Лекция 12

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

Ввиду наличия заряженной и нейтральной компонент плазма обладает большим числом колебаний и волн, некоторые из которых свойственны также газообразным средам, а другие присуще исключительно плазме. Наиболее простые колебания заряженных частиц в плазме были открыты Ленгмюром. Колебания и волны в плазме, находящейся магнитном поле имеют свою специфику и отличия. Изучение распространения электромагнитных волн в плазме и их отражения от поверхности плазмы представляют собой важные проблемы, необходимые для успешной радиосвязи как в пределах Земли, так и с космическими аппаратами. От присутствия колебательных и волновых процессов во многом зависит устойчивость плазмы в ряде термоядерных установок и газоразрядных устройств. Большой интерес исследователей привлекают нелинейные волны – солитоны, обнаруженные в плазменных средах.

Рассмотрим наиболее простой вид электронных колебаний в плазме – ленгмюровские колебания. Предположим, что температура плазмы мала, и тепловым движением заряженных частиц можно пренебречь. Пренебрежем также столкновениями частиц между собой.

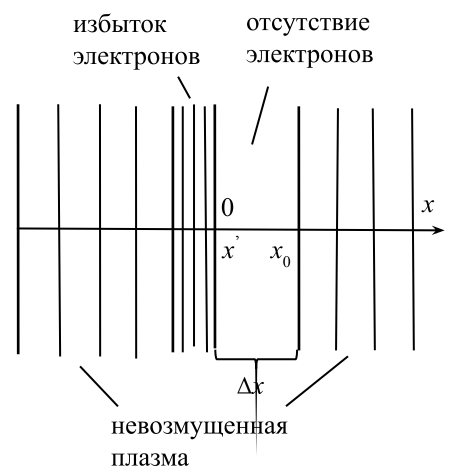

Рис.1

Будем считать ионы неподвижными, и допустим, что произошло смещение электронного слоя (рис.1). Избыточный заряд в возмущенном слое выразится в виде:

$$\Delta q = -|e| n_0 S \Delta x$$

Где n_0 – невозмущенная электронная концентрация, S – площадь данного слоя.

Для возмущенного электронного слоя справедливо уравнение Пуассона:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho$$

В одномерном случае уравнение запишется в форме:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e n_0$$

После интегрирования данного выражения напряженность электрического поля в промежутке от 0 до x_0 запишется в виде:

$$E(x^{'}) = 4\pi e n_0 \Delta x$$

Запишем уравнение движения электрона под действием электрической силы:

$$m\ddot{x} = -|e|E = -4\pi e^2 n_0 \Delta x$$

Если поделить все выражение на массу электрона, то можно прийти к уравнению колебаний:

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi n_0 e^2}{m} x$$

Колебания происходят с частотой плазменных или ленгмюровских колебаний ω_p:

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

В более сложном выводе с использованием уравнений гидродинамики присутствует концентрация плазмы в виде:

$$n = n_0 + n' \qquad\qquad n' << n_0$$

Где n' – возмущенное значение концентрации при наличии колебаний. Для уравнения относительно n' также получается уравнение колебаний с плазменной частотой ω_p:

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e^2 n_0}{m} n'$$

Данные продольные колебания электронной плотности можно наблюдать в различных видах газовых разрядов при подаче на один из электродов импульса возбуждения.

В некоторых случаях в плазме могут возбуждаться продольные волны, имеющие схожесть с волнами в газовых средах, поэтому приведем краткое описание вывода волн в газе. В качестве исходных обычно используются уравнение непрерывности и уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0 \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Где ρ -плотность газа, $\vec{v}$ -его скорость, p -давление

$$\vec{v} = grad\varphi$$

Окончательные уравнения записываются для данного потенциала, или для возмущенного значения давления p' ($p = p_0 + p'$):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - v_{зв}^2\Delta\varphi = 0 \qquad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - v_{зв}^2\Delta p' = 0$$

В одномерном случае приходят к волновому уравнению для возмущенного значения давления:

$$\frac{1}{v_{зв}^{2}}\frac{\partial^{2} p^{'}}{\partial t^{2}}-\frac{\partial^{2} p^{'}}{\partial x^{2}}=0$$

Для скорости звука в газе записывается выражение:

$$v_{зв}=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s}}=\sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}}=\sqrt{\gamma\frac{kT}{m_{0}}} \qquad \gamma=\frac{C_{P}}{C_{V}}$$

Где m_0 –масса атома, C_p –теплоемкость при постоянном давлении, C_V – теплоемкость при постоянном объеме.

Рассмотрим теперь волны в плазме при учете теплового движения электронов. Пренебрежем электрон-ионными столкновениями. Запишем уравнение движения электрона при наличии слагаемого, учитывающего градиент давления:

$$m\ddot{x}=-|e|E-\frac{\nabla P}{n}$$

При использовании выражения для давления идеального газа, слагаемое с градиентом давления будет записано в виде:

$$\nabla P = \frac{dP}{dx} = kT\frac{dn}{dx} \qquad P = nkT$$

Для электрического поля в одномерном случае, как и при ленгмюровских волнах, можно записать:

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \qquad E = 4\pi en\Delta x$$

Также используется уравнение непрерывности в одномерном случае:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0 \qquad -n\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial n'}{\partial t} \qquad n = n_0 + n'$$

Окончательный вид уравнения для возмущенного значения концентрации плазмы *n*’ будет следующий:

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e^2 n}{m}n' + \frac{kT_e}{m}\frac{\partial^2 n'}{\partial x^2}$$

Полученное выражение является уравнением типа Клейна–Гордона, в котором присутствует плазменная частота ω_p и множитель сходный с тепловой скоростью электронов v_e :

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m} \qquad\qquad v_e^2 = \frac{3kT_e}{m}$$

Решение данного уравнения ищется в виде:

$$n' = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

Где ω -частота и k –волновое число.

После подстановки в волновое уравнение можно прийти к следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3kT_e}{m}k^2 = \omega_p^2 + v_e^2 k^2$$

Обычно выражение данного типа устанавливает связь между частотой и волновым вектором в волне. С помощью дисперсионного уравнения можно найти выражения для фазовой и групповой скоростями волны. Фазовая скорость волны определяется по формуле:

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{v_e} \qquad v_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega v_e}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Для групповой скорости записывается выражение:

$$dk = \frac{\omega d\omega}{v_e\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \qquad v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{v_e}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Показатель преломления и диэлектрическая проницаемость плазмы выражается в виде:

$$n = \frac{c}{v_ф}$$

$$\varepsilon = n^2 = \frac{c^2}{v_ф^2} = \frac{c^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2 v_e^2} = \frac{c^2}{v_e^2}(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$$

Следует заметить, что последнее выражение имеет смысл только при частотах больших плазменной частоты $\omega > \omega_p$.

Рассмотрим распространение электромагнитных волн через плазму. Предположим, что плазма однородная и пренебрежем электрон-ионными столкновениями. Допустим, что на границу плазмы из вакуума падает плоская поляризованная электромагнитная волна (рис.2).

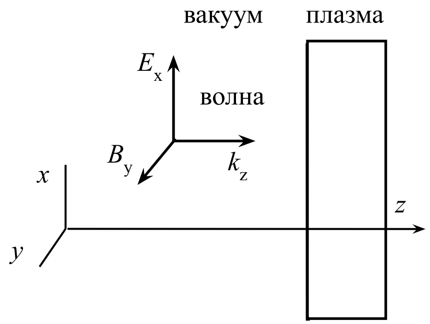

Рис.2

Уравнение движения электрона в поле волны можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = -|e|E$$

Электрическое поле в волне представляется в виде:

$$E = E_0 e^{i\omega t}$$

Подставим выражение для поля в уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -|e|E_0 e^{i\omega t}$$

Зависимость для координаты электрона запишется следующим образом:

$$x = \frac{|e|E_0}{m\omega^2} e^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t}$$

В результате электрон будет совершать колебательные движения с частотой электрического поля волны.

Представим электрический дипольный момент единицы объема:

$$P = -|e|x_0 n \qquad d = ex_0$$

Его связь с электрическим полем и диэлектрической проницаемостью будет следующей:

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E$$

Запишем выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi P}{E} = 1 - \frac{4\pi |e| x_0 n}{E} = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$$

Показатель преломления выражается в виде:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Ввиду данных формул для диэлектрической проницаемости плазмы и ее показателя преломления можно выделить два случая:

1) $\omega > \omega_p$ - в плазме распространяются электромагнитные волны и диэлектрическая проницаемость принимает значения в диапазоне от 0 до 1 (рис.3), что свойственно исключительно плазменным средам. Следует напомнить, что выражение для показателя преломления в оптически прозрачных твердых средах больше единицы.

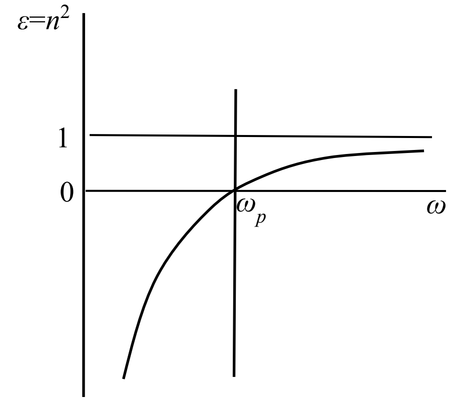

Рис.3

2) $\omega < \omega_p$ - волны в плазме затухают и распространяются на глубину скин-слоя:

$$\delta = \frac{c}{\omega}$$

Величина электрического поля в плазме при этом будет уменьшаться по закону:

$$E = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$$

От границы плазмы в этом случае происходит отражение электромагнитной волны. Данный эффект имеет большое значение при отражении радиоволн от ионосферы.

Найдем дисперсионное соотношение и скорости электромагнитных волн (фазовую и групповую). Запишем выражение для волнового вектора:

$$k = \frac{\omega}{c} n$$

Подставим его в соотношение для диэлектрической проницаемости плазмы:

$$n^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

В результате дисперсионное уравнение будет иметь вид:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$$

Для фазовой и групповой скоростей можно получить соотношения:

$$v_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \qquad k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \qquad dk = \frac{\omega d\omega}{c\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

При сравнении с подобными выражениями для волн в плазме можно обратить внимание, что вместо тепловой скорости v_e в данных формулах присутствует скорость света c.