и протона на дрейфовую скорость. Выразим дрейфовые скорости протонов и электронов:

$$\vec{u}_i = c \frac{[\vec{F}_i, \vec{B}]}{eB^2} \quad \vec{u}_e = -c \frac{[\vec{F}_e, \vec{B}]}{eB^2}$$

Запишем выражения для сил, действующих на протоны и электроны с учетом столкновений:

$$\vec{F}_i = |e|E \vec{e}_\parallel + \frac{m(u_e - u_i)}{\tau_{ei}} \vec{e}_\perp \quad \vec{F}_e = -|e|E \vec{e}_\parallel - \frac{m(u_e - u_i)}{\tau_{ei}} \vec{e}_\perp$$

Данные силы равны по модулю и противоположны:

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_i$$

В результате плазма как целое (протоны и электроны) будет испытывать дрейф в направлении перпендикулярном магнитному полю, а движение вдоль электрического поля будет отсутствовать. Ввиду этого, проводимость плазмы при скрещенных электрическом и магнитном полях будет равна нулю:

$$\sigma_\perp = 0$$

Данный результат является возможным для различных установок, использующих внешнее магнитное поле для стабилизации плазмы.